Р.А. ЛАСУРИЯ

АППРОКСИМАЦИЯ И ГРУППЫ ОТКЛОНЕНИЙ РЯДОВ ФУРЬЕ В ОБОБЩЕННЫХ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Р.А. ЛАСУРИЯ

АППРОКСИМАЦИЯ И ГРУППЫ ОТКЛОНЕНИЙ РЯДОВ ФУРЬЕ В ОБОБЩЕННЫХ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Сухум 2017

УДК 517.5

ББК.22.161.5

Л26

ЛАСУРИЯ Р.А. АППРОКСИМАЦИЯ И ГРУППЫ ОТКЛОНЕНИЙ РЯДОВ ФУРЬЕ В ОБОБЩЕННЫХ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. – Сухум: АГУ, 2018. 285 с.

В книге излагаются результаты, относящиеся к исследованию вопросов аппроксимации функций и свойств группы отклонений, в том числе сильных средних, тригонометрических рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах и их модификациях. Также изучаются аппроксимационные свойства интегральных операторов в этих пространствах. Кроме результатов полученных автором, приводятся некоторые исследования в этом направлении известных математиков.

Для математиков, специализирующихся в области теории аппроксимации функций, суммирования рядов Фурье, а также студентов, аспирантов и преподавателей математических факультетов университетов.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. МФТИ(ГУ) *Б.И. Голубов*;
д-р физ.-мат. наук,
акад. АНА, проф. АГУ *Н.Л. Пачулиа*

Научный редактор: д-р физ.-мат. наук, в.н.с.
Ин-та матем-ки НАН Украины *А.С. Сердюк*

Рекомендовано к печати Учёным советом
Абхазского государственного университета

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.. **5**

ГЛАВА 1 Обобщенные гельдеровы пространства

§1.1. Модули непрерывности и их простейшие свойства.. 12

§1.2. Класс Φ и его основные свойства.................. 20

§1.3. Модули непрерывности высоких порядков...... 25

§1.4. Обобщённые гёльдеровы пространства и их классификации... 37

§1.5. О критериях компактности........................ 42

§1.6. Обобщенные и модифицированные L_p – гёльдеровы пространства.................................... 54

ГЛАВА 2 Аппроксимация и группы отклонений рядов Фурье непрерывных функций в обобщенных гёльдеровых пространствах

§2.1. Аппроксимация непрерывных функций и их сопряженных в гёльдеровых пространствах............ 60

§2.2. Линейные средние сумм Фурье в обобщённых гёльдеровых пространствах.............................. 70

§2.3. Группы отклонений рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах............................ 113

§2.4. Сильная аппроксимация непрерывных функций в обобщённом гёльдеровом пространстве............... 126

§2.5. Наилучшие приближения в обобщённых гёльдеровых пространствах и сильная аппроксимация.. 142

§2.6. Средние Фейера в обобщенном модифицированном гёльдеровом пространстве...... 153

ГЛАВА 3 Аппроксимация и группы отклонений рядов Фурье в обобщённых L_p-гельдеровых пространствах

§3.1. Аппроксимация функций K^{λ}-средними рядов Фурье и их сопряженных в L_p-гёльдеровых пространствах…………………………………….. 159

§3.2. Линейные средние сумм Фурье в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах……………………… 176

§3.3. Линейные средние сумм Фурье в модифицированных L_p-гёльдеровых пространствах.. 197

§3.4. Группы отклонений рядов Фурье в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах и их модификациях… 211

§3.5. Средние Фейера в модифицированном L_p-гёльдеровом пространстве…………………………….. 225

ГЛАВА 4 Интегральные операторы в обобщённых гельдеровых пространствах и их модификациях

§4.1. Аппроксимация функций операторами типа Фейера в обобщенном гёльдеровом пространстве…... 230

§4.2. Модифицированные интегральные операторы в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах……….. 239

§4.3. Одновременная аппроксимация функций операторами типа Фейера в модифицированных L_p-гёльдеровых пространствах…………………………… 265

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК………………… 277

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1975 г. немецкий математик З. Прёсдорф (S. Prössdorf [43:1]) впервые исследовал аппроксимационные свойства сумм Фурье и средних Фейера тригонометрических рядов Фурье непрерывных 2π -периодических функций в так называемых гёльдеровых пространствах, в которых метрика учитывает как максимальные значения так и гладкостные характеристики элементов этих пространств.

Гёльдеровы пространства являются классическим примером функциональных пространств, на которых хорошо иллюстрируются, например, понятия теории шкал банаховых пространств. Пространства Гёльдера являются промежуточными между пространством непрерывных на некотором отрезке функций и пространством всех непрерывно дифференцируемых на этом же отрезке функций.

Гёльдеровы пространства имеют широкое применение и в теории сингулярных интегральных уравнений. В этих пространствах, их обобщениях доказываются теоремы существования и единственности решения, устанавливаются скорости сходимости приближенных решений соответствующих сингулярных интегральных уравнений в гёльдеровой метрике, устанавливаются оценки остатков квадратурных процессов для сингулярных интегралов, а также изучаются свойства сингулярных операторов и разрешимость сингулярных интегральных уравнений в этих пространствах ([10], [43:2]).

Как известно, гёльдеровы пространства являются инвариантными относительно сингулярных операторов. Например, И.И. Привалов [44] доказал, что сингулярный оператор

$$Au = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\,ctg\,\frac{s-x}{2}\,ds$$

является ограниченным в некоторых гёльдеровых пространствах. Н.К. Бари и С.Б. Стечкин [4:1,2], [5] опираясь на оценку

$$\omega(Au;t) \le C\left\{\int_{0}^{t}\frac{\omega(u;\tau)}{\tau}d\tau + t\int_{t}^{\pi}\frac{\omega(u;\tau)}{\tau^2}d\tau\right\},$$

где $C := const$, $\omega(u;\tau) := \sup\limits_{\substack{|x_1-x_2|\le\tau \\ -\pi\le x_1, x_2\le\pi}} |u(x_1)-u(x_2)|$ – модуль непрерывности функции $u(\cdot)$, которая была получена А. Зигмундом (A. Zugmund [22:1]), доказали инвариантность пространств Гёльдера относительно оператора Au.

В нашей книге гёльдеровы пространства и их обобщения рассматриваются в связи с вопросами приближения функций и суммирования рядов Фурье в этих пространствах.

В теории рядов, как хорошо известно, кроме сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ в обычном смысле, рассматривается сходимость линейных средних

$$U_n := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} S_k,$$

которые образованы из последовательности частных сумм $\{S_n\}$ с помощью числовой матрицы $\alpha = \left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$ Полученная таким образом последовательность $\{U_n\}$ определяет один из линейных методов суммирования рядов. Если последовательность $\{U_n\}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ называется суммируемым соответствующим методом. Метод суммирования называется регулярным, если из $S_n \to S$ следует, что и $U_n \to S$. В дальнейшем в качестве приближающих агрегатов рассматриваются тригонометрические полиномы $U_n(f, \alpha)$, порождаемые различными α-методами суммирования тригонометрических рядов Фурье функций f.

Порядком приближения элемента f методом $U_n = U_n(f, \alpha)$ в некотором функциональном нормированном пространстве X называют меру скорости сходимости последовательности U_n к f в метрике этого пространства. Это означает, что в явном виде найдена положительная функция $\gamma_n = \gamma(n) = \gamma(X;\alpha;n)$ такая, что

$$\|f - U_n\|_X = O(\gamma_n), \quad \gamma_n \to 0, \ \ n \to \infty.$$

В случае фиксированных α-методов суммирования рядов, задачи приближения ставятся не только для индивидуальных элементов, но и для верхних граней норм отклонений на различных классах элементов пространства X.

Постановку этих задач можно расширить в различных направлениях, например, в том направлении, что вместо отклонений $\|f - U_n\|_X$ рассматривать α-средние последовательности φ-отклонений в пространстве X вида

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi\left(\left|f - S_k(f)\right|\right)\right\|_X \tag{B.1}$$

или

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\left(S_n(f) - f\right)\right\|_X, \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{B.2}$$

где $S_n(f)$ – частичные суммы порядка n ряда Фурье функции f, или верхние грани этих величин на различных классах функций пространства X.

За последние сорок лет появилось большое количество работ, посвящённых исследованию различных вопросов аппроксимации функций линейными методами суммирования рядов Фурье, сингулярными интегралами в пространствах Гёльдера и их обобщениях. Наряду с З. Прёсдорфом, одними из первых, положивших начало исследованию этих вопросов были Л. Лейндлер (L. Leindler [30:2]), П. Чандра (P. Chandra [63:1]), Р. Мохапатра и П. Чандра (R.N. Mohapatra, P. Chandra [35:1, 2]), З. Стапински (Z. Stypinski [52]).Затем появилась работа Л. Лейндлера, А. Меира, В. Тотика (L. Leindler, A. Meir, V. Totik [31]), в которой исследовались аппроксимационные свойства операторов свёртки A_n, действующих из пространства непрерывных 2π-периодических функций

$C(0,2\pi)$ в $C(0,2\pi)$. Ими была установлена весьма общая оценка

$$\left\|A_n(f)-f\right\|_{\omega^*} \le \left\|A_n(f)-f\right\|_C \left(1+\left(\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}\right)+$$

$$\left(1+\left\|A_n\right\|\right)\sup_{0<t\le\frac{1}{n}}\frac{2\omega(f;t)}{\omega^*(t)},$$

где $\omega(f;t)$ – модуль непрерывности функции $f\in C(0,2\pi)$, $\omega^*(\cdot)$ – произвольная возрастающая и положительная на $(0,+\infty)$ функция, $\left\|A_n\right\|:=\left\|A_n\right\|_{C\to C}$ – норма оператора свёртки из $C(0,2\pi)$ в $C(0,2\pi)$,

$$\left\|g\right\|_{\omega^*}:=\left\|g\right\|_C+\sup_{t>0}\frac{\left\|g(\cdot)-g(\cdot+t)\right\|_c}{\omega^*(t)}$$

– обобщённая гёльдерова норма, $\left\|g\right\|_C=\sup\limits_x\left|g(x)\right|$. Данная оценка сводит приближение операторов свертки в обобщенной гёльдеровой норме к приближению в равномерной норме. Однако, данная оценка в некоторых случаях не позволяет получить существующие более точные по порядку оценки, например, для средних Фейера ([26:2, 4, 5]). Подобной идее были посвящены работы В.В. Жука [20], С.А. Теляковского [55].

В работах Л. Лейндлера (L. Leindler [30:2, 5] получены некоторые оценки приближения обобщенными средними Валле Пуссена, средними Нёрлунда-Вороного в гёльдеровых пространствах, определяемых некоторыми классами мажорант модулей непрерывности. Исследования в этом направлении продолжились в работах Т.В. Иофиной [23], У. Сингх, С. Сонкер (U. Singh, S. Sonker [51]), Л. Лейндлера (L. Leindler [30:4]) и др. Свойства матричных линейных средних рядов Фурье в гёльдеровых пространствах изучались в работах [33], [35:2], [50:1, 3], [39], [65], [26:1, 2, 5-12] и др.

Аппроксимационные свойства сумм Фурье, средних Рисса, Бореля, Эйлера, Караматы, Тейлора, Неванлинны, (e,c)-средних и другихв гёльдеровых и L_p -гёльдеровых пространствах изучались в работах П. Чандры (P. Chandra [63:1, 2]), Р. Мохапатры и П. Чандры (R.N. Mohapatra, P. Chandra [35:1, 2]), Т. Сингха (T. Singh [50:1-3]), Г. Дэса, Т. Гоша, Б.К. Рэя (G. Das, T. Ghosh, B.K. Ray [15]), Г. Дэса, Б.К. Рэя, П. Саданги (G. Das, B.K. Ray, P. Sadangi [16:2]), Г. Дэса, А. Нэта, Б.К. Рэя (G. Das, A. Nath, B.K. Ray [18]), Сан Кси-Хуа (SunXie-Hua [49]), П. Саданги (P. Sadangi [47]), В.В. Жука [20], П. Чандры, С. Такура, П. Сингх (P. Chandra, S.S. ThakurP. Singh [64]), Б.А. Лендона (B.A. Landon [29]).

Аналогичные вопросы для так называемых рядов Харди-Литтлвуда рассматривались в работах Г. Дэса, А.К. Аша, Б.К. Рэя (G. Das, A.K. Ojha, B.K. Ray [17]), Г. Дэса, Б.К. Рэя, П. Саданги (G. Das, B.K. Ray, P. Sadangi [16:1]), Г. Дэса, Б. Пэни, Б.К. Рэя (G. Das, B. Pani, B.K. Ray [19]), Б.А. Лендона (B.A. Landon [29]) и др.

Свойства наилучших приближений тригонометрическими полиномами, а также вопросы интерполяции в гёльдеровых пространствах изучались в работах Дж. Престина (J. Prestin [41:1-3]), Дж. Престина и З. Прёсдорфа (J. Prestin, S. Prössdorf [42]) и др.

Некоторые проблемы сильной аппроксимации функций в гёльдеровых пространствах изучались в работах М. Горзенской, М. Лисиниевич, Л. Ремпульской (M. Gorzenska, M. Lesiniewicz, L. Rempulska [9:1, 2]), Б. Золя (B. Szal [21:1-3]), а также автором [26:2, 3, 5, 8, 10], [27:1].

Аппроксимационные свойства некоторых сингулярных интегральных операторов в обобщенных гёльдеровых пространствах исследовались в работах Р. Мохапатра, Р.С. Родригеса (R.N. Mohapatra, R.S. Rodriguez [37]), Б. Драганова (B. Draganov [14]), Р. Мохапатры и Б. Золя (R.N. Mohapatra, B. Szal [38]), автора [26:3, 4, 6] и др.

Предлагаемая читателю книга является попыткой систематического изложения определённого круга вопросов в отношении аппроксимационных свойств линейных и сильных средних (групп отклонений) рядов Фурье, а также интегральных операторов в обобщенных гёльдеровых пространствах и их модификациях. Результаты, представленные в книге, в ряде случаев усиливают и обобщают некоторые, полученные ранее, известные результаты.

Выбор материала в значительной мере обусловлен научными интересами автора книги.

За исключением первой главы, носящей вспомогательный характер, материалы остальных глав, в большей части, содержат результаты, в развитии которых автор принимал самое активное участие и в основном опубликованные в журнальных статьях, а также в двух книгах автора [26:3, 6]. Данная монография нив коей мере не претендует на полноту охвата такой достаточно обширной области, как теория аппроксимации функций и суммируемость рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах и их модификациях. В первой главе приводятся хорошо известные свойства модулей непрерывности и модулей гладкости, описанные в работах Н.К. Бари и С.Б. Стечкина [5], В.К. Дзядыка [11], Р.А. Девора и Г.Г. Лоренца (DeVore R.A., Lorentz G.G. [12]), А. Маршо (Marschoud A. [34]), С.Б. Стечкина [54], А.Ф. Тимана [56], М.Ф. Тимана [57]. Вводятся понятия обобщенных гёльдеровых и L_p-гёльдеровых пространств и их модификаций. Приводятся некоторые свойства этих пространств, рассмотренные, в том числе, в работах А.И. Гусейнова и Х.Ш. Мухтарова [10], Р.А. Девора и Г.Г. Лоренца (DeVore R.A., Lorentz G.G. [12]), З. Дициана, К. Иванова (Ditzian Z., Ivanov K. [13]), Б.Р. Драганова (Draganov B.R. [14]).

Во второй главе устанавливаются результаты, содержащие аппроксимационные свойства линейных средних сумм Фурье, а также сильных средних рядов Фурье (см. (В.1) при $\varphi(u)=u^q$, $q>0$) непрерывных 2π-периодических функций в обобщенных гёльдеровых пространствах и их модификациях. Как следствия приводятся усиленные и, в определенном смысле, окончательные варианты некоторых известных в этом направлении результатов.

Аналогичные вопросы в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах $(p \geq 1)$ являются предметом изучения третьей главы книги. При этом особенности L_p-нормы, при $1<p<\infty$, здесь не учитываются, а результаты формулируются при всех $p \geq 1$. Мера скорости сильной аппроксимации в гёльдеровых пространствах непрерывных 2π-периодических функций характеризуется величиной (В.1). Аналогом этой величины в L_1-гёльдеровом пространстве X разумно считать величину (В.2) в том смысле, что справедливо слабое асимптотическое соотношение (см., например, [45]).

$$\sup_{\|f\|_L=1}\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|S_k(f)\right|\right\|_L \asymp \ln(n+1),$$

тогда как в равномерной норме пространства C, как известно ([1], см. также [30:3]), данная величина ограничена относительно n.

В заключительной четвертой главе исследуются аппроксимационные свойства некоторых интегральных операторов, в том числе операторов типа Фейера, в обобщенных гёльдеровых и L_p-гёльдеровых пространствахи их модификациях.

Автор благодарен преподавателю кафедры прикладной математики и информатики АГУ Сусанне Эдуардовне Чолокян за существенную помощь в подготовке электронного варианта книги, а также коллегам, принимавшим участие в обсуждении полученных результатов на научных семинарах, симпозиумах и конференциях.

Сухум, 2018 *Р. Ласурия*

ГЛАВА 1
ОБОБЩЕННЫЕ ГЕЛЬДЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА

В данной главе рассматриваются известные свойства модулей непрерывности различных порядков ([5],[10], [11], [12], [34], [54], [56]), а также вводятся и изучаются некоторые свойства обобщенных гёльдеровых и L_p-гёльдеровых пространств и их модификаций([10], [12]-[14]).

§1.1. Модули непрерывности и их простейшие свойства

Пусть $C(a,b)$ – пространство непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций f с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C(a,b)} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Для функции $f \in C(a,b)$ назовем модулем непрерывности первого порядка или же просто модулем непрерывности величину $\omega(u) = \omega(f;u)$, определенную на $[0, b-a]$ с помощью равенства

$$\omega(u) = \omega(f;u) := \sup_{\substack{a\le x\le b-h \\ 0\le h\le u}} |f(x+h) - f(x)|, \qquad (1.1)$$

или, что то же самое,

$$\omega(f;u) = \sup_{\substack{|x_1-x_2|\le u \\ x_1,x_2\in[a,b]}} |f(x_1) - f(x_1)|. \qquad (1.1')$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} &|f(x+h) - f(x)| \le \omega(h), \ \ x+h \in [a,b], \\ &|f(x_2) - f(x_1)| \le \omega(|x_1 - x_2|), \ \ x_1, x_2 \in [a,b]. \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Это определение остается справедливым и для бесконечного промежутка $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ при условии, что функция является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Пример 1. Пусть $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда при каждом $u \ge 0$

$$\omega(u) = \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ 0\le h\le u}} \left|a(x+h)+b-ax-b\right| = \sup_{0\le h\le u} |ah| = |a|u.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда при каждом $u \ge 0$

$$\omega(u) = \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ 0\le h\le u}} \left|\sin(x+h) - \sin x\right| = 2 \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ a\le h\le u}} \left|\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right| =$$

$$2 \sup_{0\le h\le u} \left|\sin\frac{h}{2}\right| = \begin{cases} 2\sin\dfrac{u}{2}, & u \le \pi; \\ 2, & u \ge \pi. \end{cases}$$

Замечание. *Пусть* t' *и* t'' *– любые две точки на действительной оси* $\mathbb{R}$. *Так как среди точек вида*

$$\tilde{t}'' = t'' + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

найдется по крайней мере одна точка $\tilde{t}'' = t'' + 2k_0\pi$ *такая, что* $|\tilde{t}'' - t''| \le \pi$, *то для всякой* 2π *-периодической непрерывной функции* f *при любом* $u \ge \pi$

$$\omega(u) = \sup_{|t''-t'|\le u} \left|f(t'') - f(t')\right| = \sup_{|t''-t'|\le \pi} \left|f(\tilde{t}'') - f(t')\right| = \omega(\pi),$$

и, следовательно, для всякой такой функции $\omega(u)$ *будет постоянной при всех* $u \ge \pi$.

Из определений (1.1), (1.1') и (1.2) модуля непрерывности вытекают следующие свойства:

1) $\omega(f;0) = 0$;

2) $\omega(f;u)$ является неубывающей функцией от u;

3) $\omega(f;u)$ полуаддитивна, т.е.

$$\omega(f;u_1+u_2)\le\omega(f;u_1)+\omega(f;u_2).$$

В самом деле, пусть x_1 и x_2 – любые числа из $[a,b]$ такие, что $|x_1-x_2|\le u_1+u_2$, где $0<u_1+u_2\le b-a$. Для определенности предположим, что $x_1\le x_2$. Тогда $x_2-x_1-u_1\le u_2$ и

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f(x_1+u_1)|+|f(x_1+u_1)-f(x_2)|\le$$

$$\sup_{\substack{|t_1-t_2|\le u_1\\ a\le t_1,t_2\le b}}|f(t_1)-f(t_2)|+\sup_{\substack{|t_1-t_2|\le u_2\\ a\le t_1,t_2\le b}}|f(t_1)-f(t_2)|=$$

$$\omega(f,u_1)+\omega(f,u_2).$$

4) $\omega(f,u)$ есть непрерывная по u функция на $[0,b-a]$.

Это свойство следует из свойства 3).

Определение 1.1.1. *Функция* $\omega(u)$ $(0<u\le h_0=b-a)$ *называется модулем непрерывности, если она удовлетворяет условиям 1)–4).*

Пусть $\omega(u)$ – модуль непрерывности. Тогда $\omega(\omega;u)=\omega(u)$.

В самом деле, по определению

$$\omega(\omega;u)=\sup_{|u_1-u_2|\le u}|\omega(u_1)-\omega(u_2)|=\sup_{|u_1-u_2|\le u}\omega(|u_1-u_2|)\le\omega(u).$$

С другой стороны,

$$\omega(\omega;u)\ge\omega(u)-\omega(0)=\omega(u),$$

т.е. $\omega(\omega;u)=\omega(u)$.

Для дальнейших целей нам понадобится.

Лемма 1.1.1. *Если неубывающая и непрерывная на* $[0,b-a]$ *функция* φ *такова, что* $\varphi(0)=0$, $\varphi(u)/u$ *не возрастает, то* φ *является модулем непрерывности.*

Доказательство. Соотношения 1), 2) и 4) для φ выполнены по условию. Если $\frac{\varphi(u)}{u}$ не возрастает, то $\frac{\varphi(u_2+u_1)}{u_2+u_1} \le \frac{\varphi(u)}{u}$ при $0<u<u_1+u_2$ и, значит,

$$\varphi(u_2+u_1) \le u_2\frac{\varphi(u_2+u_1)}{u_2+u_1}+u_1\frac{\varphi(u_2+u_1)}{u_2+u_1} \le$$

$$u_2\frac{\varphi(u_2)}{u_2}+u_1\frac{\varphi(u_1)}{u_1}=\varphi(u_2)+\varphi(u_1),$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Все функции вида $Mu^\alpha\,(u\ge 0)$, где $M=const\ge 0$ и $0<\alpha\le 1$, являются модулями непрерывности.

Пример 4. При $0<\alpha\le 1$ функция

$$\omega(u)=\begin{cases} 0, & u=0 \\ u^\alpha \ln\dfrac{1}{u}, & u\in\left(0,e^{-1/\alpha}\right), \\ \dfrac{1}{\alpha e}, & u\ge e^{-1/\alpha} \end{cases}$$

является модулем непрерывности.

Перейдем к дальнейшему рассмотрению свойств модулей непрерывности:

5) Если $\omega(u)$ является модулем непрерывности, то при любом $n\in\mathbb{N}$

$$\omega(nu)\le n\omega(u).$$

Это неравенство следует из 3).

6) Если $\omega(u)$ является модулем непрерывности, то при $u_1\le u_2$

$$\frac{\varphi(u_2)}{u_2}\le 2\frac{\varphi(u_1)}{u_1} \tag{1.3}$$

Доказательство. По условию $u_2 = u_1 + \alpha$, где $\alpha \ge 0$. Подберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $(n-1)u_1 \le \alpha \le nu_1$. Тогда в силу 3) и 5) имеем

$$\frac{\omega(u_2)}{u_2} = \frac{\omega(u_1+\alpha)}{u_1+\alpha} \le \frac{\omega(u_1)}{u_1+\alpha} + \frac{\omega(\alpha)}{u_1+\alpha} \le \frac{\omega(u_1)}{u_1} + \frac{\omega(nu_1)}{u_1+(n-1)u_1} \le$$

$$\frac{\omega(u_1)}{u_1} + \frac{n\omega(u_1)}{nu_1} \le 2\frac{\omega(u_1)}{u_1}.$$

Отсюда и следует (1.3).

7) Если $\omega(u)$ является модулем непрерывности и $\omega(u) \not\equiv 0$, $\forall u \in [0, b-a]$

$$\omega(u) \ge \frac{\omega(b-a)}{2(b-a)}u.$$

В самом деле,

$$\omega(b-a) = \omega\left(u\frac{b-a}{u}\right) \le \left(\frac{b-a}{u}+1\right)\omega(u) =$$

$$\frac{b-a}{u}\left(1+\frac{u}{b-a}\right)\omega(u) \le \frac{b-a}{u}2\omega(u), \quad u \in [0, b-a].$$

8) При любом $\lambda > 0$ и для любого модуля непрерывности ω справедливо неравенство

$$\omega(\lambda u) \le (\lambda+1)\omega(u).$$

Доказательство. Так как $\lambda = [\lambda] + \alpha$, где $[\lambda]$ – целая часть числа λ, $0 \le \alpha < 1$, то в силу 5) и 3) имеем:

$$\omega(\lambda u) = \omega\big(([\lambda]+\alpha)u\big) \le \omega\big([\lambda]u\big) + \omega(\alpha u) \le$$

$$[\lambda]\omega(u) + \omega(u) \le (\lambda+1)\omega(u).$$

Лемма 1.1.2. *Если ω является модулем непрерывности, то*

$$\frac{1}{2}\omega(u) \le \frac{1}{u}\int_0^u \omega(t)\,dt \le \omega(u) \qquad (1.4)$$

Доказательство. Пусть ω – модуль непрерывности. Так как

$$\frac{1}{u}\int_0^u \omega(t)\,dt \le \frac{\omega(u)}{u}u = \omega(u),$$

$$\omega(u) - \frac{1}{u}\int_0^u \omega(t)\,dt = \frac{1}{u}\int_0^u \{\omega(u) - \omega(t)\}dt \le$$

$$\frac{1}{u}\int_0^u \omega(u-t)\,dt = \frac{1}{u}\int_0^u \omega(\tau)\,d\tau,$$

то

$$\frac{1}{2}\omega(u) \le \frac{1}{u}\int_0^u \omega(t)\,dt.$$

Соотношения (1.4) доказаны.

Лемма 1.1.3. *Если* $\omega(u)$ *является модулем непрерывности, то справедливо неравенство*

$$\frac{1}{x+y}\int_0^{x+y} \omega(t)\,dt \le \frac{1}{x}\int_0^x \omega(t)\,dt + \frac{1}{y}\int_0^y \omega(t)\,dt, \qquad (1.5)$$

где $0 < x, y, x+y \le h_0$.

Доказательство. Полагая в (1.5) $y = \alpha x$, имеем

$$\frac{\int_0^{(\alpha+1)x} \omega(t)\,dt}{1+\alpha} \le \frac{\int_0^{\alpha x} \omega(t)\,dt}{\alpha} + \int_0^x \omega(t)\,dt. \qquad (1.5')$$

Справедливость же (1.5’) следует из того, что функция

$$\psi(x) = \int_0^x \omega(t)\,dt + \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha x} \omega(t)\,dt - \frac{1}{\alpha+1}\int_0^{(\alpha+1)x} \omega(t)\,dt$$

при $x = 0$ равна нулю и является неубывающей.

Имеет место такое утверждение.

Теорема 1.1.1. *Если* ω *есть модуль непрерывности, то функция*

$$\omega^*(u) = \frac{1}{u}\int_0^u \omega(t)\,dt$$

также есть модуль непрерывности.

Доказательство. Пользуясь неравенством (1.4), получаем, что

$$\lim_{u\to 0}\omega^*(u)=0.$$

В силу леммы 1.1.2 $\left(\omega^*(u)\right)'\geq 0$, т.е. $\omega^*(u)$ – неубывающая функция. Непрерывность $\omega^*(u)$ очевидна. Полуаддитивность вытекает из леммы 1.1.3.

Определение 1.1.2. *Две неотрицательные функции* φ *и* ψ $(0<u\leq h_0)$ *называются слабо эквивалентными* $(\varphi\asymp\psi)$, *если существуют числа* $0<m$, $M<\infty$ *такие, что*

$$m\leq\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}\leq M\quad\forall u\in(0,h_0].$$

Из неравенства (1.4) следует, что если ω является модулем непрерывности, то

$$\omega^*(u)=\frac{1}{u}\int_0^u\omega(t)dt$$

эквивалентна ω.

Лемма 1.1.4. *Если* ω *есть модуль непрерывности и*

$$\int_0^\tau\frac{\omega(t)}{t}dt<\infty,$$

то справедливо неравенство

$$\int_0^{x+y}\frac{\omega(t)}{t}dt\leq\int_0^x\frac{\omega(t)}{t}dt+\int_0^y\frac{\omega(t)}{t}dt. \tag{1.6}$$

Эта лемма доказывается аналогично лемме 1.1.3.

Определение 1.1.3. *Функция* φ *называется почти возрастающей (почти убывающей) на* $[0,h_0]$, *если для любых* $u_1\leq u_2$ *из* $[0,h_0]$ *существует постоянная* $C>0$ *такая, что*

$$\varphi(u_1)\leq C\varphi(u_2)\quad\left(\varphi(u_2)\leq C\varphi(u_1)\right).$$

Отметим, что если $M \geq \varphi(u) \geq \alpha > 0$ $(0 \leq u \leq h_0)$, то она почти возрастающая. В этом случае $C = \dfrac{M}{\alpha}$. Из неравенства (1.3) следует, что если $\omega(u)$ – модуль непрерывности, то $\dfrac{\omega(u)}{u}$ – почти убывающая функция. Если $\varphi(u) \asymp \psi(u)$, то из почти возрастания (убывания) функция $\varphi(u)$ вытекает почти возрастание (убывание) функции ψ.

Лемма 1.1.5. *Для того чтобы φ была почти возрастающей (убывающей), необходимо и достаточно, чтобы она была слабо эквивалентна неубывающей (невозрастающей) функции.*

Доказательство. Пусть $\varphi(u) \asymp \psi(u)$, где $\psi(u)$ -- неубывающая функция. Тогда существует C_1 и C_2 такие, что

$$C_1\psi(u) \leq \varphi(u) \leq C_2\psi(u), \quad u \in (0, h_0].$$

Пусть $u_1 < u_2$. Тогда

$$\varphi(u_2) \leq C_2\psi(u_2) \leq C_2\psi(u_1) \leq C_2\frac{\varphi(u_1)}{C_1}.$$

Пусть теперь φ почти возрастает, т.е. при $0 < u_1 < u_2 \leq h_0$

$$\varphi(u_1) \leq C\varphi(u_2).$$

Рассмотрим функцию $\psi(u) = \sup\limits_{0<\eta\leq u} \varphi(\eta)$. Ясно, что ψ не убывает и $C\varphi(u) \geq \psi(u)$. Из определения ψ следует, что $\psi(u) \geq \varphi(u)$. Поэтому

$$\frac{\psi(u)}{C} \leq \varphi(u) \leq \psi(u).$$

Стало быть, φ эквивалентна неубывающей функции ψ.

§1.2. Класс Φ и его основные свойства

Определение 1.2.1. *Будем говорить, что функция φ принадлежит классу Φ, если она определена в $\left[0,h_0\right]$ и удовлетворяет условиям:*

а.) $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u)=0$;

б.) φ почти возрастает;

в.) $\sup\limits_{u>0}\frac{1}{\varphi(u)}\int\limits_0^u\frac{\varphi(t)}{t}dt=A_\varphi<\infty$;

г.) $\sup\limits_{u>0}\frac{u}{\varphi(u)}\int\limits_0^{h_0}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt=B_\varphi<\infty$.

Приведем основные свойства функций класса Φ:

1) Если $\varphi\in\Phi$, то $\frac{\varphi(t)}{t}$ почти убывает;
2) Если $\varphi\in\Phi$, то существуют $0<\alpha$, $\beta<1$ такие, что $\frac{\varphi(t)}{t^\alpha}$ почти возрастает, а $\frac{\varphi(t)}{t^\beta}$ почти убывает.
3) Если $\varphi\in\Phi$, то и $\frac{t}{\varphi(t)}\in\Phi$.
4) При выполнении условий а) и б) условия в) и г) эквивалентны условию:

д) существует постоянная $C>1$, такая, что

$$1<\varliminf_{u\to 0}\frac{\varphi(Cu)}{\varphi(u)}\le\varlimsup_{u\to 0}\frac{\varphi(Cu)}{\varphi(u)}<C.$$

Отметим, что класс функций Φ изучался в работах [4:1,2], [5], [32].

Свойства 1)-4) установлены Н.К. Бари и С.Б. Стечкиным ([5]).

Примерами функций, принадлежащих классу функций Φ служат следующие функции:

1) $\varphi(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$,

2) $\varphi(t)=t^{\alpha}\left|\ln t\right|^{p}$, $\varphi(0)=0$, где $0<\alpha<1$, $p>0$, $t\in[0,1/2]$.

3) $\varphi(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_n t^{\delta_n}$, где $K_n>0$, $0<\delta_n<1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=\delta>0,\ \delta_n>\delta\ (n\in\mathbb{N}),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}K_n<\infty.$

4) $$\varphi(t)=\begin{cases} t^{\alpha}, & 0\le t\le\dfrac{h_0}{2} \\ t^{\alpha}+1, & \dfrac{h_0}{2}<t\le h_0. \end{cases},\ 0<\alpha<1,$$

Последний пример показывает, что функция $\varphi\in\Phi$ может быть и разрывной в $(0,h_0]$.

Кроме того, функции класса Φ могут быть даже немонотонными. Следующее утверждение позволяет найти слабо эквивалентные им функции, являющиеся модулями непрерывности.

Теорема 1.2.1. *Если* $\varphi\in\Phi$, *то:*

1. $\varphi_1(u)=\int\limits_0^u\dfrac{\varphi(t)}{t}dt\asymp\varphi(u)$;

2. $\varphi_2(u)=\int\limits_0^u\dfrac{\varphi_1(t)}{t}dt+u\int\limits_u^{h_0}\dfrac{\varphi_1(t)}{t^2}dt\asymp\varphi_1(u)$ *и является модулем непрерывности;*

3. $\varphi_3(u)=\int\limits_0^u\dfrac{\varphi_2(t)}{t}dt\asymp\varphi_2(u)$, *является модулем непрерывности и её производная* $\varphi_3'(u)\asymp\dfrac{\varphi_3(u)}{u}$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in\Phi$. Тогда в силу условия в) $\varphi_1(u)\le A_{\varphi}\varphi(u)$.

С другой стороны, в силу почти убывания $\dfrac{\varphi(u)}{u}$ существует постоянная $C_\varphi > 0$ такая, что

$$\frac{\varphi(u_1)}{u_1} \ge C_\varphi \frac{\varphi(u_2)}{u_2}, \quad u_1 \le u_2.$$

Поэтому

$$\varphi_1(u) = \int_0^u \frac{\varphi(t)}{t} dt \ge C_\varphi \varphi(u).$$

Следовательно, $C_\varphi \varphi(u) \le \varphi_1(u) \le A_\varphi \varphi(u)$, т.е. $\varphi_1 \asymp \varphi$. Поэтому $\varphi_1 \in \Phi$.

Перейдем ко второму утверждению. Аналогично предыдущему

$$\int_0^u \frac{\varphi_1(t)}{t} dt \ge C_{\varphi_1} \varphi_1(u).$$

Так как φ_1 монотонно возрастает, то при $t < \xi < h_0$ имеем $\varphi_1(\xi) \ge \varphi_1(t)$. Следовательно,

$$u \int_u^{h_0} \frac{\varphi_1(\xi)}{\xi^2} d\xi \ge \varphi_1(u) \frac{h_0 - u}{h_0}.$$

Значит,

$$\varphi_2(u) \ge C_{\varphi_1} \varphi_1(u).$$

С другой стороны, на основании условий в) и г), для $\varphi_1(u)$ имеем

$$\varphi_2(u) \le A_{\varphi_1} \varphi_1(u) + B_{\varphi_1} \varphi_1(u).$$

Поэтому

$$\varphi_2(u) \asymp \varphi_1(u).$$

Так как

$$\left(\frac{\varphi_2(u)}{u}\right)^1 = -\frac{1}{u^2} \int_0^u \frac{\varphi_1(t)}{t} dt < 0, \quad u \in (0, h_0],$$

то $\dfrac{\varphi_2(u)}{u}$ не возрастает.

Тогда в силу леммы 1.1.1 φ_2 является модулем непрерывности.

Переходя к третьему утверждению, заметим, что полуаддитивность φ_3 следует из леммы 1.1.4. Поскольку $\varphi_3'(u) = \dfrac{\varphi_2(u)}{u}$ и

$\varphi_2(u) \asymp \varphi_3(u)$, то $\varphi_2'(u) \asymp \dfrac{\varphi_3(u)}{u}$, что и требовалось доказать.

На основании теоремы 1.2.1 можно дать следующее определение класса Φ.

Определение 1.2.2. *Будем говорить, что* ω *принадлежит классу* Φ*, если она определена в* $(0, h_0)$ *и удовлетворяет условиям:*

а) ω *является модулем непрерывности;*

б) $u\int\limits_0^{h_0} \dfrac{\omega(t)}{t(t+u)}dt \le \mathcal{D}\omega(u)$;

в) $\omega'(u) \asymp \dfrac{\omega(u)}{u}$.

В этом определении условия в) и г) определения 1.2.1 заменены одним условием:

$$u\int\limits_0^{h_0} \frac{\omega(t)}{t(t+u)}dt \le \mathcal{D}\omega(u),$$

так как функции

$$\int\limits_0^{u} \frac{\omega(t)}{t}dt + u\int\limits_u^{h_0} \frac{\omega(t)}{t^2}dt, \quad u\int\limits_0^{h_0} \frac{\omega(t)}{t(t+u)}dt$$

слабо эквивалентны.

Лемма 1.2.1. *Если неотрицательная функция* φ *почти возрастает в* $(0, h_0]$ *и сходится интеграл*

$$\int\limits_0^{h_0} \frac{\varphi(t)}{t}dt,$$

то функция

$$\psi(u)=\int_0^u \frac{\varphi(t)}{t}dt+\varphi(u)\ln\frac{h_0}{u}$$

также почти возрастает в $(0,h_0]$.

Доказательство. Пусть $0<u_1\le u_2\le h_0$. Имеем $\varphi(u_1)\le C\varphi(u_2)$. Не умаляя общности, будем считать, что $C\ge 1$. Тогда

$$\frac{\psi(u_1)}{\psi(u_2)}=\frac{\int_0^{u_1}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\varphi(u_1)\ln\frac{h_0}{u_1}}{\int_0^{u_1}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\int_{u_1}^{u_2}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\varphi(u_2)\ln\frac{h_0}{u_2}}\le$$

$$\frac{\int_0^{u_1}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\varphi(u_1)\ln\frac{h_0}{u_1}}{\int_0^{u_1}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\frac{1}{C}\varphi(u_1)\ln\frac{u_2}{u_1}+\frac{1}{C}\varphi(u_1)\ln\frac{h_0}{u_2}}=$$

$$C\frac{\int_0^{u_1}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\varphi(u_1)\ln\frac{h_0}{u_1}}{C\int_0^{u_1}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\varphi(u_1)\ln\frac{h_0}{u_1}}\le C.$$

т.е. $\psi(u_1)\le C\psi(u_2)$.

Отсюда, в частности, при $C=1$ получаем, что ψ монотонно возрастает, если $\varphi(u)$ монотонно возрастает.

Следствие 1.2.1. *Если* $\varphi\in\Phi$, *то*

$$\psi(u)=\int_0^u \frac{\varphi(t)}{t}dt+\varphi(u)\ln\frac{h_0}{u}\in\Phi.$$

Доказательство. Так как φ почти возрастает, то, в силу леммы 1.2.1, ψ почти возрастает. С другой стороны, для φ существуют постоянные $0<\delta_1<\delta_2<1$, $R_1, R_2>0$ такие, что

$$R_1 u^{\delta_2} \le \varphi(u) \le R_2 u^{\delta_1}.$$

Тогда

$$\lim_{u\to 0} \psi(u) = 0.$$

При некотором $C_0>1$ для φ выполняется условие *д*). Из слабой эквивалентности φ и $\int\limits_0^u \frac{\varphi(t)}{t}dt$ следуют неравенства

$$\frac{\varphi(C_0 u)}{\varphi(u)} \cdot \frac{C_\varphi + \ln\frac{h_0}{C_0 u}}{A_\varphi + \ln\frac{h_0}{u}} \le \frac{\psi(C_0 u)}{\psi(u)} \le \frac{\varphi(C_0 u)}{\varphi(u)} \cdot \frac{A_\varphi + \ln\frac{h_0}{C_0 u}}{C_\varphi + \ln\frac{h_0}{u}},$$

а отсюда – выполнимость условия *д*) для ψ.

§1.3. Модули непрерывности высоких порядков

Приведем определение и важнейшие свойства k-ой разности и k-ой симметричной разности функции f (см., напр., [11], [54], [56]).

Определение 1.3.1. *Пусть функция f определена на сегменте $[a,b]$. Тогда для любого натурального k, $k\in\mathbb{N}$ и любых $x\in[a,b]$ и $h>0$ таких, что $x+kh\in[a,b]$, k-ой разностью функции f в точке x с шагом h называется величина*

$$\Delta_h^k f(x) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{i} f(x+ih), \qquad (3.1)$$

а при $x\in(a,b)$ и $h>0$ таких, что

$$a \le x - \frac{kh}{2} < x + \frac{kh}{2} \le b,$$

k -ой симметричной разностью – величина

$$\dot{\Delta}_h^k f(x) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{i} f\left(x - \frac{kh}{2} + ih\right) =$$

$$\Delta_h^k f\left(x - \frac{kh}{2}\right). \qquad (3.1')$$

Свойства k -ых разностей.

1. При любых $j, k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_h^{j+k} f(x) := \Delta_h^j \left[\Delta_h^k f\right](x). \qquad (3.2)$$

Действительно, так как при любом $k \in N$ (см. (3.1))

$$\Delta_h^1 \left[\Delta_h^k f\right](x) = \Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x) =$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f\left[x + (i+1)h\right] - \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih) =$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k}{i-1} f(x+ih) - \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih) =$$

$$f\left[x + (k+1)h\right] + \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+1-i} \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right] \times$$

$$f(x+ih) + (-1)^{k+1} f(x) =$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} f(x+ih) = \Delta_h^{k+1} f(x),$$

то

$$\Delta^{j+k} f(x) = \Delta_h^1 \left[\Delta_h^{k+j-1} f\right](x) = \Delta_h^1 \left\{\Delta_h^1 \left[\Delta_h^{k+j-2} f\right]\right\}(x) =$$

$$\Delta_h^2 \left[\Delta_h^{k+j-2} f\right](x) = \Delta_h^2 \left\{\Delta_h^1 \left[\Delta_h^{k+j-3} f\right]\right\}(x) =$$

$$\Delta_h^3 \left[\Delta_h^{k+j-3} f\right](x) = \ldots = \Delta_h^j \left[\Delta_h^k f\right](x).$$

2. При любых $k, n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{nh}^{k} f\left(x\right)=\sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\ldots\sum_{i_k=0}^{n-1}\Delta_{h}^{k} f\left(x+i_1 h+i_2 h+\ldots+i_k h\right). \qquad (3.3)$$

В самом деле, при $k=1$ тождество (3.3) проверяется непосредственно:

$$\Delta_{nh}^{1} f\left(x\right)=f\left(x+nh\right)-f\left(x\right)=$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x+ih+h\right)-f\left(x+ih\right)\right]=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_{h}^{1} f\left(x+ih\right).$$

Предполагая его справедливость при $k-1\left(k\geq 2\right)$, получим (см. (3.2))

$$\Delta_{nh}^{k} f\left(x\right)=\Delta_{nh}^{k}\left[\Delta_{nh}^{k-1} f\right]\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_{h}^{1}\left[\Delta_{nh}^{k-1} f\right]\left(x+ih\right)=$$

$$\sum_{i_k=0}^{n-1}\Delta_{h}^{k}\left[\sum_{i_1=0}^{n-1}\ldots\sum_{i_{k-1}=0}^{n-1}\Delta_{h}^{k-1} f\left(x+i_k h+i_1 h+\ldots+i_{k-1} h\right)\right]=$$

$$\sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\ldots\sum_{i_k=0}^{n-1}\Delta_{h}^{k} f\left(x+i_1 h+i_2 h+\ldots+i_k h\right).$$

3. Пусть $W^{(r)}L$ – класс функций f, у каждой из которых существуют и являются на $\left[a,b\right]$ абсолютно непрерывными все производные до $\left(r-1\right)$-го порядка включительно. Тогда если $f\in W^{(r)}L$, то

$$\Delta_{h}^{r} f\left(x\right)=\int_0^h du_1\int_0^h du_2\ldots\int_0^h f^{(r)}\left(x+u_1+u_2+\ldots+u_r\right)du_r \qquad (3.4)$$

В самом деле,

$$\Delta_{h}^{1} f\left(x\right)=f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=\int_0^h f'\left(x+u_1\right)du_1,$$

$$\Delta_{h}^{2}\left(f;x\right)=\Delta_{h}^{1}\int_0^h f'\left(x+u_1\right)du_1=\int_0^h\Delta_{h}^{1}\left[f'\left(x+u_1\right)\right]du_1=$$

$$\int_0^h du_1 \int_0^h f''(x+u_1+u_2)\,du_2$$

и т.д.

Из равенства (3.4) вытекают следующие три следствия.

Следствие 1.3.1. *После* r*-кратного применения теоремы о среднем в силу равенства (3.4) видим, что существует* $\theta \in (0,1)$*, при котором*

$$\Delta_h^r f(x) = h^r f^{(r)}(x + r\theta h), \quad 0 < \theta < 1 \qquad (3.4')$$

Определение 1.3.2. *Для функции* $f \in C(a,b)$ *назовем модулем непрерывности* k*-го порядка,* $k \in \mathbb{N}$*, функцию* $\omega_k(f;u) = \omega_k(u)$*, определенную на* $\left[0, \frac{b-a}{k}\right]$ *при помощи следующего равенства(см. (3.1')):*

$$\omega_k(u) := \sup_{a \le x \le b-kh} \left|\Delta_h^k f(x)\right| = \sup_{\substack{a+\frac{kh}{2} \le x \le b-\frac{kh}{2} \\ 0 \le h \le u}} \left|\Delta_h^k f\left(x - \frac{kh}{2}\right)\right| =$$

$$\sup_{\substack{a+\frac{kh}{2} \le x \le b-\frac{kh}{2} \\ 0 \le h \le u}} \left|\dot{\Delta}_h^k f(x)\right|. \qquad (3.5)$$

Пример 1. Если $f(x) = x^{k-1} \ln x$ и $k' < k$, то

$$f^{(k')}(x) = \left[\frac{(k-1)!}{(k-k'-1)!} \ln x + const\right] x^{k-k'-1}$$

и, значит, в силу (3.4) при достаточно малых $h > 0$ и $x > 0$

$$\left|\Delta_h^{k'} f(x)\right| = \left|\int_0^h du_1 \ldots \int_0^h \left[\frac{(k-1)!}{(k-k'-1)!} \ln(x + u_1 + \ldots + u_{k'}) + const\right] \times\right.$$

$$\left.(x + u_1 + \ldots + u_{k'})^{k-k'-1} du_{k'}\right| \ge A \left|\ln h\right| h^{k-1},$$

Так что

$$\omega_{k'}\left(x^{k-1} \ln x; u\right) \ge A \left|\ln u\right| u^{k-1}, \quad A = const, \quad k' < k.$$

Пример 2. При $k = 2$ и $f(x) = \sin x$ имеем

$$\left|\dot{\Delta}_h^2 f(x)\right| = \left|\sin(x+h) - 2\sin x + \sin(x-h)\right| = u\sin^2\frac{h}{2}\left|\sin x\right|,$$

и, значит,

$$\omega_2(\sin x; u) = \begin{cases} 4\sin^2\dfrac{u}{2}, & u \le \pi, \\ 4, & u \ge \pi. \end{cases}$$

Аналогично, при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\omega_k(\sin x; u) = \begin{cases} 2^k \sin^k\dfrac{u}{2}, & u \le \pi, \\ 2^k, & u \ge \pi. \end{cases}$$

Перейдем к свойствам модулей непрерывности k-го порядка:

1) $\omega_k(0) = 0$;

2) $\omega_k(u)$ есть функция, монотонно возрастающая;

3) $\omega_k(u)$ есть функция непрерывная;

4) При любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место точное неравенство

$$\omega_k(nu) \le n^k \omega_k(u),$$

а при любом $\lambda > 0$ – неравенство

$$\omega_k(\lambda u) \le [\lambda + 1]^k \omega_k(u) \le [\lambda + 1]^k \omega_k(u).$$

5) При всех $u \in \left[0, \dfrac{b-a}{k}\right]$ имеет место неравенство

$$\omega_k(u) \ge A_k u^k, \quad A_k = \omega_k\left(\frac{b-a}{k}\right)\left[\frac{k}{2(b-a)}\right]^k.$$

6) Если функция $f(x)$ имеет всюду на $[a, b]$ непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, и при этом $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(x)$ удовлетворяет условию

$$\left|f^{(r-1)}(x_1)-f^{(r-1)}(x_2)\right|\le K|x_1-x_2|,\quad \forall x_1,x_2\in[a,b]$$

то

$$\omega_{k+r}(f;u)\le u^r\omega_k\left(f^{(r)};u\right).$$

7) При любых $u_1>0$ и $u_2>0$ таких, что $u_1+u_2\le\dfrac{b-a}{k}$, имеет место неравенство

$$\omega_k(u_1+u_2)\le 2^k\left[\omega_k(u_1)+\omega_k(u_2)\right].$$

Доказательство. 1) Свойство 1) сразу вытекает из того, что

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}=0.$$

2) Свойство 2) доказывается точно так же, как и для случая обычного модуля непрерывности.

3) Пусть, для определенности, $u>u'$. Тогда получим (см. (3.5))

$$\omega_k(u)-\omega_k(u')=\sup_{\substack{a\le x\le b-kh\\0\le h\le u}}\left|\Delta_h^k f(x)\right|-\sup_{0\le y\le b-kg}\left|\Delta_g^k f(y)\right|=$$

$$\sup_{\substack{a\le x\le b-k\theta u\\0\le\theta\le1}}\left|\Delta_{\theta u}^k f(x)\right|-\sup_{\substack{0\le y\le b-k\theta' u'\\0\le\theta'\le1}}\left|\Delta_{\theta' u'}^k f(y)\right|\le$$

$$\sup_{\substack{a\le x\le b-k\theta u\\0\le\theta\le1}}\left(\left|\Delta_{\theta u}^k f(x)\right|-\left|\Delta_{\theta u'}^k f(x)\right|\right)\le$$

$$\sup_{\substack{a\le x\le b-k\theta u\\0\le\theta\le1}}\left|\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-1}\binom{k}{i}\left[f(x+i\theta u)-f(x+i\theta u')\right]\right|\le$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\omega_1\left[i(u-u')\right]\le\sum_{i=0}^{k}i\binom{k}{i}\omega_1\left[(u-u')\right]\to0$$

при $u-u'\to0$.

Этим непрерывность функции доказана.

4) Используя свойство 2 k -х разностей, находим

$$\omega_k(nu)=\sup_{\substack{a\le x\le b-kh\\0\le h\le u}}\left|\Delta_{nh}^k f(x)\right|=$$

$$\sup_{\substack{a\le x\le b-kh\\0\le h\le u}}\left|\sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\ldots\sum_{i_k=0}^{n-1}\Delta_h^k f\left(x+i_1h+\ldots i_kh\right)\right|\le$$

$$\sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\ldots\sum_{i_k=0}^{n-1}\omega_k\left(f;u\right)=n^k\omega_k\left(u\right).$$

Второе неравенство в свойстве 4 следует из монотонности функции ω_k и первого неравенства.

5) Если $u\in\left(0,\dfrac{b-a}{k}\right]$, то

$$\omega_k\left(\frac{b-a}{k}\right)=\omega_k\left(\frac{b-a}{ku}u\right)\le\left(\frac{b-a}{ku}+1\right)^k\omega_k\left(u\right)\le$$

$$\left[\frac{2\left(b-a\right)}{ku}\right]^k\omega_k\left(u\right).$$

6) Используя свойства 1 и 3 k -х разностей, получим

$$\omega_{k+r}\left(f;u\right)=\sup_{x,0\le h\le u}\left|\Delta_h^{k+r}f\left(x\right)\right|=\sup_{x,0\le h\le u}\left|\Delta_h^k\left[\Delta_h^r f\right]\left(x\right)\right|=$$

$$\sup_{x,0\le h\le u}\left|\int_0^h du_1\ldots\int_0^h\Delta_h^k f^{(r)}\left(x+u_1+\ldots+u_r\right)du_n\right|\le$$

$$\sup_{x,0\le h\le u}\left|\int_0^h du_1\ldots\int_0^h\omega_k\left(f^{(r)};h\right)du_r\right|=u^r\omega_k\left(f^{(r)};u\right).$$

7) Если $u_1\le u_2$, то

$$\omega_k\left(u_1+u_2\right)\le\omega_k\left(2u_2\right)\le2^k\omega_k\left(u_2\right)\le2^k\left[\omega_k\left(u_1\right)+\omega_k\left(u_2\right)\right].$$

Отметим, также, свойство

$$\omega_k\left(f;u\right)\le2^{k-j}\omega_j\left(f;u\right),\ j<k. \tag{3.6}$$

В самом деле, на основании свойства 1 k -х разностей найдем, что при $j<k$

$$\omega_k\left(f;u\right)=\sup_{x,0\le h\le u}\Delta_h^k f\left(x\right)=\sup_{x,0\le h\le u}\left|\Delta_h^{k-j}\left[\Delta_h^j f\right]\left(x\right)\right|=$$

$$\sup_{x,0\le h\le u}\left|\sum_{i=0}^{k-j}(-1)^{k-j-i}\binom{k-j}{i}\Delta_h^j f(x+ih)\right|\le$$

$$\sum_{i=0}^{k-j}\binom{k-j}{i}\omega_j(f;u)=2^{k-j}\omega_j(f;u),$$

Отсюда и следует (3.6).

Заметим, что

$$\omega_k(f;u)\le 2^k\|f\|. \tag{3.7}$$

(3.7) следует из соотношения

$$\left\|\Delta_h^k f(x)\right\|\le\sum_{i=0}^{k-j}\binom{k-j}{i}\left\|\Delta_h^j f(x+ih)\right\|=$$

$$2^{k-j}\left\|\Delta_h^j f(x)\right\|,$$

при $j=0$.

Труднее оценить $\omega_k(f;u)$ через модуль непрерывности более высокого порядка. Такую оценку дает неравенство Маршо, а именно.

Теорема 1.3.1 ([34]). *Какова бы не была непрерывная на* $[a,b]$ *функция* f, *при каждом натуральном* k *и* $j=1,2,\ldots,k$ *имеет место неравенство*

$$\omega_j(f;u)\le A_k u^j\left[\int_u^{\frac{b-a}{2^j}}\frac{\omega_{k+1}(f;t)}{t^{j+1}}dt+\|f\|(b-a)^{-j}\right],$$

где A_k *– постоянная, зависящая от* k.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $j=k$. Так при любых $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right)$ и $h\in\left[0,\frac{b-a}{4k}\right]$ в силу свойства 2 k-х разностей имеет место равенство

$$\Delta_{2h}^k f(x)=\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\ldots\sum_{i_k=0}^{1}\Delta_h^k f\left(x+h(i_1+i_2+\ldots+i_k)\right),$$

то мы, учитывая, что при каждом целом $\nu \in [0, k]$ число способов, при которых среди чисел i_s, $s = 1, \ldots, k$, в точности ν чисел принимает значение единица, равно $\binom{k}{\nu}$, получаем

$$\Delta_{2h}^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \Delta_h^k f(x + \nu h).$$

Отсюда, ввиду того, что $(1+t)^k = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} t^\nu$, $k(1+t)^{k-1} = \sum_{\nu=1}^{k} \nu \binom{k}{\nu} t^{\nu-1}$, $\sum_{\nu=1}^{k} \nu \binom{k}{\nu} = k 2^{k-1}$, находим

$$\left| \Delta_{2h}^k f(x) - 2^k \Delta_h^k f(x) \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \Delta_h^k \left[f(x + \nu h) - f(x) \right] \right| =$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \Delta_h^k \sum_{j=0}^{\nu-1} \Delta_h^1 f(x + jh) \right| =$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} \Delta_h^{k+1} f(x + jh) \right| \leq \sum_{\nu=0}^{k} \nu \binom{k}{\nu} \omega_{k+1}(f; h) =$$

$$k 2^{k-1} \omega_{k+1}(f; h),$$

и значит, также при любом $r \in \mathbb{N}$

$$\left| \Delta_h^k f(x) \right| \leq \frac{k}{2} \omega_{k+1}(f; h) + \frac{1}{2^k} \left| \Delta_{2h}^k f(x) \right| \leq$$

$$\frac{k}{2} \omega_{k+1}(f; h) + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{2^k} \omega_{k+1}(f; 2h) + \frac{1}{2^{2k}} \left| \Delta_{4h}^k f(x) \right| \leq \ldots \leq$$

$$\frac{k}{2} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\omega_{k+1}(f; 2^j h)}{2^{jk}} + \frac{1}{2^{rk}} \left| \Delta_{2^r h}^k f(x) \right| \leq$$

$$\frac{1}{2^{(r-1)k}} \|f\| + \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\omega_{k+1}(f; 2^j h)}{2^{jk}}.$$

Принимая во внимание, что при любом целом $j \geq 0$ имеет место неравенство

$$h^k \int_{2^j h}^{2^{j+1} h} \frac{\omega_{k+1}(f;u)}{u^{k+1}} \geq h^k \omega_{k+1}\left(f;2^j h\right) \frac{1}{ku^k}\Bigg|_{2^{j+1} h}^{2^j h} \geq$$

$$\frac{\omega_{k+1}\left(f;2^j h\right)}{2k \cdot 2^{jk}}$$

для всех $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $h \in \left[0, \frac{b-a}{4k}\right]$ и r таких, что

$$\frac{b-a}{4k} < 2^r h \leq \frac{b-a}{2k},$$

получим

$$\left|\Delta_h^k f(x)\right| \leq \frac{\|f\|_{C(a,b)}}{2^{(r-1)k}} + 2k \sum_{j=0}^{r-1} h^k \int_{2^j h}^{2^{j+1}} \frac{\omega_{k+1}(f;u)}{u^{k+1}} du \leq$$

$$\|f\|_{C(a,b)} 2^k \left(\frac{8kh}{b-a}\right)^k + 2kh^k \int_h^{\frac{b-a}{2k}} \frac{\omega_{k+1}(f;u)}{u^{k+1}} du.$$

Поскольку путем рассмотрения на $[-b,-a]$ функции $f(-x)$ обнаружим, что подобное неравенство справедливо для $f(x)$ также при всех $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, то при всех $h \in \left[0, \frac{b-a}{4k}\right]$ будет

$$\omega_k(f;t) = \sup_{x \in [a,b]} \left|\Delta_h^k f(x)\right| \leq \left(\frac{8k}{b-a}\right)^k \|f\| t^k +$$

$$2kt^k \int_t^{\frac{b-a}{2k}} \frac{\omega_{k+1}(f;u)}{u^{k+1}} du, \qquad h \in \left(0, \frac{b-a}{2k}\right), \quad h \leq t.$$

Требуемое неравенство при $t \in \left[a, \frac{b-a}{4k}\right]$ доказано. Справедливость этого неравенства при $t > \frac{b-a}{4k}$ сводится к рассмотренному случаю при помощи свойства 4 модулей непрерывности k -го порядка.

Определение 1.3.3. *Обозначим через* Φ_0 *множество, состоящее из ограниченных функций* $f:[0,\infty)\to[0,A]$, $A\in(0,\infty)$ *каждая из которых является непрерывной, монотонно возрастающей и равной нулю в точке 0.*

Определение 1.3.3'. *Будем называть функцией типа* k *-го модуля непрерывности всякую функцию* $\omega\in\Phi_0$, *которая при всех* $n=2,3,4,\ldots$, *и* $t\in[0,a/k)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\omega(nt)\le n^k\omega(t).$$

Подкласс всех таких функций из Φ_0 будем обозначать через Φ_0^k .

Следуя Н.К. Бари и С.Б. Стечкину [5] поставим в соответствие каждой функции $\omega\in\Phi_0^k$ функцию ω^* вида

$$\omega^*(t)=t^k\sup_{u\ge t}\frac{\omega(u)}{u^k}.$$

Заметим, что поскольку

$$\omega^*(nt)=(nt)^k\sup_{u\ge nt}\frac{\omega(u)}{u^k}\le n^k\omega^*(t),$$

и, как легко видеть, $\omega^*(t)$ монотонно возрастает, то $\omega^*\in\Phi_0^k$, причем, очевидно

$$\frac{\omega^*(t_1)}{t_1^k}=\frac{\omega^*(t_2)}{t_2^k},\quad 0<t_1\le t_2,$$

и в силу неравенств

$$\omega^*(t)\ge t^k\cdot\frac{\omega(t)}{t^k}=\omega(t)$$

и

$$\omega^*(t)\le t^k\sup_{u\ge t}\frac{\omega\left\{\left[\frac{u}{t}+1\right]t\right\}}{u^k}\le$$

$$t^k \sup_{u\ge t}\frac{\left[\frac{u}{t}+1\right]^k \omega(t)}{u^k} \le t^k \sup_{u\ge t}\frac{\left(\frac{2u}{t}\right)^k}{u^k}\omega(t) = 2^k\omega(t)$$

справедливо соотношение

$$\omega^*(t) \asymp \omega(t).$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3.2. ([5]). *При каждом* $k\in\mathbb{N}$ *для любой функции* $\omega\in\Phi_0^k$ *найдется непрерывная функция* f *такая, что*

$$\omega_k(f;t) \asymp \omega(t).$$

Приведем теперь некоторые, используемые в дальнейшем, хорошо известные и аналогичные предыдущим, свойства интегрального модуля непрерывности k -го порядка:

$$\omega_k(f;h)_p := \sup_{0<t\le h}\left\|\Delta_t^k f\right\|_p, \quad 1\le p<\infty,$$

где

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty.$$

1. Для любого $p\ge 1$ и натурального k

$$\omega_k(f;h)_p \to 0 \quad (h\to 0).$$

2. Если $t_1<t_2$, то

$$\omega_k(f;t_1)_p \le \omega_k(f;t_2)_p.$$

3. Для всякого $n\in\mathbb{N}$

$$\omega_k(f;nt)_p \le n^k\omega_k(f;t)_p.$$

4. Если $\lambda>0$, то

$$\omega_k(f;\lambda t)_p \le (\lambda+1)^k\,\omega_k(f;t)_p.$$

5. Для любых $0<t_1<t_2$

$$t_2^{-k}\omega_k(f;t_2)_p \le 2^k t_1^{-k}\omega_k(f;t_1)_p.$$

6. Если $l<k$, то

$$\omega_k(f;h)_p \le 2^{k-1}\omega_l(f;h)_p.$$

Доказательство этих свойств имеется, например, в монографии А.Ф. Тимана [56].

§1.4. Обобщённые гёльдеровы пространства и их классификация

Определение 1.4.1. *Пусть* ω *– неубывающая и положительная при* $u>0$ *функция. Скажем, что непрерывная на* $[a,b]$ *функция* f *принадлежит множеству* $H_\omega = H_\omega(a,b)$, *если она удовлетворяет условию*

$$\Delta^{(\omega)}(f) := \sup_{0<u\le b-a} \frac{\omega(f;u)}{\omega(u)} < \infty, \tag{4.1}$$

где $\omega(f;u)$ *– модуль непрерывности функции* f *на отрезке* $[a,b]$. *Функцию* ω *будем называть характеристической функцией множества* H_ω.

Покажем, что если $f \in H_\omega$, то

$$\Delta^{(\omega)}(f) = \sup_{\substack{a\le x,y\le b\\ x\ne y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)} =: |f|_\omega. \tag{4.2}$$

Действительно, пусть $f \in H_\omega$. Тогда $\Delta^{(\omega)}(f) < \infty$ и $\omega(f;u) \le \Delta^{(\omega)}(f)\omega(u)$ (см. (4.1)) при любом $0<u\le b-a$. Пусть x и y --любые числа из $[a,b]$. Положим $u=|x-y|$. Тогда

$$|f(x)-f(y)| \le \omega(f;|x-y|) \le \Delta^{(\omega)}(f)\omega(|x-y|).$$

Отсюда $|f|_\omega \le \Delta^{(\omega)}(f)$, т.е. $f \in \bar{H}_\omega := \bar{H}_\omega(a,b)$, $\left(f \in \bar{H}_\omega\text{, если } |f|_\omega < \infty\right)$

Пусть теперь $f \in \overline{H}_\omega$. Тогда при любых $x, y \in [a,b]$

$$|f(x)-f(y)| \le |f|_\omega \, \omega(|x-y|), \quad |f|_\omega < \infty.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\sup_{\substack{|x-y|\le u \\ a\le x,y\le b}} |f(x)-f(y)| \le |f|_\omega \, \omega(u),$$

$$\frac{\omega(f;u)}{\omega(u)} \le |f|_\omega.$$

Поэтому, $\Delta^{(\omega)}(f) \le |f|_\omega$. Значит, в силу (4.2) $\Delta^{(\omega)}(f) = |f|_\omega$.

Введем в H_ω норму

$$\|f\|_\omega = \|f\|_{H_\omega} := \|f\|_{C(a,b)} + |f|_\omega. \tag{4.3}$$

Предложение 1.4.1. *H_ω является B-пространством (банаховым пространством) относительно нормы (4.3).*

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}$, элементы которой принадлежат H_ω, является фундаментальной в H_ω, т.е.

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{\|w_{n,m}(t)\|_{(a,b)} + \sup_{a\le t_1,t_2\le b}\frac{|w_{n,m}(t_1)-w_{n,m}(t_2)|}{\omega(|t_1-t_2|)}\right\} = 0,$$

где $w_{n,m}(t) = f_n(t) - f_m(t)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n,m > N(\varepsilon)$

$$\|w_{n,m}(t)\|_{C(a,b)} + \sup_{a\le t_1,t_2\le b}\frac{|w_{n,m}(t_1)-w_{n,m}(t_2)|}{\omega(|t_1-t_2|)} < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что данная последовательность является фундаментальной в метрике пространства $C(a,b)$. Поэтому, в силу полноты пространства $C(a,b)$ существует непрерывная функция f_0 такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f_n - f_0\right\| = 0. \tag{4.5}$$

Из (4.4) вытекает, что при $n,m > N(\varepsilon)$

$$\left|w_{n,m}(t_1) - w_{n,m}(t_2)\right| < \varepsilon\omega\left(\left|t_1 - t_2\right|\right) \tag{4.6}$$

для любых $t_1, t_2 \in [a,b]$. Переходя к пределу в (4.6) при $m \to \infty$, с учетом (4.5) получим, что

$$\left|f_n(t_1) - f_0(t_1) - f_n(t_2) + f_0(t_2)\right| \le \varepsilon\omega\left(\left|t_1 - t_2\right|\right).$$

Отсюда следует, что $f_0 \in H_\omega$ и

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{a\le t_1,t_2\le b}\frac{\left|f_n(t_1) - f_0(t_1) - f_n(t_2) + f_0(t_2)\right|}{\omega\left(\left|t_1 - t_2\right|\right)} = 0. \tag{4.7}$$

Из (4.5) и (4.7) находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left\|v_n(t)\right\|_{C(a,b)} + \sup_{a\le t_1,t_2\le b}\frac{\left|v_n(t_1) - v_n(t_2)\right|}{\omega\left(\left|t_1 - t_2\right|\right)}\right\} = 0,$$

где $v_n(t) = f_n(t) - f_0(t)$.

Это и означает полноту пространства H_ω.

В частности, если $\omega(u) = u^\alpha\ (0 < \alpha \le 1)$, то H_ω представляет собой пространство Гёльдера $H_\alpha = H_\alpha(a,b)$ с показателем Гёльдера α и нормой

$$\left\|f\right\|_\alpha = \left\|f\right\|_C + \sup_{\substack{a\le x,y\le b\\ x\ne y}}\frac{\left|f(x) - f(y)\right|}{\left|x - y\right|^\alpha}. \tag{4.8}$$

Заметим, что пространство H_1 вложено в H_ω при любом $\omega \in \Phi$, т.е. $\left\|f\right\|_\omega \le C\left\|f\right\|_\alpha$, при $\alpha = 1$.

В дальнейшем пространство H_ω мы будем называть *обобщенным гёльдеровым пространством*.

Если характеристика пространства H_ω удовлетворяет условиям определения 1.2.1, то, в силу теоремы 1.2.1, существует функция ω, слабо эквивалентная φ и удовлетворяющая условиям определения 1.2.2. Поэтому пространства H_φ и H_ω совпадают и их нормы эквивалентны, т.е. существуют положительные постоянные m и M такие, что

$$m \le \frac{\|f\|_\varphi}{\|\varphi\|_\omega} \le M$$

$\forall f \in H_\varphi = H_\omega$.

В самом деле, если $\varphi(u) \asymp \omega(u)$, то

$$0 < m_1 = \inf_{u>0} \frac{\omega(u)}{\varphi(u)}, \quad M_1 = \sup_{u>0} \frac{\omega(u)}{\varphi(u)} < \infty.$$

Стало быть, при $f \in H_\varphi$ имеем

$$\Delta^{(\varphi)}(f) = \sup_{u>0} \frac{\omega(f;u)}{\varphi(u)} = \sup_{u>0} \frac{\omega(f;u)}{\varphi(u)} \cdot \frac{\omega(u)}{\varphi(u)} \ge m_1 \Delta^{(\omega)}(f).$$

Аналогично, $\Delta^{(\varphi)}(f) \le M_1 \Delta^{(\omega)}(f)$. Значит,

$$m\|f\|_\omega \le \|f\|_\varphi \le M\|f\|_\omega,$$

где $m = \min\{1, m_1\}$, $M = \max\{1, M_1\}$.

В дальнейшем в этом параграфе, если в качестве характеристик обобщенного пространства Гёльдера мы будем брать функции из множества Φ, удовлетворяющие определению 1.2.1, то их мы будем обозначать φ, φ_1, φ_2 и т.д., если же они удовлетворяют условиям определения 1.2.2, – через ω, ω_1, ω_2 и т.д.

Теорема 1.4.1. *Пространства* H_ω *и* H_{ω_1} *совпадают тогда и только тогда, когда* $\omega(u) \asymp \omega_1(u)$.

Доказательство. Достаточность уже была доказана.

Необходимость. Пусть $H_\omega \equiv H_{\omega_1}$ и $\omega(u)$ не эквивалентна $\omega_1(u)$. Тогда существует хотя бы одна последовательность $\{u_n\}$, стремящаяся к нулю, для которой справедливо одно из двух условий:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\omega(u_n)}{\omega_1(u_n)}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\omega(u_n)}{\omega_1(u_n)}=\infty$.

В случае а) функция $\omega_1(x-a)\in H_{\omega_1}$, но не принадлежит H_ω. Действительно, если бы $\omega_1(x-a)\in H_\omega$, то было бы $\Delta^{(\omega)}(\omega_1)<\infty$. Тогда $\omega_1(x-a)\le\Delta^{(\omega)}(\omega_1)\omega(x-a)$ при любом $x\in[a,b]$. В частности, последнее неравенство выполняется и при $x-a\le u_n\le b-a$, т.е.

$$\omega_1(u_n)\le\Delta^{(\omega)}(\omega_1)\omega(u_n).$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega(u_n)}{\omega_1(u_n)}\ge\frac{1}{\Delta^{(\omega)}(\omega_1)}>0.$$

Это противоречит условию а). Аналогично доказывается невозможность случая б).

Рассмотрим вопрос о классификации обобщенных пространств Гёльдера.

Пусть даны два пространства H_ω и H_{ω_1}. Предположим, что характеристики этих пространств не слабо эквивалентны. Тогда возможны следующие случаи:

а) $m=\operatorname{Inf}\limits_{u>0}\dfrac{\omega(u)}{\omega_1(u)}>0$, $M=\sup\limits_{u>0}\dfrac{\omega(u)}{\omega_1(u)}=\infty$;

б) $m=0$, $M<\infty$;

в) $m=0$, $M=\infty$.

В случае а) $\omega_1(u)\le\dfrac{\omega(u)}{m}$ при всех $u\in(0,h_0]$. Поэтому для любой $f\in H_{\omega_1}$

$$\Delta^{(\omega)}(f)=\sup_{0<u\le b-a}\frac{\omega(f;u)}{\omega(u)}\le\frac{1}{m}\sup_{0<u\le b-a}\frac{\omega(f;u)}{\omega_1(u)}=\frac{1}{m}\Delta^{(\omega_1)}(f).$$

Отсюда вытекает, что H_{ω_1} вложено H_ω, т.е.

$$\|f\|_{\omega} \le C_1 \|f\|_{\omega_1}, \quad C_1 = \max\left\{1, \frac{1}{m}\right\}.$$

В случае б) пространство H_{ω} будет вложено в H_{ω_1}. И наконец, в случае в) H_{ω} и H_{ω_1} не будут вложены друг в друга, т.е. существуют функции, принадлежащие H_{ω}, но не принадлежащие H_{ω_1}, и наоборот. Примерами таких функций могут служить $\omega(x-a)$ и $\omega_1(x-a)$, которые принадлежат соответственно пространствам H_{ω_1} и H_{ω} и не принадлежат соответственно пространствам H_{ω_1} и H_{ω}. В этом случае эти пространства имеют общую часть, причем их пересечение является правильным подмножеством пространств H_{ω} и H_{ω_1}.

Отметим, что $H_1 \subset H_{\omega} \cap H_{\omega_1}$ ([2], [28], [42]).

§1.5. О критериях компактности

Пусть на плоскости XOY дан квадрат $Q:\{a \le x \le b,\ a \le y \le b\}$. Обозначим через S_1 множество тех точек $(x,y) \in Q$, для которых $y > x$, а через S_2 – для которых $y < x$. Ясно, что S_1 есть верхний треугольник квадрата Q, а S_2 – нижний.

Теорема 1.5.1. *Для того чтобы множество $K \subset H_{\omega}$ было компактным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) существует постоянное число $r > 0$ такое,

$$\|f\|_{\omega} \le r$$

для любой $f \in K$;

б) для любого замкнутого множества S, содержащегося в S_1 или в S_2, и $\forall\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon,S)>0$ такое, что при любых $(x_1,y_1)\in S$, $(x_2,y_2)\in S$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_1-x_2|<\delta,\quad |y_1-y_2|<\delta, \tag{5.1}$$

выполняется соотношение

$$\left|\frac{f(x_1)-f(y_1)}{\omega(|x_1-y_1|)}-\frac{f(x_2)-f(y_2)}{\omega(|x_2-y_2|)}\right|<\varepsilon \tag{5.2}$$

для любой $f\in K$.

Доказательство. Необходимость. Пусть K компактно. Тогда по известной теореме оно ограничено в H_ω. В силу также известной теоремы Хаусдорфа для K существует $\varepsilon/3$ – сеть. Пусть эта сеть состоит из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$.

Пусть теперь S есть любое замкнутое множество из S_1 или из S_2. Тогда для $\varepsilon/3>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon,S)$ такое, что при

$$|x_1-x_2|<\delta,\quad |y_1-y_2|<\delta \tag{5.3}$$

выполняется неравенство

$$\left|\frac{f_i(x_1)-f_i(y_1)}{\omega(|x_1-y_1|)}-\frac{f_i(x_2)-f_i(y_2)}{\omega(|x_2-y_2|)}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad i=1,\dots,n. \tag{5.4}$$

$$\left|\frac{f_i(x_1)-f_i(y_1)}{\omega(|x_1-y_1|)}-\frac{f_i(x_2)-f_i(y_2)}{\omega(|x_2-y_2|)}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad i=1,\dots,n.$$

Пусть $f(x)$ – любая функция из K. Так как функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ образуют $\varepsilon/3$– сеть, то для $f(x)$ найдется $f_j(x)$ такая, что

$$\|f-f_j\|_\omega<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.5}$$

Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$, удовлетворяющие условию (5.3). Тогда из (5.4) и (5.5) имеем

$$\left| \frac{f(x_1) - f(y_1)}{\omega(|x_1 - y_1|)} - \frac{f(x_2) - f(y_2)}{\omega(|x_2 - y_2|)} \right| \le$$

$$\frac{\left| [f(x_1) - f_i(x_1)] - [f(y_1) - f_i(y_1)] \right|}{\omega(|x_1 - y_1|)} +$$

$$\frac{\left| [f(y_2) - f_i(y_2)] - [f(x_2) - f_i(x_2)] \right|}{\omega(|x_2 - y_2|)} +$$

$$\left| \frac{f_i(x_1) - f_i(y_1)}{\omega(|x_1 - y_1|)} - \frac{f_i(x_2) - f_i(y_2)}{\omega(|x_2 - y_2|)} \right| < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть для множества $K \subset H_\omega$ выполнены условия а) и б) теоремы (1.5.1) и $\{f_n\}$ – произвольная последовательность из K. Тогда имеем

$$\|f_n\|_{C(a,b)} \le r, \ \Delta^{(\omega)}(f_n) \le r, \ n \in \mathbb{N}. \qquad (5.6)$$

Из (5.6), в силу теоремы Арцела, следует компактность последовательности $\{f_n\}$ в $C(a,b)$. Не умаляя общности, будем считать, что $\{f_n\}$ сходится в метрике $C(a,b)$.

Пусть $\{(x_i, y_i) : x_i \ne y_i\}$ – счётное плотное множество точек квадрата Q. Тогда в силу (5.6)

$$\sup_i \left\{ \frac{|f_n(x_i) - f_n(y_i)|}{\omega(|x_i - y_i|)} \right\} \le r.$$

Из этого неравенства при помощи диагонального процесса Кантора можно выбрать такую последовательность $\{f_{n_k}\}$, что последовательность

$$\left\{\frac{\left|f_{n_k}(x_i)-f_{n_k}(y_i)\right|}{\omega\left(\left|x_i-y_i\right|\right)}\right\}$$

сходится для каждой точки (x_i, y_i).

Далее, в силу плотности множества $\{(x_i, y_i)\}$ в Q и условия б) (см. (5.2)), для любой $(x, y)\in Q$ $(x\neq y)$ имеем

$$\left|\frac{f_{n_k}(x_i)-f_{n_k}(y_i)}{\omega(|x-y|)}-\frac{f_{n_m}(x_i)-f_{n_m}(y_i)}{\omega(|x-y|)}\right|\leq$$

$$\left|\frac{f_{n_k}(x)-f_{n_k}(y)}{\omega(|x-y|)}-\frac{f_{n_k}(x_i)-f_{n_k}(y_i)}{\omega(|x_i-y_i|)}\right|+$$

$$\left|\frac{f_{n_k}(x_i)-f_{n_k}(y_i)}{\omega(|x_i-y_i|)}-\frac{f_{n_m}(x_i)-f_{n_m}(y_i)}{\omega(|x_i-y_i|)}\right|+$$

$$\left|\frac{f_{n_m}(x_i)-f_{n_m}(y_i)}{\omega(|x_i-y_i|)}-\frac{f_{n_m}(x_i)-f_{n_m}(y_i)}{\omega(|x_i-y_i|)}\right|\leq$$

$$2\varepsilon+\left|\frac{f_{n_k}(x_i)-f_{n_k}(y_i)}{\omega(|x_i-y_i|)}-\frac{f_{n_m}(x_i)-f_{n_m}(y_i)}{\omega(|x_i-y_i|)}\right|.$$

Следовательно,

$$\lim_{m,k\to\infty}\sup_{\substack{(x,y)\in Q\\ x\neq y}}\left|\frac{f_{n_k}(x)-f_{n_k}(y)}{\omega(|x-y|)}-\frac{f_{n_m}(x)-f_{n_m}(y)}{\omega(|x-y|)}\right|=0,$$

Значит,

$$\lim_{k,m\to\infty}\left\|f_{n_m}-f_{n_k}\right\|_{\omega}=0.$$

Из полноты пространства H_{ω} следует, что последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится, что и требовалось доказать.

Определение 1.5.1. *Скажем, что функция* $f\in H_{\omega,0}$, *если*

$$f \in H_\omega \quad \text{и} \quad \lim_{n\to 0}\frac{\omega(f;u)}{\omega(u)} = 0. \tag{5.7}$$

Введем в $H_{\omega,0}$ норму $\|f\|_{\omega,0} = \|f\|_\omega$. Покажем, что пространство $H_{\omega,0}$ является подпространством пространства H_ω.

В самом деле, пусть f_1 и $f_2 \in H_{\omega,0}$. Тогда для любых λ_1 и λ_2 имеем

$$\omega[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2; u] \le |\lambda_1|(f_1;u) + |\lambda_2|(f_2;u).$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in H_{\omega,0}$, т.е. линейность $H_{\omega,0}$. Покажем замкнутость $H_{\omega,0}$. Пусть f_0 – предельная точка $H_{\omega,0}$. Тогда существует последовательность $\{f_n\}$ из $H_{\omega,0}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_0\|_\omega = 0, \tag{5.8}$$

причем $f_0 \in H_\omega$. Пусть $\varepsilon > 0$ – любое. Из (5.8) следует существование натурального числа $N(\varepsilon)$ такого, что

$$\Delta^{(\omega)}(f_N - f_0) < \varepsilon. \tag{5.9}$$

Так как $f_N \in H_{\omega,0}$, то $\dfrac{\omega(f_N;u)}{\omega(u)} < \varepsilon$ при $0 < u \le \delta(\varepsilon, N)$. Следовательно, при $0 < u \le \delta(\varepsilon, N)$, с учётом (5.9) имеем

$$\frac{\omega(f_0;u)}{\omega(u)} \le \frac{\omega(f_0 - f_N;u)}{\omega(u)} + \frac{\omega(f_N;u)}{\omega(u)} \le$$

$$\Delta^{(\omega)}(f_0 - f_N) + \frac{\omega(f_N;u)}{\omega(u)} < 2\varepsilon,$$

т.е. для f_0 выполняется условия (5.7), $f_0 \in H_{\omega,0}$.

Пространство $H_{\omega,0}$ также является банаховым.

Теорема 1.5.2. *Для того чтобы множество* $K \subset H_{\omega,0}$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы*

а) множество K *было ограниченным;*

б) при произвольном $\varepsilon > 0$ *для любой* $f \in K$ *существовало* $\eta(\varepsilon) > 0$ *такое, что при* $|x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon)$ *выполнялось неравенство*

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{\omega(|x_1 - x_2|)} < \varepsilon. \tag{5.10}$$

Доказательство. Поскольку в $H_{\omega,0}$ и H_ω введена одна и та же норма, то для доказательства достаточности условий теоремы 1.5.2 покажем выполнимость условий теоремы 1.5.1 для множества $K \subset H_{\omega,0}$.

Ясно, что условия а) в формулировке теоремы 1.5.2 и 1.5.1 совпадают. Осталось показать, что при выполнении условия б) теоремы 1.5.2 выполняется условие б) теоремы 1.5.1.

В самом деле, пусть S – любое замкнутое множество, содержащееся либо в S_1, либо в S_2, и $\varepsilon > 0$ – любое. Тогда, в силу условия б) теоремы 1.5.2, для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ при $|x_1 - y_1| < \eta(\varepsilon)$, $|x_2 - y_2| < \eta(\varepsilon)$ имеем

$$\frac{f(x_1) - f(y_1)}{\omega(|x_1 - y_1|)} < \varepsilon, \quad \frac{f(x_2) - f(y_2)}{\omega(|x_2 - y_2|)} < \varepsilon$$

для любой $f \in K \subset H_{\omega,0}$. Поэтому

$$\left| \frac{f(x_1) - f(y_1)}{\omega(|x_1 - y_1|)} - \frac{f(x_2) - f(y_2)}{\omega(|x_2 - y_2|)} \right| < 2\varepsilon,$$

т.е. условие б) теоремы 1.5.1 выполняется, что и требовалось доказать. Необходимость условий а) и б) доказывается аналогично теореме 1.5.1.

Отметим, что теорема 1.5.1 в пространстве $H_\alpha^n(0,1)$ (т.е. в банаховом пространстве функций определенных на $[0,1]$ и имеющих непрерывные производные до порядка n и n-е производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α) с нормой

$$\|f\|_{H_\alpha^n(0,1)} = \|f\|_{C(0,1)} + \sum_{k=1}^{n} \left\|f^{(k)}\right\|_{C(0,1)} + \sup_{\substack{0\le x,y\le 1\\ x\ne y}} \frac{\left|f^{(n)}(x)-f^{(n)}(y)\right|}{|x-y|^{\alpha}}$$

была доказана С.Р. Фирштейном в работе [60].

Для дальнейшего заметим, что условие б) теоремы 1.5.2 эквивалентно условию:

б') $\lim\limits_{u\to 0}\sup\limits_{f\in K}\dfrac{\omega(f,u)}{\omega(u)} = 0.$

Теорема 1.5.3. *Если последовательность* $\{f_n\}$ *сходится в* f_0 *в метрике пространства* $C(a,b)$ *и удовлетворяет условию*

$$\lim_{u\to 0}\sup_{n}\frac{\omega(f,u)}{\omega(u)} = 0, \tag{5.11}$$

то она сходится к f_0 *и в метрике* H_ω.

Доказательство. Из условий теоремы следует ограниченность данной последовательности в пространстве $H_{\omega,0}$. Покажем, что

$$\lim_{u\to 0}\sup_{0<u\le b_0=b-a}\frac{\omega(f_n-f_0;u)}{\omega(u)} = 0. \tag{5.12}$$

Так как $f_0\in H_{\omega,0}$, то для $\varepsilon>0$ существует $\delta_1(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\frac{\omega(f_0;u)}{\omega(u)} < \varepsilon, \tag{5.13}$$

как только $0<u\le\delta_1(\varepsilon)$. На основании (5.11) для любой $f_n(x)$ существует $\delta_2(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\frac{\omega(f_n;u)}{\omega(u)} < \varepsilon \tag{5.14}$$

при $0<u\le\delta_2(\varepsilon)$.

Из (5.13) и (5.14) при $0 < u \le \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ имеем

$$\frac{\omega(f_n - f_0; u)}{\omega(u)} \le 2\varepsilon.$$

Допустив теперь, что $\delta_2(\varepsilon) \le u \le h_0$, получим

$$\frac{\omega(f_n - f_0; u)}{\omega(u)} \le \frac{2\|f_n - f_0\|_{C(a,b)}}{\omega(\delta(\varepsilon))} < 2\varepsilon \text{ при } n > N\varepsilon.$$

Итак, установлено, что

$$\frac{\omega(f_n - f_0; u)}{\omega(u)} < \begin{cases} 2\varepsilon, & \text{если } 0 < u < \delta(\varepsilon) \\ 2\varepsilon, & \text{если } \delta(\varepsilon) \le u \le h_0 \text{ и } n > N(\varepsilon), \end{cases}$$

Отсюда следует (5.12).

Следствие 1.5.1. *Если $f \in H_{\omega,0}$, то последовательность*

$$f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt \quad \left(\text{при } x \ge b \quad f(x) = f(b)\right) \tag{5.15}$$

сходится к f в смысле метрики H_ω.

Доказательство. Покажем, что последовательность (5.15) сходится к f в смысле метрики $C(a,b)$ и удовлетворяет условию (5.11) теоремы 1.5.3. Имеем

$$|f_n(x) - f(x)| \le n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(t) - f(x)|\,dt \le n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \omega(f; t-x)\,dt \le$$

$$n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \omega\left(f; \frac{1}{n}\right) dt \le \Delta^{(\omega)}(f)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

Из этого следствия, в частности, следует, что пространство H_1 вложено в $H_{\omega,0}$ плотно, т.е. для любой $f \in H_{\omega,0}$ существует последовательность $\{f_n\}$ из H_1 сходящаяся к f смысле метрики $H_{\omega,0}$.

Действительно, если $f \in H_{\omega,0}$, то в силу следствия, последовательность (5.15) сходится к f в смысле $H_{\omega,0}$, а так как

$$f_n'(x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n} \quad (n \in N)$$

– непрерывные функции, то $\{f_n\} \subset H_1$.

Можно доказать, что вложение $H_{\omega,0}$ в H_ω не является плотным, ни компактным.

Рассмотрим вопрос о компактных вложениях в обобщенных пространствах Гёльдера.

Говорят, что B-пространство X_1 компактно вложено в B-пространство X_2, если

1) X_1 вложено в X_2

2) каждое ограниченное множество в смысле нормы X_1 $\left(\|f\|_{X_1} \le r\right)$ является компактным в смысле нормы X_2.

Пусть дана функция $f \in C(a,b)$.

Предложение 1.5.1. *Если* $f \in H_\omega$ *на* $[a, x_0]$ *и на* $[x_0, b]$, *то она принадлежит* H_ω *на* $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $a < x_0 < b$ и $x_1, x_2 \in [a, x_0]$. Тогда условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le C(f)\,\omega(|x_1 - x_2|), \tag{5.16}$$

где

$$C(f)=\sup_{a\le x_1,x_2\le x_0}\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{\omega(|x_1-x_2|)}<\infty$$

Аналогично, если $x_1,x_2\in[x_0,b]$. Тогда условию

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le C_1(f)\,\omega(|x_1-x_2|), \qquad (5.17)$$

где

$$C_1(f)=\sup_{x_0\le x_1,x_2\le b}\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{\omega(|x_1-x_2|)}<\infty.$$

Пусть теперь x_1 и x_2 находятся по разные стороны от x_0, т.е. $a\le x_1<x_0<x_2\le b$. Тогда, в силу непрерывности $f(x)$ и условий (5.16), (5.17), получаем

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_2)|\le$$
$$C_1(f)\,\omega(x_0-x_1)+C_2(f)\,\omega(x_2-x_0)\le$$
$$2\big(C_1(f)+C_2(f)\big)\omega(x_2-x_1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\Delta^{(\omega)}(f)\le C_1(f)+C_2(f)<\infty.$$

Теорема 1.5.4. *Для того чтобы пространство* H_ω *было вложено в* H_{ω_1} *компактно, необходимо и достаточно, чтобы характеристические функции этих пространств удовлетворяли условию*

$$\lim_{u\to 0}\frac{\omega(u)}{\omega_1(u)}=0. \qquad (5.18)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (5.18).Тогда

$$\sup_{u>0}\frac{\omega(u)}{\omega_1(u)}=M<\infty. \qquad (5.19)$$

Следовательно, $H_\omega\subset H_{\omega_1}$ и

$$\|f\|_{\omega_1} \le r_1 \|f\|_{\omega}, \quad r_1 = \max\{1, M\}. \tag{5.20}$$

Пусть K – любое ограниченное множество из H_ω, т.е. при любой $f \in K$

$$\|f\|_{\omega} \le r < \infty. \tag{5.21}$$

Покажем, что это множество удовлетворяет условиям а) и б) теоремы 1.5.2.

Заметим, что

$$\frac{\omega(f;u)}{\omega_1(u)} = \frac{\omega(f;u)}{\omega(u)} \cdot \frac{\omega(u)}{\omega_1(u)}. \tag{5.22}$$

С учётом (5.21) и (5.22) для функции из множества K получим, что

$$\frac{\omega(f;u)}{\omega_1(u)} \le r \frac{\omega(u)}{\omega_1(u)}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{f \in K} \frac{\omega(f;u)}{\omega_1(u)} \le r \frac{\omega(u)}{\omega_1(u)}. \tag{5.23}$$

Из (5.23), (5.20) и (5.21) с учетом (5.18) для функций из K имеем

а) $\sup\limits_{f \in K} \|f\|_{H,\omega_1} \le r r_1$;

б) $\lim\limits_{u \to 0} \sup\limits_{f \in K} \dfrac{\omega(f;u)}{\omega_1(u)} = 0.$

Следовательно, H_ω вложено в H_{ω_1} компактно.

Необходимость (от противного). Пусть H_ω вложено в H_{ω_1} компактно и условие (5.18) нарушается. Тогда существует хотя бы одна последовательность $u_n \to 0$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\omega(u_n)}{\omega_1(u_n)} > 0. \tag{5.24}$$

Не умаляя общности, будем считать, что $u_n \ge u_{n+1}$.

Рассмотрим последовательность

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & a\le x\le a+u_n,\\ \omega(x-a-u_n), & a+u_n\le x\le b.\end{cases}$$

Так как $f_n(x)$ на $[a,a+u_n]$ и $[a+u_n,b]$ принадлежит H_ω, то она принадлежит H_ω и на $[a,b]$ причём

$$\sup_{a\le x_1,x_2\le b}\frac{|f_n(x_1)-f_n(x_2)|}{\omega(|x_1-x_2|)}=1\quad (n\in\mathbb{N}).$$

Поэтому,

$$\|f_n\|_\omega\le\omega(b-a)+1,$$

т.е. последовательность ограничена в H_ω. Тогда по нашему предположению она компактна в H_{ω_1}.

Докажем, что она сходится в $C(a,b)$ к $\omega(x-a)$. Действительно, так как

$$0\le\omega(x-a)-f_n(x)=\begin{cases}\omega(x-a), & a\le x\le a+u_n\\ \omega(x-a)-\omega(x-a-u_n), & a+u_n\le x\le b,\end{cases}$$

то $0\le\omega(x-a)-f_n(x)\le\omega(u_n)$ при любом $x\in[a,b]$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-\omega(x-a)\|_{C(a,b)}=0.$$

Таким образом, для последовательности $\{f_n\}$ выполняются все условия теоремы 1.5.3. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-\omega(x-a)\|_{\omega_1}=0.$$

С другой стороны, если обозначить $\omega_n(x)=f_n(x)-\omega(x-a)$, находим

$$\Delta^{(\omega_1)}(f_n-\omega)=\sup_{a\le x_1,x_2\le b}\frac{|\omega_n(x_1)-\omega_n(x_2)|}{\omega_1(|x_1-x_2|)}\ge$$

$$\frac{\left|\omega_n\left(a+u_n\right)-\omega_n\left(a\right)\right|}{\omega_1\left(u\right)}=\frac{\left|f_n\left(a+u_n\right)-\omega\left(u_n\right)-f_n\left(u\right)\right|}{\omega_1\left(u\right)}=\frac{\omega\left(u_n\right)}{\omega_1\left(u_n\right)}.$$

В силу (5.24)

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f_n-\omega\left(x-a\right)\right\|_{\omega_1}>0,$$

что невозможно.

Из теоремы 1.5.4 следует, что пространство H_ω не является конечномерным.

В самом деле, если это не так, то подпространство H_ω было бы компактно вложено в H_ω. Тогда, в силу теоремы 1.5.4, должно выполнятся соотношение

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\omega\left(u\right)}{\omega\left(u\right)}=0,$$

которое, очевидно, неверно.

В заключении этого параграфа отметим, что теоремы, связанные с теоремами вложения и продолжения устанавливались в работах С.Л. Соболева, С.М. Никольского, В.П. Ильина, О.В. Бесова и многих других. Более подробный обзор литературы можно найти в [10].

§1.6. Обобщенные и модифицированные L_p – гёльдеровы пространства

Пусть $\mathbb{R}=\left(-\infty,\infty\right)$, $L_p\left(\mathbb{R}\right)$ – пространство всех действительнозначных функций, интегрируемых по Лебегу в p-й степени на всей действительной оси $\mathbb{R}$ с нормой

$$\left\|f\right\|_p=\left\|f\right\|_{L_p(\mathbb{R})}:=\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x\right)\right|^p dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty,$$

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad p = \infty,$$

При этом пространство $L_\infty(\mathbb{R})$ отождествляем с пространством $C(\mathbb{R})$ – равномерно непрерывных и ограниченных функций на всей действительной оси $\mathbb{R}$.

Обозначим через $\omega(f;u)_p$ модуль непрерывности функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, т.е.

$$\omega(f;u)_p := \sup_{0<h\le u} \|\Delta_h(f)\|_p, \quad u > 0.$$

где

$$\Delta_h(f;x) := f(x+h) - f(x).$$

Обозначим через $H_{\omega,p} = H_{\omega,p}(\mathbb{R})$ множество функций $f \in L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p \le \infty)$ удовлетворяющих условию

$$|f|_{\omega,p} := \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h(f)\|_p}{\omega(h)} < \infty, \tag{6.1}$$

где $\omega(u)$ – неубывающая и положительная при $u > 0$ функция. Введем в $H_{\omega,p}$ норму

$$\|f\|_{\omega,p} = \|f\|_{H_{\omega,p}} :=$$

$$\begin{cases} \|f\|_p + |f|_{\omega,p}, & p \ge 1, \\ \|f\|_{C(\mathbb{R})} + \sup\limits_{\substack{-\infty\le x,y\le\infty \\ x\ne y}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)}, & p = \infty. \end{cases} \tag{6.2}$$

Предложение 1.6.1. $H_{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *является* B*-пространством относительно нормы (6.2).*

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству предложения 1.4.1. величину (6.1) в определении (6.2) можно заменить на

$$\overline{\Delta}_p^{(\omega)}(f) := \sup_{\substack{-\infty\le x,y\le\infty\\ x\ne y}} \frac{\|f(\cdot+x)-f(\cdot+y)\|_p}{\omega(|x-y|)}. \qquad (6.1')$$

Положим, в частности, $\omega(u)=u^{\alpha}$, $0\le\alpha\le 1$, $u\ge 0$. Тогда

$$H_{\alpha,p} := \left\{ f\in L_p(\mathbb{R}) : \omega(f;u)_p \le Cu^{\alpha}, C=C(f):=const \right\},$$

с гёльдеровой нормой

$$\|f\|_{\beta,p} := \|f\|_p + \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h(f)\|_p}{h^{\alpha}}, \qquad (6.3)$$

при этом $H_{\alpha,p}\subset H_{\beta,p}$, $0\le\beta<\alpha\le 1$.

Обобщенное гёльдерово пространство также можно определить при помощи n-й симметричной разности $\dot{\Delta}_h^u(f;x)$ (см. (3.1')). Пусть $f\in L_p(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$, $n\in N$

$$|f|_{\omega,p,n} := \sup_{h>0} \frac{\|\dot{\Delta}_h^n f\|_p}{\omega(h)},$$

$$H_{\omega,p,n} = H_{\omega,p,n}(\mathbb{R}) := \left\{ f\in L_p(\mathbb{R}) : |f|_{\omega,p,n} < \infty \right\}.$$

$H_{\omega,p,n}$ является B-пространством относительно обобщенной гёльдеровой нормы

$$\|f\|_{\omega,p,n} := \|f\|_p + |f|_{\omega,p,n} \qquad (6.4)$$

с полунормой $|f|_{\omega,p,u}$ в $H_{\omega,p,n}$.

Если положим $\tilde{\omega}(h)=\min\{\omega(h),1\}$, тогда $H_{\tilde{\omega},p,n}\equiv H_{\omega,p,n}$. Важное значение имеет, как быстро величина $\omega(h)$ стремится к нулю при $h\to 0$. Если $\lim\limits_{h\to 0}\omega(h)\ne 0$, то $H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})\equiv L_p(\mathbb{R})$, и если существует последовательность $\{h_i\}$ такая, что $\lim h_i=0$ и $\lim h_i^{-n}\omega(h_i)=0$, тогда включение

$f \in H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})$ влечет $f(x)=0$, $1 \le p < \infty$ и $f = const$ при $p=\infty$. Это следует из работы [12].

Важным примером модифицированных гёльдеровых пространств $H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})$ являются пространства Гёльдера с $\omega(h)=h^{\alpha}$, $0<\alpha\le n$ (при $n=1$ см. (6.1'), (6.3)).

Далее, в силу того, что для любой функции $f \in H_{\omega,p,m}$

$$|f|_{\omega,p,n} \le 2^{n-m}|f|_{\omega,p,m}, \quad m<n,$$

находим, что

$$\|f\|_{\omega,p,n} \le 2^{n-m}\|f\|_{\omega,p,m}$$

и, значит,

$$H_{\omega,p,m}(\mathbb{R}) \subset H_{\omega,p,n}(\mathbb{R}).$$

При определенных условиях на характеристическую функцию $\omega(u)$ эти полунормы, а следовательно, нормы $\|\cdot\|_{\omega,p,m}$ и $\|\cdot\|_{\omega,p,n}$ могут быть эквивалентны (см. (6.4)).

Предложение 1.6.2 ([14]). *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$. *Пусть также* $\omega_1(u)$ *и* $\omega_2(u)$ *положительные неубывающие при* $u>0$ *функции такие, что*

$$\sup_{h>0}\frac{h^m}{\omega_2(h)}\int_h^{\infty}\frac{\omega_1(u)}{u^{m+1}}du<\infty.$$

Тогда существует положительная постоянная C *такая, что для любой функции* $f\in H_{\omega_1,p,n}(\mathbb{R})$ *справедливо неравенство*

$$|f|_{\omega_2,p,m} \le C|f|_{\omega_1,p,n}.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$|f|_{\omega,p,n} = \sup_{h>0}\frac{\omega_n(f;h)_p}{\omega(h)}$$

для каждой функции $f \in H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})$, и положительной неубывающей функции $\omega(u)$, где

$$\omega_n(f;u)_p := \sup_{0<h\le u} \left\| \dot{\Delta}_h^n f \right\|_p$$

– модуль гладкости порядка n, $n \in \mathbb{N}$, функции f.

При помощи неравенства Маршо [34], для любой функции $f \in H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})$ и $h > 0$

$$\omega_m(f,h) \le Ch^m \int_h^\infty \frac{\omega_n(f;u)_p}{u^{m+1}} du \le$$

$$Ch^m |f|_{\omega_1,p,n} \int_h^\infty \frac{\omega_1(u)}{u^{m+1}} du,$$

где C – положительная константа, зависящая от n, но независящая от f. Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

Следствие 1.6.1. *Пусть* $m,n \in \mathbb{N}$, $m < n$. *Если* $\omega(u)$ *является положительной и неубывающей функцией при* $u > 0$ *такой, что*

$$\sup_{h>0} \frac{h^m}{\omega(h)} \int_h^\infty \frac{\omega(u)}{u^{m+1}} du < \infty,$$

то $H_{\omega,p,m}(\mathbb{R}) \equiv H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})$ *и нормы этих пространств эквивалентны. В частности, если* $\omega(h) = h^\alpha$, $0 < \alpha < m$, *то* $H_{p,n}^\omega(\mathbb{R}) \equiv H_{p,m}^\omega(\mathbb{R})$ *и нормы этих пространств эквивалентны для каждого* $n > m$.

Пусть $\omega_1(u)$ и $\omega_2(u)$ положительные неубывающие функции при $u > 0$ такие, что существуют постоянные $C > 0$ и $0 \le \gamma \le 1$ при которых

$$\omega_1^\gamma(u) \le C\omega_2(u).$$

Из этих неравенств следует включение $H_{\omega_1,p,n} \subset H_{\omega_2,p,n}$. Действительно, пусть $f \in H_{\omega_1,p,n}$. Тогда

$$\sup_{h>0} \frac{\left\|\Delta_h^n f\right\|_p}{\omega_2(h)} \le \sup_{h>h_0} \frac{\left\|\Delta_h^n f\right\|_p}{\omega_2(h)} + \sup_{0<h\le h_0} \frac{\left\|\Delta_h^n f\right\|_p}{\omega_2(h)} \le$$

$$\frac{2^n \left\|f\right\|_p}{\omega_2(h_0)} + \sup_{0<h\le h_0} \frac{\left\|\Delta_h^n f\right\|_p}{\omega_2(h)} \cdot \frac{\omega_1^{\gamma}(h) \cdot \omega_1^{1-\gamma}(h)}{\omega_1(h)} \le$$

$$K_1 + \sup_{0<h\le h_0} \frac{\left\|\Delta_h^n f\right\|_p}{\omega_1(h)} \cdot \frac{\omega^{\gamma}(h)}{\omega_2(h)} \cdot \omega_1^{1-\gamma}(h_0) \le$$

$$K_1 + K_2 = K_3 < \infty.$$

Отсюда получаем, что $f \in H_{\omega_2,p,n}$.

ГЛАВА 2
АППРОКСИМАЦИЯ И ГРУППЫ ОТКЛОНЕНИЙ РЯДОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫХ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В данной главе исследуются аппроксимационные свойства линейных средних, а также сильных средних методов суммирования рядов Фурье непрерывных функций в обобщенных гёльдеровых пространствах и их модификациях. Также приводится обзор некоторых известных в этом направлении результатов.

§2.1. Аппроксимация непрерывных функций и их сопряженных в гёльдеровых пространствах

Пусть $C = C(0, 2\pi)$ – пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\|_C := \sup_x |f(x)|,$$

$L_p = L_p(0, 2\pi)$, $1 \le p < \infty$, – пространство 2π-периодических и суммируемых на $(0, 2\pi)$ в p-й степени функций f, в котором норма определяется равенством

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

$L := L_1$, $M := L_\infty$ – пространство 2π-периодических и существенно ограниченных функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty} := ess \sup_x |f(x)|.$$

Если $1 < p < p' < \infty$, то справедливы включения

$$C \subset M \subset L_{p'} \subset L_p \subset L.$$

Пусть функция $f \in L$ и

$$S[f] := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f; x) \quad (1.1)$$

– её ряд Фурье, $a_k = a_k(f)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $b_k = b_k(f)$, $k = 1, 2, \ldots$, – её коэффициенты Фурье,

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$$

– частная сумма Фурье порядка n ряда (1.1). Ряд, сопряженный с рядом (1.1) определяется выражением

$$\tilde{S}[f] := \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin nx - b_n \cos nx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(f; x) \quad (1.2)$$

$$E_n(f)_X = \inf_{t_n} \left\| f(x) - t_n(x) \right\|_X, \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},$$

– наилучшее приближение $f \in X$ посредством тригонометрических полиномов порядка не выше n, где $X = C$ или $X = L_p$, $p \geq 1$.

Обозначим

$$H_\alpha := \left\{ f \in C : \left| f(x) - f(y) \right| \leq K \left| x - y \right|^\alpha, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

где $K = K(f)$ – положительная постоянная, множество функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α, $0 < \alpha \leq 1$. Как было показано в главе 1, H_α является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_\alpha := \|f\|_C + \sup_{-\infty < x, y < \infty} \Delta^\alpha f(x, y), \quad (1.3)$$

где

$$\Delta^\alpha f(x, y) := \frac{\left| f(x) - f(y) \right|}{\left| x - y \right|^\alpha}, \quad x \neq y,$$

в предположении, что $\Delta^\circ f(x, y) := 0$.

Метрика, введенная с помощью нормы (1.3) в пространстве H_α называется гёльдеровой метрикой. Легко видеть, что

$$\|f\|_\beta \le (2\pi)^{\alpha-\beta}\|f\|_\alpha, \quad 0 \le \beta < \alpha \le 1.$$

Следовательно, справедливы следующие включения

$$H_\alpha \subseteq H_\beta \subseteq C, \quad 0 \le \beta < \alpha \le 1.$$

Вопросы приближения функций классов H_α средними Чезаро их рядов Фурье исследовались впервые С.Н. Бернштейном [6:2], Г. Алексичем [1]. Аналогичные исследования в гёльдеровых пространствах впервые проводились З. Прёсдорфом (S. Prössdorf [43:1]). Им, в частности, установлено, что для любой функции $f \in H_\alpha$, $0 \le \beta < \alpha \le 1$, имеют место соотношения

$$\|f-\sigma_n(f)\|_\beta = \begin{cases} O\left(n^{\beta-\alpha}\right), & 0<\alpha<1, \\ O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{1-\beta}, & \alpha=1, \end{cases}$$

где

$$\sigma_n(f)=\sigma_n(f;x) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

В данной главе (см. следствие 2.2.8) показывается, что в случае $\alpha=1$, $\beta>0$, последнее соотношение может быть усилено в том смысле, что множитель $(\ln n)^{1-\beta}$ может быть отброшен (см., также, [26:1, 4, 5]). Впоследствии результаты З. Прёсдорфа получили свое развитие в работах [15], [16:2], [20], [35:1, 2], [47], [50:1, 3], [63:1, 2], [64:2] и др. В качестве приближающих агрегатов в указанных работах рассматривались экспоненциальные средние Бореля, Эйлера, (e,c) – средние, средние Карамата, средние Тейлора, средние Рисса, суммы Фурье и др.

Приведем определения некоторых из перечисленных выше методов суммирования рядов. Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

– произвольный функциональный ряд и $t=\{t_n\}$ – последовательность его частичных сумм. Экспоненциальные средние Бореля $B_p(t;x)$ последовательности $\{t_n\}$ определяются при помощи равенства

$$B_p(t;x) := e^{-p}\sum_{n=0}^{\infty} t_n(x)\frac{p^n}{n!},\ \ p>0. \tag{1.4}$$

Средние Эйлера определяются равенством

$$E_n^q(t;x) := (q+1)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} q^{n-k} t_k(x), \tag{1.5}$$

$q>0$, (e,c) – средние имеют вид

$$e_n^c(t;x) := \sqrt{\frac{c}{\pi n}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{n+k}(x)\exp\left(-\frac{ck^2}{n}\right), \tag{1.6}$$

где предполагается, что $t_{n+k}(x)=0$, когда $n+k<0$.

Для $n\in\mathbb{N}$ и $0\le m\le n$ определим числа $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ при помощи равенства

$$\prod_{\nu=0}^{n-1}(x+\nu)=\sum_{m=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m,$$

где

$$\prod_{\nu=0}^{n-1}(x+\nu)=x(x+1)\ldots(x+n-1)=\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)},$$

и условимся, что $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=1$. Пусть $\lambda>0$. K^λ-средние ([24]) последовательности $\{t_n\}$ определяются равенством

$$K_n^\lambda(t;x) := \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\lambda^k t_k(x).$$

Относительно K^{λ}-средних в работе [47] (см. также [16:2]) доказаны следующие две теоремы.

Теорема A. *Пусть последовательность* $K_n^{\lambda}(t,x)$ *определяет* K^{λ}*-средние ряда Фурье (1.1) функции* f. *Если* $0\le\beta<\alpha\le1$ *и* $f\in H_{\alpha}$, *то*

$$\left\|K_n^{\lambda}(f;\cdot)-f\right\|_{\beta}=O(1)\frac{\ln(\ln n)}{(\ln n)^{\alpha-\beta}},\quad n>3.$$

Теорема B. *Пусть* $h=\dfrac{\pi}{l(n)}$, *где*

$$l(n)=\frac{3}{2}+\lambda\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda+k}.$$

Пусть, далее, $\tilde{K}_n^{\lambda}(f,x)$ *являются* K^{λ}*-средними сопряженного ряда Фурье функции* f. *Если* $0\le\beta<\alpha\le1$ *и* $f\in H_{\alpha}$, *тогда*

$$\left\|\tilde{K}_n^{\lambda}(f;\cdot)-\tilde{f}(\cdot,h)\right\|_{\beta}=O(1)\frac{\ln(\ln n)}{(\ln n)^{\alpha-\beta}},\quad 0\le\beta<\alpha\le1.$$

Положим

$$S_n^{*}(f,x):=\sum_{k=0}^{n-1}A_k(f;x)+\frac{1}{2}A_n(f;x).$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n^{*}(f;x)-f(x)}{n}$$

называется рядом Харди-Литтлвуда.

Если же (см. (1.2))

$$\tilde{S}_n^{*}(f,x):=\sum_{k=0}^{n-1}B_k(f;x)+\frac{1}{2}B_n(f;x),$$

то ряд, ассоциированный с рядом Харди-Литтлвуда определяется как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{S}^*(f,x)-f(x)}{n}.$$

Пусть

$$g(x):=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0+}^{\pi}\psi_x(t)\frac{1}{2}ctg\left(\frac{t}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt,$$

где

$$\psi_x(t):=\frac{1}{2}\left\{f(x+t)-f(x-t)\right\}.$$

Авторами работы [16:1]относительно рядов Харди-Литтлвуда было установлено такое утверждение.

Теорема C. *Пусть* $\tilde{T}_u(x)$ *– частичные суммы порядка* n *ряда Харди-Литтлвуда (1.9). Пусть, далее,* $0\le\beta<\alpha\le 1$ *и* $f\in H_\alpha$. *Тогда*

$$\left\|\tilde{T}_n-g\right\|_\beta=O(1)\begin{cases}\dfrac{1}{n^{\alpha-\beta}}, & \alpha-\beta<1,\\ \dfrac{\ln n}{n}, & \alpha-\beta=1,\quad n>1.\end{cases}$$

Оценки скорости сходимости величин (1.4)–(1.6) для рядов Харди-Литтлвуда в пространстве Гёльдера H_α были установлены в [47], а именно.

Теорема D. *Пусть* $0\le\beta<\alpha\le 1$ *и* $f\in H_\alpha$. *Тогда*

$$\left\|E_n^q\left(\tilde{T}\right)-g\right\|_\beta=O(1)\begin{cases}\dfrac{1}{n^{\alpha-\beta}}, & \alpha-\beta<1,\\ \dfrac{\ln n}{n}, & \alpha-\beta=1,\quad n>1.\end{cases}$$

Теорема E. *Пусть* $0\le\beta<\alpha\le 1$ *и* $f\in H_\alpha$. *Тогда*

$$\left\|B_p\left(\tilde{T}\right)-g\right\|_\beta=O(1)\begin{cases}\dfrac{1}{p^{\alpha-\beta}}, & \alpha-\beta<1,\\ \dfrac{\ln p}{p}, & \alpha-\beta=1,\quad p>1.\end{cases}$$

Теорема F. *Пусть* $0 \le \beta < \alpha \le 1$ *и* $f \in H_\alpha$. *Тогда*

$$\left\| e_n\left(\tilde{T}\right) - g \right\|_\beta = O(1) \begin{cases} \dfrac{1}{n^{\alpha-\beta}}, & 0<\alpha-\beta \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & \dfrac{1}{2} < \alpha - \beta \le 1. \end{cases}$$

Пусть, далее, $\omega^*(\cdot)$ – положительная, возрастающая на $(0,\infty)$ функция и

$$\|f\|_{\omega^*} := \|f\|_c + \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega^*(|x-y|)} =$$

$$\|f\|_c + \sup_{t>0} \frac{\|f(\cdot)-f(\cdot+t)\|_c}{\omega^*(t)} < \infty$$

– обобщенная гёльдеровая норма.

Л. Лейндлером, А. Меиром и В. Тотиком (L. Leindler, A. Meir, V. Totik [31]) было установлено следующее весьма общее утверждение.

Теорема G. *Пусть* $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *– последовательность линейных операторов свёртки из* C *в* C *с нормой* $\|A_n\| := \|A_n\|_{C\to C}$ *и* $\omega(f;\delta)$ *– модуль непрерывности функции* $f \in C$. *Тогда*

$$\|A_n(f)-f\|_{\omega^*} \le$$

$$\|A_n(f)-f\|_C \left(1+\frac{2}{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right) + \sup_{0<t\le 1/n} \frac{2\omega(f;t)}{\omega^*(t)}\left(1+\|A_n\|\right).$$

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ и $t \ge 1/n$,

$$\frac{\left|\left(A_n(f)-f\right)(x)-\left(A_n(f)-f\right)(x+t)\right|}{\omega^*(t)} \le \frac{2\|A_n(f)-f\|_C}{\omega^*(1/n)}.$$

С другой стороны, если $0 < t \le 1/n$, то имеем

$$\frac{\left|\left(A_n(f)-f\right)(x)-\left(A_n(f)-f\right)(x+t)\right|}{\omega^*(t)} \le$$

$$\frac{\left|A_n(f)(x)-A_n(f)(x+t)\right|}{\omega^*(t)}+\frac{\left|f(x)-f(x+t)\right|}{\omega^*(t)} \le$$

$$\frac{\left|A_n\left(f(\cdot)-f(\cdot+t)\right)(x)\right|}{\omega^*(t)}+\frac{\omega(f;t)}{\omega^*(t)} \le$$

$$\frac{\left(\|A_n\|\left\|f(\cdot)-f(\cdot+t)\right\|_C+\omega(f;t)\right)}{\omega^*(t)} \le$$

$$\frac{2\omega(f;t)}{\omega^*(t)}\left(1+\|A_n\|\right),$$

чем и завершается доказательство теоремы G.

Положим, в частности, $\omega^*(t)=t^\beta$, $\|\cdot\|_{\omega^*}=\|\cdot\|_\beta$ и пусть $f\in H_\alpha$, $0\le\beta<\alpha\le 1$. Тогда из теоремы G вытекают следующие соотношения, установленные З. Прёсдорфом [43:1]: если $A_n=S_n$, то

$$\left\|S_n(f)-f\right\|_\beta=O\left(n^{\beta-\alpha}\ln n\right),\quad n>1;$$

Пусть, теперь, $\Lambda=\{\lambda_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, – неубывающая последовательность целых чисел: $\lambda_1=1$, $\lambda_{n+1}-\lambda_n\le 1$ и

$$V_n(\lambda;f)=V_n(\lambda;f;x):=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=n-\lambda_n+1}^{n}S_k(f;x)$$

– обобщенные средние Валле Пуссена. Тогда из теоремы G при $A_n=V_n(\lambda;f)$ вытекают следующие соотношения (см. также [30:2])

$$\left\|V_n(\lambda;f)-f\right\|_\beta=\begin{cases}O\left(n^{\beta-\alpha}\right)\ln\dfrac{2n}{\lambda_n}, & \alpha<1,\\ O\left(\left(n^{\beta-1}+\dfrac{n^\beta}{\lambda_n}\right)\ln\dfrac{n}{n-\lambda_n+1}\right)\ln\dfrac{2n}{\lambda_n}, & \alpha=1.\end{cases}$$

Рассмотрим приближение непрерывных 2π -периодических функций f тригонометрическими полиномами по норме

$$\|f\|_{\omega^*}=\|f\|_C+\sup_{\delta>0}\frac{\omega(f;\delta)}{\omega^*(\delta)},$$

где $\omega(f;\delta)$ – модуль непрерывности функций f, $\omega^*(\delta)$ – некоторая положительная и возрастающая на $(0,\pi]$ функция.

Некоторые задачи об оценках приближений функций в обобщенной гёльдеровой метрике сводятся к оценкам в равномерной метрике. А именно, С.А. Теляковским ([55]) установлено следующее утверждение.

Теорема Н. *Пусть* $\omega^*(\delta)$ *– положительная возрастающая на* $(0,\pi]$ *функция и для функции* f *дробь* $\dfrac{\omega(f;\delta)}{\omega^*(\delta)}$ *почти возрастает на* $[0,\pi)$, *т.е. для* $0<\delta<\eta\le\pi$

$$\frac{\omega(f;\delta)}{\omega^*(\delta)}\le c\frac{\omega(f;\eta)}{\omega^*(\eta)},$$

где $c\ge1$ *– абсолютная постоянная. Если для тригонометрического полинома* t_n *порядка* n *справедлива оценка*

$$\|f-t_n\|_C\le A\omega\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

где A *– число, которое может зависеть от* n, *то*

$$\|f-t_n\|_{\omega^*} \le A\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)+\frac{B(1+A)\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)}{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)},$$

где множитель B зависит только от коэффициента c.

Доказательство. Воспользуемся оценкой модулей непрерывности, вытекающей из неравенств

$$\omega_k(t_n;\delta) \le \omega_k(f;\delta)+2^k c_1\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

$$\omega_k(t_n;\delta) \le \left(\sin\frac{1}{2}\right)^k \left(2^{-k}+c_1\right)n^k\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right)\delta^k,$$

полученных в работе С.Б. Стечкина [54].

Если для функции f и тригонометрического полинома t_n порядка n выполняется оценка

$$\|f-t_n\|_C \le A\omega\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

то для модуля непрерывности полинома t_n имеет место оценка

$$\omega(t_n;\delta) \le 3(1+2A)\omega(f;\delta).$$

Действительно, для $\delta \ge \frac{1}{n}$ согласно первому из неравенств С.Б. Стечкина

$$\omega(t_n;\delta) \le (1+2A)\omega(f;\delta).$$

А при $\delta \le \frac{1}{n}$ в силу второго из неравенства С.Б. Стечкина

$$\omega(t_n;\delta) \le \left(\sin\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}+1\right)n\delta\omega\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

откуда следует требуемое неравенство, так как функция $\dfrac{\omega(f;\delta)}{\delta}$ почти убывает с коэффициентом 2 (см., напр., [54]).

Далее, оценим выражение

$$D(\delta)\le\frac{1}{\omega^*(\delta)}\left\|f(x+\delta)-t_n(x+\delta)-\left(f(x)-t_n(x)\right)\right\|_C.$$

Для $\delta\ge\dfrac{1}{n}$ имеем

$$D(\delta)\le\frac{1}{\omega^*(\delta)}2A\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\le 2A\frac{\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)}{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

А для $\delta\le\dfrac{1}{n}$ находим

$$D(\delta)\le\frac{1}{\omega^*(\delta)}\left[\left\|f(x+\delta)-f(x)\right\|_C+\left\|t_n(x+\delta)-t_n(x)\right\|_C\right]\le$$

$$\frac{1}{\omega^*(\delta)}\left[\omega(f;\delta)+3(1+2A)\omega(f;\delta)\right].$$

Значит, в силу условия теоремы получаем

$$D(\delta)\le\frac{B(1+A)\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)}{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)},$$

где множитель B зависит только от c. С помощью полученных оценок приходим к доказываемому неравенству.

§2.2. Линейные средние сумм Фурье в обобщённых гёльдеровых пространствах

1. Пусть, как и прежде, $C = C(0,2\pi)$ – пространство непрерывных и 2π-периодических функций. Обозначим через $H_{\omega^*} = H_{\omega^*}(0,2\pi)$ пространство функций $f \in C$, удовлетворяющих условию

$$\left|f(x) - f(y)\right| \le K\omega^*\left(|x-y|\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ K = K(f),$$

с обобщенной гёльдеровой нормой

$$\|f\|_{\omega^*} = \|f\|_C + \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\ne y}} \Delta^{\omega^*} f(x,y), \tag{2.1}$$

где

$$\Delta^{\omega^*} f(x,y) := \frac{\left|f(x) - f(y)\right|}{\omega^*\left(|x-y|\right)}, \ \ \Delta^{\circ} f(x,y) := 0,$$

$\omega^*(t)$ – некоторая неубывающая и положительная при $t>0$ функция. Пространство H_{ω^*} является банаховым пространством относительно нормы (2.1).

Пусть, далее, $\omega(t)$ – функция, с теми же свойствами, что и $\omega^*(t)$ и $H_\omega = H_\omega(0,2\pi)$ – множество функций $f \in C$, удовлетворяющих условию

$$\left|f(x) - f(y)\right| \le K_1\omega\left(|x-y|\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ K_1 = K_1(f),$$

содержащееся в некотором пространстве H_{ω^*}. Полагая, в частности, $\omega^*(t) = t^\beta$, $\omega(t) = t^\alpha$, $0 \le \beta < \alpha \le 1$, в качестве множества H_ω получаем множество

$$H_\alpha = \left\{ f \in C : \left|f(x) - f(y)\right| \le K|x-y|^\alpha, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, K = K(f) \right\}$$

в пространстве H_β с гёльдеровой нормой

$$\|f\|_{\beta}=\|f\|_{C}+\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\beta}}. \qquad (2.2)$$

Пусть $\Lambda=\left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$ – бесконечная треугольная матрица неотрицательных чисел:

$$\Lambda=\left\{\lambda_k^{(n)}\geq 0:\lambda_k^{(n)}=0,\ \ k>n;\ k,n=0,1,2...\right\}$$

и введем в рассмотрение группы отклонений вида

$$G_n(f,\Lambda)=G_n(f;x;\Lambda):=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\rho_k(f;x),\ \ n\in\mathbb{N}_0, \qquad (2.3)$$

где $\rho_n(f;x)=f(x)-S_n(f;x)$, $S_n(f;x)$ – частичная сумма ряда Фурье $S[f]$. Полагая, дополнительно, условие

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}=1,\ \ n=0,1,2...,$$

величины (2.3) примут вид

$$G_n(f,\Lambda)=U_n(f;x;\Lambda)-f(x), \qquad (2.3')$$

где

$$U_n(f;x;\Lambda):=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}S_k(f;x)$$

– линейные средние сумм Фурье $S_k(f)$.

Ниже доказываются утверждения, содержащие аппроксимационные свойства величин (2.3') в обобщённом гёльдеровом пространстве H_{ω^*}.

2. Имеют место следующие утверждения (см. [26:11, 12]).

Теорема 2.2.1. *Пусть* $\Lambda=\left\|\lambda_k^{(n)}\right\|,\ k=0,...n-1;\ n=1,2,...$ *, – бесконечная треугольная матрица действительных чисел элементы которой удовлетворяют условию*

$$\lambda_k^{(n)}\geq 0,\ \ \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}=1,\ \ n=0,1,2,.... \qquad (2.4)$$

Тогда если $0 \le \beta < \eta \le 1$, *то для любой функции* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ *и для любого* $n = 0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\| G_n(f,\lambda) \right\|_{\omega^*} = \left\| U_n(f) - f \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x \ne y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \sum_{r=0}^{n} \left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \sum_{k=0}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}, \quad (2.5)$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n = 0,1,\ldots$ *и зависящая, вообще говоря, от* f, β, η.

Теорема 2.2.2. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4). Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 1$, *то для любой функции* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ *и для всех* $n = 1,2,\ldots$ *справедливо соотношение*

$$\left\| G_n(f,\lambda) \right\|_{\omega^*} = \left\| U_n(f) - f \right\|_{\omega^*} =$$

$$O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x \ne y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta}}{k} \times \right.$$

$$\left. \sum_{r=0}^{k+1} \lambda_r^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \sum_{r=k}^{n} \left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \right\}, \quad (2.6)$$

Теорема 2.2.3. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4),* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и модуль непрерывности* $\omega(f;t)$ *функции* f *удовлетворяет условию*

$$\int_u^\pi t^{-2} \left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta} dt = O\left(H_{1-\beta/\eta}(u)\right), \quad u \to 0+, \quad (2.7)$$

где $H_\gamma(u)$ *– некоторая неотрицательная на* $(0,\pi]$ *функция.*

Тогда если $f \in H_{\omega} \subset H_{\omega^*}$, *то для всех* $n = 0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\lambda)\right\|_{\omega^*} = \left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*} =$$

$$O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\beta/\eta}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}. \qquad (2.8)$$

Если, кроме того,

$$\int_0^t H_{1-\beta/\eta}(u)\,du = O\left(tH_{1-\beta/\eta}(t)\right), \quad t \to 0+, \qquad (2.9)$$

то

$$\left\|G_n(f,\lambda)\right\|_{\omega^*} = \left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*} =$$

$$O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)} \times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\beta/\eta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}, \qquad (2.10)$$

$$\left\|G_n(f,\lambda)\right\|_{\omega^*} = \left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*} =$$

$$O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)} \times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\beta/\eta}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \quad n = 0,1,\ldots \qquad (2.11)$$

Утверждения теоремы 2.2.3 существенно обобщают и усиляют соответствующие результаты работы [50:1, 3].

Доказательствам теорем предпошлём следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2.2.1. *Пусть* ω *положительная непрерывная на* $(0,\pi]$ *функция и* $\gamma \ge 0$*. Если*

$$\int_u^\pi t^{-2}\left(\omega(t)\right)^\gamma dt = O\left(H_\gamma(u)\right),\quad u\to 0+,\quad H_\gamma(u)=H_\gamma(u,\omega)\ge 0,$$

$$\int_0^t H_\gamma(u)\,dt = O\left(tH_\gamma(t)\right),\quad t\to 0+,$$

то справедливы следующие соотношения

$$\int_0^{\pi/(n+1)} \left(\omega(t)\right)^\gamma dt = O\left((n+1)^2 H_\gamma\left(\frac{\pi}{n}+1\right)\right),\quad n=0,1,\ldots \tag{2.12}$$

$$\int_0^u t^{-1}\left(\omega(t)\right)^\gamma dt = O\left(uH_\gamma(u)\right),\quad u\to 0+. \tag{2.13}$$

Доказательство. Интегрированием по частям находим

$$\int_0^{\pi/(n+1)} \left(\omega(t)\right)^\gamma dt = \int_0^{\pi/(n+1)} \frac{\left(\omega(t)\right)^\gamma}{t^2} t^2 dt = -\int_0^{\pi/(n+1)} t^2 \left(\int_t^\pi \frac{\left(\omega(\tau)\right)^\gamma}{\tau^2} d\tau\right)' dt =$$

$$O(1)\left[\int_0^{\pi/(n+1)} t\left\{\int_t^\pi \frac{\left(\omega(\tau)\right)^\gamma}{\tau^2} d\tau\right\} dt + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \int_{\pi/(n+1)}^{\pi} \frac{\left(\omega(\tau)\right)^\gamma}{\tau^2} d\tau\right] =$$

$$O(1)\left[(n+1)^{-2} H_\gamma\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \int_0^{\pi/(n+1)} tH_\gamma(t)\,dt\right] =$$

$$O(1)\left[(n+1)^{-2} H_\gamma\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \frac{\pi}{n+1}\int_0^{\pi/(n+1)} H_\gamma(t)\,dt\right] =$$

$$O(1)\left[(n+1)^{-2}H_\gamma\left(\frac{\pi}{n+1}\right)+(n+1)^{-2}H_\gamma\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right]=$$

$$O(1)(n+1)^{-2}H_\gamma\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Отсюда и следует (2.12).

Аналогично доказывается формула (2.13).

Лемма 2.2.2. *Пусть* $\Lambda=\left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $k,n=0,1,\ldots,$ *– бесконечная треугольная матрица неотрицательных чисел. Тогда для* $0<t\le\pi$ *справедливы соотношения*

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right|=O\left(\sum_{r=0}^{\tau}\lambda_r^{(n)}+\frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right),\qquad(2.14)$$

где $\tau=\left[\dfrac{\pi}{t}\right]$ ([a] *– целая часть числа* a),

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right|=O\left(\frac{1}{t}\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right).\qquad(2.15)$$

Доказательство. Поскольку $\lambda_k^{(n)}=0$, $k>n$, находим

$$\lambda_m^{(n)}\le\sum_{k=m}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|,\quad m=0,1,\ldots,n.\qquad(2.16)$$

Поэтому для $n\ge m\ge 0$,

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\alpha_k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\sin\frac{t}{2}\right|\le\frac{1}{2}\left(\alpha_m+\sum_{k=m}^{n-1}\left|\Delta\alpha_k\right|+\alpha_n\right).\qquad(2.17)$$

В силу (2.16) и (2.17), полагая $n\ge\tau=\left[\dfrac{\pi}{t}\right]$, используя неравенство $\sin t\ge\dfrac{2t}{\pi}$, $0<t\le\dfrac{\pi}{2}$, будем иметь

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right|\le\sum_{k=0}^{\tau}\lambda_k^{(n)}+\left|\sum_{k=\tau}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right|\le$$

$$\sum_{k=0}^{\tau}\lambda_k^{(n)}+O\left(\frac{1}{t}\left(\lambda_\tau^{(n)}+\sum_{k=\tau}^{n-1}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|+\lambda_k^{(n)}\right)\right)=$$

$$O\left(\sum_{r=0}^{\tau}\lambda_r^{(n)}+\frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right).$$

Отсюда следует (2.14).

Аналогично этому находим

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right|=$$

$$O\left(\frac{1}{t}\left(\lambda_0^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|+\lambda_n^{(n)}\right)\right)=O\left(\frac{1}{t}\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right).$$

Приступим к доказательствам приведенных выше теорем.
Доказательство теоремы 2.2.1. Положим

$$\varphi_x(t):=f(x+t)+f(x-t)-2f(x),$$

$$G_n(x)=G_n(f;x;\Lambda)=U_n(f;x;\lambda)-f(x)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi_x(t)}{\sin\frac{t}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)dt,$$

$$G_n(x,y):=G_n(x)-G_n(y)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]}{\sin\frac{t}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)dt.$$

Оценим величину

$$\|G_n\|_{\omega^*} = \|G_n\|_C + \sup_{\substack{-\infty<x,y,<\infty \\ x\neq y}} \frac{|G_n(x,y)|}{\omega^*(|x-y|)}. \qquad (2.18)$$

Имеем

$$G_n(x,y) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/(n+1)} + \int_{\pi/(n+1)}^{\pi}\right)\frac{[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)]}{\sin\frac{t}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)dt =:$$

$$I_n^{(1)}(x,y)+I_n^{(2)}(x,y). \qquad (2.19)$$

В силу неравенств

$$\begin{aligned} &|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)| \le 4\omega(f;|x-y|) \le 4K\omega(|x-y|), \\ &|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)| \le 4\omega(f;t) \le 4K\omega(t),\ \ K=K(f), \end{aligned} \qquad (2.20)$$

$$\sin t \ge \frac{2t}{\pi},\quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}, \qquad (2.21)$$

а также неравенства $|\sin t| \le t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{n+1}$, из которого следует, что

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right| = O(nt), \qquad (2.22)$$

получаем

$$|I_n^{(1)}(x,y)| = O(1)\int_0^{\pi/(n+1)}\frac{|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)|^{1-\beta/\eta}\cdot|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)|^{\beta/\eta}}{\sin\frac{t}{2}}ntdt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(f;\frac{\pi}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta}=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\cdot\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}. \qquad (2.23)$$

Используя соотношение (2.15) леммы 2.2.2, неравенство (2.21), находим

$$\left|I_n^{(2)}(x,y)\right|=O(1)\int\limits_{\pi/(n+1)}^{\pi}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}}{t^2}dt\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\int\limits_{1}^{n+1}\left(\omega\left(f;\frac{\pi}{t}\right)\right)^{1-\beta/\eta}dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}, \qquad (2.24)$$

$$0\le\beta<\eta\le 1.$$

С учетом (2.23), (2.24) из (2.19) получаем

$$\left|G_n(x,y)\right|\le\left|I_n^{(1)}(x,y)\right|+\left|I_n^{(2)}(x,y)\right|=O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}. \qquad (2.25)$$

Ясно, что

$$\left\|G_n\right\|_C=O(1)\left\{\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right\}. \qquad (2.26)$$

Объединяя (2.25) и (2.26), из (2.18) получаем (2.5):

$$\|G_n\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}.$$

Теорема 2.2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2.2. Имеем (см. 2.19)

$$G_n(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/(n+1)}+\int_{\pi/(n+1)}^{\pi}\right)\frac{\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]}{\sin\frac{t}{2}}\times$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)dt=:I_n^{(1)}(x,y)+I_n^{(2)}(x,y).$$

В силу неравенств (2.21), (2.22) находим

$$\left|I_n^{(1)}(x,y)\right|=O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}n\int_0^{\pi/(n+1)}\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}. \qquad (2.27)$$

Принимая во внимание монотонность функции $\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}$, используя соотношение (2.14), получаем

$$\left|I_n^{(2)}(x,y)\right|=O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\times$$

$$\int\limits_{\pi/(n+1)}^{\pi} \frac{\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}}{t}\left(\sum_{r=0}^{\tau}\lambda_r^{(n)}+\frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right)dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\times$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\pi/(k+1)}^{\pi/k}\frac{\omega\left(f;t\right)^{1-\beta/\eta}}{t}\left(\sum_{r=0}^{\tau}\lambda_r^{(n)}+\frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right)dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\omega\left(1/k\right)\right)^{1-\beta/\eta}}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(1/k\right)\right)^{1-\beta/\eta}\sum_{r=k}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right\}. \tag{2.28}$$

Легко понять, что

$$\left\|G_n\right\|_C=O(1)\left(\omega\left(1/n+1\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega\left(1/k\right)}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\omega\left(1/k\right)\sum_{r=k}^{n}\left|\lambda_r^{(n)}\right|\right). \tag{2.29}$$

Объединяя соотношение (2.28) и (2.29), окончательно получаем (2.6):

$$\left\|G_n\left(f,\lambda\right)\right\|_{\omega^*}=\left\|U_n\left(f\right)-f\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\omega\left(1/k\right)\right)^{1-\beta/\eta}}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}+\right.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(1/k\right)\right)^{1-\beta/\eta}\sum_{r=k}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\Bigg\}.$$

Теорема 2.2.2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.2.3. Требуется оценить величину

$$\left\|G_n\left(f,\lambda\right)\right\|_{\omega^*}=\left\|G_n\left(f,\lambda\right)\right\|_C+\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left|G_n\left(x,y\right)\right|}{\omega^*\left(\left|x-y\right|\right)}, \quad (2.30)$$

В условиях теоремы имеем

$$G_n\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/(n+1)}+\int_{\pi/(n+1)}^{\pi}\right)\frac{\left[\varphi_x\left(t\right)-\varphi_y\left(t\right)\right]}{\sin\frac{t}{2}}\times$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)dt=I_n^{(1)}\left(x,y\right)+I_n^{(2)}\left(x,y\right).$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое. Принимая во внимание неравенства (2.20)–(2.22), находим

$$\left|I_n^{(1)}\left(x,y\right)\right|=O\left(1\right)\left(\omega\left(\left|x-y\right|\right)\right)^{\beta/\eta}n\int_0^{\pi/(n+1)}\left(\omega\left(f;t\right)\right)^{1-\beta/\eta}dt=$$

$$O\left(1\right)\left(\omega\left(\left|x-y\right|\right)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}. \quad (2.31)$$

Учитывая соотношение (2.15) леммы 2.2.2 и условие (2.7), получаем

$$\left|I_n^{(2)}\left(x,y\right)\right|=O\left(1\right)\left(\omega\left(\left|x-y\right|\right)\right)^{\beta/\eta}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\int_{\pi/(n+1)}^{\pi}\frac{\left(\omega\left(f;t\right)\right)^{1-\beta/\eta}}{t^2}dt=$$

$$O\left(1\right)\left(\omega\left(\left|x-y\right|\right)\right)^{\beta/\eta}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|H_{1-\beta/\eta}\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \quad (2.32)$$

Рассуждая как и выше, находим

$$\left\|G_n\right\|_C = O(1)\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\beta/\eta}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}. \tag{2.33}$$

Объединяя соотношения (2.30)–(2.33) приходим к требуемому соотношению (2.8). Покажем теперь справедливость оценки (2.10). Замечая, что

$$\delta_n := \sum_{k=0}^{n}\left|\lambda_k^{(n)}\right| \le 2\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)} = 2 < \pi,$$

запишем

$$G_n(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta_n} + \int_{\delta_n}^{\pi}\right)\frac{\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]}{\sin\frac{t}{2}}\times$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)dt = J_n^{(1)}(x,y)+J_n^{(2)}(x,y).$$

Вследствие (2.4) и неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right| \le 1,$$

а также соотношения (2.13) леммы 2.2.1, в силу (2.20), (2.21) получаем

$$\left|J_n^{(1)}(x,y)\right| = O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\int_0^{\delta_n}\frac{\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}}{t}dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\beta/\eta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right).$$

Учитывая условие (2.7) и соотношение (2.15) леммы 2.2.2, находим

$$\left|J_n^{(2)}(x,y)\right| = O(1)\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\left|x-y\right|\right)\right)^{\beta/\eta}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}}{t^2}dt\right\} =$$

$$O(1)\left\{\left(\omega\left(\left|x-y\right|\right)\right)^{\beta/\eta}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\beta/\eta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}.$$

Подобными рассуждениями приходим к оценке

$$\left\|G_n\right\|_C = O(1)\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\beta/\eta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}.$$

Таким образом, объединяя полученные выше оценки, получаем требуемое соотношение (2.10).

Докажем (2.11). Заметим, что если $\Delta\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$, то

$$\lambda_j^{(n)} \le \sum_{k=j}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|,\ \ j = 0,1,\ldots,n.$$

Отсюда следует, что

$$1 = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j^{(n)} \le (n+1)\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|,$$

или

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| \ge \frac{1}{2n}.$$

С учетом этого неравенства и соотношения (2.13) леммы 2.2.1 с $\gamma = 1-\dfrac{\beta}{\eta}$, в силу (2.20)–(2.22) находим

$$\left|J_n^{(1)}(x,y)\right| = O(1)\left(\omega\left(\left|x-y\right|\right)\right)^{\beta/\eta}\int_{0}^{\pi/(n+1)}\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}ndt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\frac{1}{n}H_{1-\beta/\eta}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\beta/\eta}\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \qquad (2.34)$$

На основании соотношения (2.32), (2.33) и (2.34) получаем требуемое соотношение (2.11).

Теорема 2.2.3 полностью доказана.

Утверждения, аналогичные утверждениям теорем 2.2.1–2.2.3 в пространстве C установлены Б. Уэи, Д. Ю (B. Wei, D. Yu [58]).

3. Рассмотрим приложение доказанных выше теорем. С этой целью приведем ряд известных определений, введенных Л. Лейндлером [30:4].

Пусть $n=0,1,\ldots$, – фиксировано, $\lambda_n:=\lambda_k^{(n)}$, $k=0,1,\ldots$, – последовательность неотрицательных чисел, стремящаяся к нулю. Говорят, что λ_n принадлежит $RBVS$, $\lambda_n\in RBVS$, если существует положительная константа $K=K(\lambda_n)$, зависящая только от λ_n такая, что

$$\sum_{k=m}^{\infty}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|=\sum_{k=m}^{\infty}\left|\lambda_k^{(n)}-\lambda_{k+1}^{(n)}\right|\le K(\lambda_n)\lambda_m^{(n)} \qquad (2.35)$$

для всех натуральных m,

Если же

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\le K(\lambda_n)\lambda_m^{(n)}, \qquad (2.36)$$

для всех $m\in\mathbb{N}$, или только для всех $m\le N$, при условии, что последовательность λ_n имеет только конечное число ненулевых членов, причем последний ненулевой член есть $\lambda_N^{(n)}$, то $\lambda_n\in HBVS$. В дальнейшем считаем, что $0\le K(\lambda_n)\le K$, $n\in N$, и что функция $H_\gamma(u)$ такова, что

$$\forall A>0 \ H_\gamma(Au)=O\big(H_\gamma(u)\big), \ u\to 0+$$

Пусть $\lambda_n=\left(\lambda_k^{(n)}\right)\in HBVS$. Тогда (см. (2.36))

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|+\lambda_n^{(n)}\le\big(K(\lambda_n)+1\big)\lambda_n^{(n)}. \qquad (2.37)$$

В этом случае из теорем 2.2.1, 2.2.3, с учётом (2.37) вытекают следующие утверждения (см. [26:1, 2, 5]).

Следствие 2.2.1. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n=\left(\lambda_k^{(n)}\right)\in HBVS$. *Тогда если* $0\le\beta<\eta\le 1$, *то для любой функции* $f\in H_\omega\subset H_{\omega^*}$ *и для всех* $n=0,1,\dots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\big(\omega(|x-y|)\big)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}. \qquad (2.38)$$

Следствие 2.2.2. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n=\left(\lambda_k^{(n)}\right)\in HBVS$. *Пусть, далее,* $0\le\beta<\eta\le 1$, *и модуль непрерывности* $\omega(f;t)$ *функции* f *удовлетворяет условию (2.7). Тогда если* $f\in H_\omega\subset H_{\omega^*}$, *то для всех* $n=0,1,\dots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*}=\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\big(\omega(|x-y|)\big)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\lambda_n^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\},\qquad(2.39)$$

если, кроме того, выполняется условие (2.9), то

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\left\{\lambda_n^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right\},\qquad(2.40)$$

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\left\{\lambda_n^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}.\qquad(2.41)$$

Пусть теперь $\lambda_n\in RBVS$. Тогда (см. (2.35))

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta_k^{(n)}\right|+\lambda_n^{(n)}\le$$

$$2\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|+\lambda_0^{(n)}\le2\left(K\left(\lambda_n\right)+1\right)\lambda_0^{(n)}.\qquad(2.42)$$

С помощью оценки (2.42) из теоремы 2.2.1 получаем такое утверждение.

Следствие 2.2.3. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n=\left(\lambda_k^{(n)}\right)\in RBVS$. *Тогда если* $0\le\beta<\eta\le1$, *то для любой функции* $f\in H_\omega\subset H_{\omega^*}$, *и для всех* $n=0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_0^{(n)} \sum_{k=0}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (2.43)$$

Следствие 2.2.4. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n \in RBVS$. *Пусть, далее,* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и модуль непрерывности* $\omega(f;t)$ *функции* f *удовлетворяет условию (2.7). Тогда если* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$, *то для всех* $n = 0,1,\ldots$

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_0^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \qquad (2.44)$$

если, кроме того, выполняется условие (2.9), то

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*} =$$

$$O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \lambda_0^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\lambda_0^{(n)}\right), \qquad (2.45)$$

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*} =$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^{*}\left(|x-y|\right)}\lambda_0^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \qquad (2.46)$$

Пусть $\lambda_n \in RBVS$. Тогда подобно оценке (2.42) получаем

$$\sum_{r=k}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \le \left(2K\left(\lambda_n\right)+1\right)\lambda_k^{(n)}. \qquad (2.47)$$

В силу определения $RBVS$ находим

$$\lambda_k^{(n)} \le \sum_{r=j}^{k-1}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| + \lambda_j^{(n)} \le \left(2K\left(\lambda_n\right)+1\right)\lambda_j^{(n)},$$

где $j=\left[\frac{k}{2}\right]+1,\ldots,k$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{k}{k}\lambda_k^{(n)} = O(1)\frac{1}{k}\sum_{r=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k}\lambda_r^{(n)} = O\left(\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}\right). \qquad (2.48)$$

Из (2.47) и (2.48) следует

$$\sum_{r=k}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| = O\left(\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}\right). \qquad (2.49)$$

Используя оценку (2.49), из теоремы 2.2.2 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2.5. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n \in RBVS$. *Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 1$, *то для любой функции* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ *и для всех* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*} = O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^{*}\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\omega\left(1/k\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}\right\}.$$

Полагая в условиях следствия 2.2.1 $\omega^*(t)=t^\beta$, $\omega(t)=t^\alpha$, $0\le\beta<\alpha\le1$, $\eta=\alpha$ и учитывая, что в этом случае

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}=1$$

приходим к такому утверждению (см. [26:1, 2, 5])

Следствие 2.2.6. *Пусть выполнены все условия следствия 2.2.1 и* $0\le\beta<\alpha\le1$. *Тогда для любой функции* $f\in H_\alpha$ *имеют место соотношения*

$$\left\|G_n(f;\lambda)\right\|_\beta=\left\|f-U_n(f)\right\|_\beta=$$

$$\begin{cases} O(1)\left((n+1)^{\beta-\alpha}+\lambda_n^{(n)}(n+1)^{\beta-\alpha+1}\right), & 0<\alpha-\beta<1;\\ O(1)\left(\dfrac{1}{n+1}+\lambda_n^{(n)}\ln(n+1)\right), & \alpha-\beta=1,\ (\alpha=1,\ \beta=0),\ n\in\mathbb{N}_0, \end{cases}$$

где $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные по* n *и зависящие, вообще говоря, от* $f\in H_\alpha$, *а норма* $\|\cdot\|_\beta$ *определена равенством (2.2).*

Пусть, далее, $\{p_n\}$, $n=0,1,2,\ldots$ – некоторая неубывающая последовательность неотрицательных чисел и

$$P_n:=\sum_{k=0}^{n}p_k.$$

Положим

$$\overline{N}_n(f;x)=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_kS_k(f;x).$$

Элементы матрицы $\Lambda = \left\| \frac{p_k}{P_n} \right\|$, $k = 0,1,\dots,n$; $p_k = 0$, $k > n$, удовлетворяют условиям следствия 2.2.1. Отсюда получаем такое утверждение.

Следствие 2.2.7. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ *имеет место соотношение*

$$\left\| f - \bar{N}_n(f) \right\|_{\omega^*} =$$

$$O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y, < \infty \\ x \ne y}} \frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)} \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \frac{p_n}{P_n} \sum_{k=0}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}, \qquad (2.50)$$

Пусть, далее, $\sigma_n(f)$ – суммы Фейера порядка n. В качестве следствия последнего утверждения приведем утверждение, содержащее усиление упомянутой выше теоремы З. Прёсдорфа.

Следствие 2.2.8. *Для любой функции* $f \in H_\alpha$, $0 \le \beta < \alpha \le 1$, *справедливы соотношения*

$$\left\| \sigma_n(f) - f \right\|_\beta = \begin{cases} O\left(n^{\beta-\alpha}\right), & \alpha - \beta < 1, \\ O\left(n^{-1}\ln n\right), & \alpha - \beta = 1, \ (\alpha = 1, \ \beta = 0), \ n > 1. \end{cases}$$

Замечание. *Принимая во внимание выпуклость вверх функции* $\varphi(u) = u^\gamma$, $0 < \gamma \le 1$, *в силу неравенства Иенсена ([61, с. 96]) получаем,*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \le (n+1)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} =$$

$$(n+1)^{\beta/\eta}\left(\sum_{k=0}^{n}\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}.$$

С другой стороны, примеры функций $\omega^*(t)=t^\beta$, $0<\beta<1$, $\omega(t)=t$, показывают, что величины, стоящие в левой и правой частях последнего неравенства, в общем случае, не являются величинами одного порядка. Отсюда, в частности, следует, что оценки (2.5), (2.6) уточняют и обобщают соответствующие оценки авторов работ [35:2], [33], [50:1].

Перейдем к оценке снизу. С этой целью приведём следующую теорему В.В. Жука [20].

Теорема Н. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$, *функция* $\varphi(t)>0$ *при* $t>0$, $\varphi(t)$ *возрастает при* $t>0$, *линейный оператор* $U:L_p\to T^{(n)}$ *такой, что*

$$U\big(f(\cdot+t),x\big)=U(f,x+t)\quad \forall f\in L_p,\ 1\le p\le\infty,\ x,t\in\mathbb{R}.$$

Тогда $\forall f\in L_p$

$$E_n(f)_p\le\varphi\left(\frac{\pi}{n+1}\right)B_1(m)\sup_{0<t<\infty}\frac{\left\|\dot{\Delta}_t^m\big(f-U(f)\big)\right\|_p}{\varphi(t)},\quad (2.51)$$

где $T^{(n)}$ *– множество тригонометрических полиномов* T_n *порядка не выше* n, $\dot{\Delta}_t^m(\cdot)$ *– m-ая симметричная разность (см. (1.3.1')).*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.4. *Пусть* $\omega(\cdot)$ *является функцией со свойствами модуля непрерывности, удовлетворяющей условию*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega\left(\frac{1}{k}\right)\le B\omega(1/n),\quad n\in\mathbb{N},\qquad (2.52)$$

и $\omega^*(t)$ *– положительная и возрастающая при* $t>0$ *функция. Тогда существует функция* $f_0\in H_\omega\subset H_{\omega^*}$ *такая, что*

$$\left\|U_n(f_0)-f_0\right\|_{\omega^*}\ge B_1\inf_{h>0}\frac{\big(\omega(h)\big)^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta},$$

где $0\le\beta<\eta\le1$, B_1 *– некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Функция $\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ определяет положительную, монотонно убывающую к нулю последовательность чисел. Тогда по известной теореме С.Н. Бернштейна [6:2] существует функция $f_0 \in C$, что

$$E_n(f_0) = \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Применяя теорему H ((2.51)) для функции f_0 и случая $m=1$, находим

$$\sup_{h>0} \frac{\left\|\dot{\Delta}_h\left(f_0 - U_n(f_0)\right)\right\|_C}{\omega^*(h)} \geq B_2 \frac{E_n(f_0)}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} =$$

$$B_2 \frac{\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} = B_2 \frac{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} \cdot \left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \geq$$

$$B_2 \inf_{h>0} \frac{\left(\omega(h)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)} \left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}.$$

Покажем теперь, что $f_0 \in H_\omega$. На основании неравенства Стечкина-Салема [48, 54]:

$$\omega\left(f; \frac{1}{k+1}\right) \leq \frac{A}{k+1} \sum_{i=0}^{k} E_i(f), \quad f \in C. \tag{2.53}$$

Тогда в силу (2.53) получаем

$$\omega\left(f_0; \frac{1}{k+1}\right) \leq \frac{A}{k+1} \sum_{i=0}^{k} E_i(f_0) \leq \frac{A_1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \omega\left(\frac{1}{i+1}\right) \leq A_2 \omega\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

Следовательно, $f_0 \in H_\omega$. Теорема доказана.

Из данной теоремы следует неулучшаемость, в известном смысле, соотношения (2.38) следствия 2.2.1. Например, предполагая в следствии 2.2.1 последовательность $U_n(f)$ такой, что

$\lambda_k^{(n)} = O\left(\frac{1}{n+1}\right)$, $k = 0,\ldots,n$; $\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$, из следствия 2.2.1 вытекает, что соотношение

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_\beta = \left\|U_n(f) - f\right\|_\beta = O\left((n+1)^{\beta-\alpha}\right),$$
$$0 < \alpha - \beta < 1, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

точно по порядку при $0 \le \beta < \alpha < 1$. В частности, если $U_n(f) = \sigma_n(f)$, то следствие 2.2.1 (или 2.2.6) даёт нам оценку, полученную С.Н. Бернштейном [6:1], точную по порядку на всём множестве H_1 в случае, когда $\alpha - \beta = 1$ $(\alpha = 1,\ \beta = 0)$. Если же $\eta = \alpha = 1$ и $\beta > 0$, то мы можем утверждать, что существует функция f_0 такая, что $\omega(f_0;h) = O\left(h \ln\frac{1}{h}\right)$, $h > 0$, для которой $\left\|\sigma_n(f) - f\right\|_\beta \ge K(n+1)^{\beta-1}$, $K > 0$.

Действительно, для этого положим $\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{\pi}{n+1}(\alpha = 1)$. Тогда по теореме С.Н. Бренштейна найдется функция f_0, что $E_n(f_0) = \frac{\pi}{n+1}$. Это, как известно, влечет за собой приведённые выше условия для $\omega(f_0;h)$. Далее, рассуждая, как и при доказательстве теоремы 2.2.4, получаем записанную ранее оценку снизу.

4. Приведем утверждение, близко примыкающее к утверждению следствия 2.2.1 при условии, что элементы матрицы Λ не убывают.

Теорема 2.2.5. *Пусть* $\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $k = 0,\ldots,n$; $n \in \mathbb{N}_0$, – *бесконечная треугольная матрица неотрицательных чисел, элементы которой удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_k^{(n)} \le \lambda_{k+1}^{(n)}$, $k,n = 0,1,\ldots$. *Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 1$, *то для любой* *функции* $f \in H_{\omega} \subset H_{\omega^*}$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}_0$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*} = \left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*} =$$

$$O(1) \sup_{-\infty<x,y<\infty} \frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \ln\left(1+n\lambda_n^{(n)}\right) + \lambda_n^{(n)} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}, \quad (2.54)$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}_0$ *и, зависящая, вообще говоря, от* $f \in H_{\omega}$, $\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]$ *– целая часть числа* $\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}$.

Доказательство. Как и прежде, нам необходимо оценить величину $\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*}$ в условиях теоремы. С учетом того, что $(n+1)\lambda_n^{(n)} \geq 1$, разобьём величину $G_n(x,y)$ на три части

$$G_n(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{n+1}} + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\lambda_n^{(n)}} + \int_{\lambda_n^{(n)}}^{\pi}\right) \times$$

$$\left[\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\right]\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_n^{(n)} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right) dt =:$$

$$\overline{\mathrm{I}}_n^{(1)}(x,y) + \overline{\mathrm{I}}_n^{(2)}(x,y) + \overline{\mathrm{I}}_n^{(3)}(x,y). \quad (2.55)$$

В силу неравенств (2.20), (2.21) и соотношения $\left|\sin nt\right| \le nt$, $t \ge 0$, на основании условий теоремы находим

$$\left|\overline{\mathrm{I}}_n^{(1)}(x,y)\right| \le$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n+1}} \frac{\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{1-\beta/\eta}\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{\beta/\eta}}{\sin t/2}\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin(k+1/2)t\right|dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\int_0^{\frac{1}{n+1}}\frac{\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}}{t}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}kt\right)dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\int_0^{\frac{1}{n+1}} n\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\cdot\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\cdot\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)^{1-\beta/\eta}. \qquad (2.56)$$

Далее заметим, что

$$\left|\overline{\mathrm{I}}_n^{(2)}(x,y)\right| \le$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\lambda_n^{(n)}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\cdot\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}}{\sin t/2}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\lambda_n^{(n)}}\frac{\left(\omega(f;t)\right)^{1-\beta/\eta}}{t}dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\ln\left(1+(n+1)\lambda_n^{(n)}\right). \quad (2.57)$$

Пользуясь преобразованием Абеля (2.13) и неравенствами (2.10), получаем

$$\left|\overline{\mathrm{I}}_n^{(3)}(x,y)\right| \le$$

$$\frac{\lambda_n^{(n)}}{2\pi}\int\limits_{\lambda_n^{(n)}}^{\pi}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\cdot\left(\omega\left(f;t\right)\right)^{1-\beta/\eta}}{t^2}dt=$$

$$O(1)\lambda_n^{(n)}\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\int\limits_{\lambda_n^{(n)}}^{\pi}\frac{\left(\omega\left(f;t\right)\right)^{1-\beta/\eta}}{t^2}dt=$$

$$O(1)\lambda_n^{(n)}\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\int\limits_{1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\left(\omega\left(f;\frac{1}{t}\right)\right)^{1-\beta/\eta}dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta}. \qquad (2.58)$$

Объединяя соотношения (2.56), (2.57), (2.58) из (2.55) находим, что

$$\left|G_n(x,y)\right|=O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\ln\left(1+n\lambda_n^{(n)}\right)+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=0}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}.$$

Легко видеть, что

$$\left\|G_n(x)\right\|_C=O(1)\left\{\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)\ln\left(1+(n+1)\lambda_n^{(n)}\right)+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

С учетом последних двух соотношений окончательно получаем, что

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*}=\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\ln\left(1+n\lambda_n^{(n)}\right)+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}.$$

Теорема 2.2.5 доказана.

Положим в условиях теоремы 2.2.5 $\omega^*(t)=t^\beta$, $\omega(t)=t^\alpha$, $0\le\beta<\alpha\le1$, $\eta=\alpha$. Тогда, учитывая, что в этом случае

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}=1,$$

получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2.9. *Пусть, элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям 2.4 и кроме того,* $\lambda_k^{(n)}\le\lambda_{k+1}^{(n)}$, $k,n=0,1,\ldots$ *Тогда если* $0\le\beta<\alpha\le1$, *то для любой функции* $f\in H_\alpha\subset H_\beta$ *и для каждого* $n\in\mathbb{N}_0$ *справедливо соотношение*

$$\left\|G_n(f;\lambda)\right\|_\beta=\left\|f-U_n(f)\right\|_\beta=$$

$$\begin{cases}O(1)\left\{\left(\lambda_n^{(n)}\right)^{\alpha-\beta}\ln\left(1+(n+1)\lambda_n^{(n)}\right)+\left(\lambda_n^{(n)}\right)^{\alpha-\beta}\right\}, & 0<\alpha-\beta<1,\\ O(1)\lambda_n^{(n)}\ln\left(\dfrac{1}{\lambda_n^{(n)}}+n\right), & \alpha-\beta=1.\end{cases}$$

При $\alpha=1$, $\beta>0$, полученные оценки улучшают по порядку соответствующие оценки из работ [35:2], [50:1].

5. Перейдем теперь к рассмотрению одной из модификаций обобщенного гёльдерового пространства. Пусть

$$\dot\Delta_h^2 f(x):=f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=\varphi_x(h)$$

– вторая симметричная разность и

$$\omega_2(f;t)=\sup_{0<h\le t}\left\|\dot\Delta_h^2 f\right\|_C. \tag{2.59}$$

Величина (2.29) определяет модуль гладкости функции $f\in C$.

Пусть, далее, $\omega(t)$ положительная и неубывающая функция при $t>0$, $H_{\omega,\infty,2}=H_{\omega,2}$ – пространство непрерывных 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C}{\omega(h)}<\infty \tag{2.60}$$

с нормой

$$\|f\|_{\omega,2}=\|f\|_{\omega,\infty,2}:=\|f\|_C+\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C}{\omega(h)}. \tag{2.61}$$

Аналогично предложению 1.4.1 доказывается, что $H_{\omega,2}$ является B-пространством относительно нормы (2.61) с полунормой (2.60). Как следует из следствия 1.6.1, если $\omega(t)=t^{\alpha}$, где $0<\alpha<1$, то $H_{\omega,2}=H_{\omega}$, где $H_{\omega}:=H_{\omega,1}$, причем нормы в этих пространствах эквивалентны. Напомним (§1.1.6), что если существует последовательность $\{h_i\}\to 0$ такая, что $h_i\omega^{-n}(h_i)\to 0$, то включение $f\in H_{\omega,n}$, где $n=1,2$, влечет условие $f=const$. Классы насыщения для средних Фейера, как известно, были определены Г. Алексичем и М. Заманским в случае непрерывных функций. Подобные вопросы в случае некоторых B-пространств, включающих гёльдеровы пространства 2π-периодических функций, рассматривались З. Дицианом и К. Ивановым (Z. Ditzian, K. Ivanov [13])

Заметим, что следствие 2.2.8 в случае средних Фейера $\sigma_n(f)$, не дает достаточных условий, при которых средние $\sigma_n(f)$ приближают функцию в метрике пространства H_β с оптимальным порядком $1/n$. Однако, как будет показано ниже, данный порядок приближения средними Фейера достигается в пространстве $H_{\omega^*,2}$.

Теорема 2.2.6. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям 2.4. Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 2$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = \left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}, \tag{2.62}$$

$$n \in \mathbb{N}_0.$$

В качестве следствия оценки (2.62) приведем следующее утверждение относительно средних Фейера в пространстве $H_{\beta,2}$.

Следствие 2.2.10. *Пусть* $\omega(t) = t^\alpha$, $\omega^*(t) = t^\beta$, $0 \le \beta < \alpha \le 2$, $\eta = \alpha$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\alpha,2}$ *справедливы соотношения*

$$\left\|f - \sigma_n(f)\right\|_{\beta,2} = \begin{cases} O\left(n^{\beta-\alpha}\right), & \alpha - \beta < 1, \\ O\left(n^{-1}\ln n\right), & \alpha - \beta = 1, \ n > 1, \\ O\left(n^{-1}\right), & \alpha - \beta > 1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2.2.6. Анализируя доказательство теоремы 2.2.1 легко видеть, что

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_C = \left\|U_n(f)-f\right\|_C =$$

$$O(1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2(f;t)dt + \sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\int_1^{n+1}\omega_2(f;\pi/t)\,dt\right\},$$

где $\omega_2(f;\cdot)$ – модуль гладкости f, определенный равенством (2.59).

Принимая во внимание, что $\dot{\Delta}_h^2(U_n - f) = \dot{\Delta}_h^2 U_n - \dot{\Delta}_h^2 f$, в силу неравенств

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right) \le 4\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C,$$

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2;t\right)\le 4\omega_2\left(f;t\right),\quad h>0,$$

будем иметь

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n\left(f,\lambda\right)\right\|_C=\left\|\dot{\Delta}_h^2\left(U_n-f\right)\right\|_C=$$

$$O(1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)dt+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\int_1^{n+1}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{t}\right)dt\right\}=$$

$$O(1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)\right)^{1-\beta/\eta}\cdot\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)\right)^{\beta/\eta}dt+\right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\int_1^{n+1}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{t}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\cdot\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{t}\right)\right)^{\beta/\eta}dt\right\}=$$

$$O(1)\left\{\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C^{\beta/\eta}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega_2\left(f;t\right)\right)^{1-\beta/\eta}dt+\right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C^{\beta/\eta}\int_1^{n+1}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{t}\right)\right)^{1-\beta/\eta}dt\right\}=O(1)\left(\omega\left(h\right)\right)^{\beta/\eta}\times$$

$$\left\{\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\int_1^{n+1}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{t}\right)\right)^{1-\beta/\eta}dt\right\}=$$

$$O(1)\left(\omega\left(h\right)\right)^{\beta/\eta}\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\},$$

$$h>0,\quad 0\le\beta<\eta\le 1.$$

Аналогично этому будем иметь

$$\left\|U_n\left(f\right)-f\right\|_C=$$

$$O(1)\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}.$$

Отсюда, вследствие определения нормы (2.61) окончательно получаем

$$\left\|G_n(f,\lambda)\right\|_{\omega^*,2}=\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,2}=O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}.$$

Рассмотрим аналог теоремы 2.2.4 об оценке снизу в пространстве $H_{\omega,2}$.

Теорема 2.2.7. *Пусть* $\omega(\cdot)$ *является функцией со свойствами модуля непрерывности, удовлетворяющей условию*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\omega(1/k)\le A\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.63}$$

а $\omega^*(\cdot)$ *– положительная и возрастающая на* $(0,\infty)$ *функция. Тогда существует функция* $f_0\in H_{\omega,2}\subset H_{\omega^*,2}$ *такая, что*

$$\left\|G_n(f,\lambda)\right\|_{\omega^*,2}=\left\|U_n(f_0)-f_0\right\|_{\omega^*,2}\ge$$

$$B\inf_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}, \tag{2.64}$$

где $0\le\beta<\eta\le 2$, B *– некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Для положительной монотонно убывающей к нулю последовательности чисел $\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$, согласно известной теореме С.Н. Бернштейна (см., напр., [57, с. 9]) найдется функция $f_0\in C$, что $E_n(f_0)=\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$. Применяя теорему H для функции f_0, находим

$$\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2\left(f_0-U_n\left(f_0\right)\right)\right\|_C}{\omega^*\left(h\right)}\geq B_2\frac{E_n\left(f_0\right)}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}=$$

$$B_2\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}=B_2\frac{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\geq$$

$$B_2\inf_{h>0}\frac{\left(\omega\left(h\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(h\right)}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\geq$$

$$B_2\inf_{h>0}\frac{\left(\omega\left(h\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(h\right)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}.$$

Оценка (2.64) установлена. Остается показать, что $f_0\in H_{\omega,2}$. В силу неравенства Стечкина ([54])

$$\omega_2\left(f;\frac{1}{k+1}\right)\leq\frac{A_1}{\left(k+1\right)^2}\sum_{i=0}^{k}\left(i+1\right)E_i\left(f\right)$$

и неравенства (2.63) получаем

$$\omega_2\left(f_0;\frac{1}{k+1}\right)\leq\frac{A_1}{\left(k+1\right)^2}\sum_{i=0}^{k}\left(i+1\right)E_i\left(f_0\right)=$$

$$\frac{A_1}{\left(k+1\right)^2}\sum_{i=0}^{k}\left(i+1\right)\omega\left(\frac{\pi}{i+1}\right)\leq$$

$$\frac{A_2}{\left(k+1\right)^2}\sum_{i=0}^{k}\left(i+1\right)\omega\left(\frac{1}{i+1}\right)\leq A_2\omega\left(\frac{1}{k+1}\right),$$

т.е. $f_0\in H_{\omega,2}$. Теорема 2.2.7 доказана.

Установим теперь аналог теоремы 2.2.2 в случае пространств $H_{\omega^*,2}$.

Теорема 2.2.8. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4). Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 2$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *и для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливо соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = \left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*,2} = O(1) \sup_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\omega(1/k))^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{k} \sum_{r=0}^{k+1} \lambda_r^{(n)} + \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \sum_{r=k}^{n} \left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \right\}. \tag{2.65}$$

Доказательство. Анализируя доказательство теоремы 2.2.2 легко понять, что

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_C = \left\|U_n(f) - f\right\|_C = O(1) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega_2(f;t)\,dt + \right.$$

$$\left. \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\omega_2(f;t)}{t} \left(\sum_{r=0}^{\tau} \lambda_r^{(n)} + \frac{1}{t} \sum_{r=\tau}^{n} \left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \right) dt \right\}. \tag{2.66}$$

Учитывая приведенные ранее оценки модуля гладкости, находим

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n(f,\lambda)\right\|_C = \left\|\dot{\Delta}_h^2 (U_n - f)\right\|_C =$$

$$O(1) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right) dt + \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)}{t} \left(\sum_{r=0}^{\tau} \lambda_r^{(n)} + \frac{1}{t} \sum_{r=\tau}^{n} \left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \right) dt \right\} =$$

$$O(1)\left\{\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C^{\frac{\beta}{\eta}} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \left(\omega_2(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} dt + \right.$$

$$\left.\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C^{\frac{\beta}{\eta}} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\left(\omega_2(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t} \left(\sum_{r=0}^{\tau} \lambda_r^{(n)} + \frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n} \left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right) dt \right\} \quad (2.67)$$

Рассуждая в отношении (2.67) также, как при получении соотношений (2.27) и (2.28), приходим к следующему соотношению

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n(f,\lambda)\right\|_C = O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \times \left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\omega(1/k)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{k} \sum_{r=0}^{k+1} \lambda_r^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \sum_{r=k}^{n} \left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \right\}. \quad (2.68)$$

Продолжая оценивать соотношение (2.66) подобно (2.27) и (2.28), получаем

$$\left\|G_n(f,\lambda)\right\|_C = O(1)\left\{\omega\left(\frac{1}{n+1}\right) + \right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(1/k)}{k} \sum_{r=0}^{k+1} \lambda_r^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \sum_{r=k}^{n} \left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \right\}. \quad (2.69)$$

Объединяя оценки (2.66) (2.68)и (2.69), приходим к требуемому соотношению (2.65).

Аналог теоремы 2.2.3 выглядит следующим образом.

Теорема 2.2.9. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4),* $0 \le \beta < \eta \le 2$ *и модуль гладкости* $\omega_2(f;t)$ *функции* f *удовлетворяет условию*

$$\int_u^{\pi} t^{-2}\left(\omega_2(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt = O\left(H_{1-\frac{\beta}{\eta}}(u)\right), \tag{2.70}$$
$$u \to 0+, H_\gamma(u) = H_\gamma(u,\omega_2).$$

Тогда если $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$, *то для всех* $n = 0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = \left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \tag{2.71}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n = 0,1,\ldots$ *и зависящая, вообще говоря от* f, β, η.

Если, кроме того,

$$\int_0^t H_{1-\frac{\beta}{\eta}}(u)du = O\left(tH_{1-\frac{\beta}{\eta}}(t)\right), \quad \mathrm{t} \to 0+, \tag{2.72}$$

то

$$\left\|G_n(f,\lambda)\right\|_{\omega^*,2} = \left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*,2} =$$

$$O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}, \tag{2.73}$$

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \quad n = 0,1,\ldots \tag{2.74}$$

Доказательство. Анализируя доказательство соотношения (2.8), можно сделать вывод о справедливости такого соотношения

$$\left\|G_n\left(f,\Lambda\right)\right\|_C = O(1)\times$$

$$\left\{ n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega_2\left(f;t\right)dt + \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\omega_2\left(f;t\right)}{t^2}dt \right\}. \qquad (2.75)$$

В силу того, что $\dot{\Delta}_h^2\left(U_n - f\right) = \dot{\Delta}_h^2 U_n - \dot{\Delta}_h^2 f$, принимая во внимание неравенства

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right) \le 4\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C,$$

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2;t\right) \le 4\omega_2\left(f;t\right) \le 4K\omega\left(t\right),\ h>0,$$

на основании (2.75) и условия (2.70) будем иметь

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2\left(U_n\left(f\right) - f\right)\right\|_C = O(1)\times$$

$$\left\{ n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)dt + \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)}{t^2}dt \right\} =$$

$$O(1)\left\{ \left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C^{\frac{\beta}{\eta}} n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \left(\omega_2\left(f;t\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} dt + \right.$$

$$\left. \left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C^{\frac{\beta}{\eta}} \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\left(\omega_2\left(f;t\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt \right\} =$$

$$O(1)\left(\omega\left(h\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \left\{ n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \left(\omega_2\left(f;t\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} dt + \right.$$

$$\left. \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\left(\omega_2\left(f;t\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt \right\} =$$

$$O(1)(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}=$$

$$O(1)(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}. \qquad (2.76)$$

Продолжая оценивать (2.75) подобно (2.76), получаем

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_C=\left\|U_n(f)-f\right\|_C=$$

$$O(1)\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}. \qquad (2.77)$$

Сопоставляя оценки (2.76) и (2.77), приходим к требуемому соотношению (2.71).

Перейдем к выводу оценки (2.73). Анализ оценки (2.10) показывает, что

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_C=O(1)\left\{\int_0^{\delta_n}\frac{\omega_2(f;t)}{t}dt+\delta_n\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{\omega_2(f;t)}{t^2}dt\right\}, \qquad (2.78)$$

где $\delta_n=\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|$.

Из (2.78) следует, что

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n(f,\Lambda)\right\|_C=\left\|\dot{\Delta}_h^2(U_n-f)\right\|_C=$$

$$O(1)\left\{\int_0^{\delta_n}\frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)}{t}dt+\delta_n\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)}{t^2}dt\right\}=$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\int_0^{\delta_n}\frac{\left(\omega_2(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t}dt+\delta_n\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{\left(\omega_2(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt\right\}. \qquad (2.79)$$

На основании соотношения (2.13) леммы 2.2.1 и условия (2.70) из (2.79) находим

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n(f,\Lambda)\right\|_C=$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}. \qquad (2.80)$$

Аналогично этому, продолжая оценивать соотношение (2.78), получаем

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_C=O(1)\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}. \qquad (2.81)$$

С учетом (2.80), (2.81) убеждаемся в справедливости соотношения (2.73).

Для доказательства (2.74) заметим, что соотношения (2.32) и (2.34) содержат в себе следующее соотношение (при $\beta=0$)

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_C=O(1)\times$$

$$\left\{n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2(f;t)dt+\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\left|\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2(f;t)}{t^2}dt\right\}. \qquad (2.82)$$

На основании (2.82)

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n(f;\Lambda)\right\|_C = \left\|\dot{\Delta}_h^2 (U_n - f)\right\|_C = O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \times$$

$$\left\{ n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \left(\omega_2(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} dt + \sum_{k=0}^{n} \left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\left(\omega_2(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2} dt \right\}.$$

Далее как и при доказательстве оценок (2.32), (2.34), с учётом оценки

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_C = O(1)\left\{ \sum_{k=0}^{n} \left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \right\},$$

полученной из (2.82) по аналогии с (2.32) и (2.34), приходим к оценке (2.74).

Теорема полностью доказана.

Установим ряд оценок, вытекающих из доказанных выше теорем, являющихся аналогами соотношений (2.43) и (2.44).

Следствие 2.2.11. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n = \left(\lambda_k^{(n)}\right) \in HBVS$. *Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 2$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *и для всех* $n = 0, 1, \ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = \left\|\dot{\Delta}_h^2 (U_n - f)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_n^{(n)} \sum_{k=0}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \right\}. \qquad (2.83)$$

Следствие 2.2.12. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n = \left(\lambda_k^{(n)}\right) \in HBVS$. *Пусть, далее,* $0 \le \beta < \eta \le 2$ *и модуль гладкости* $\omega_2(f;t)$ *функции* f

удовлетворяет условию (2.70). Тогда если $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$, *то для всех* $n = 0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_n^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \qquad (2.84)$$

если, кроме того, выполняется условие (2.72), то

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left\{\lambda_n^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right\}, \qquad (2.85)$$

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left\{\lambda_n^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \qquad (2.86)$$

Оценки (2.85), (2.86) являются аналогами соотношений (2.40), (2.41).

Следствие 2.2.13. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n = \left(\lambda_k^{(n)}\right) \in RBVS$. *Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 2$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *и для всех* $n = 0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_0^{(n)}\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (2.87)$$

Следствие 2.2.14. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n \in RBVS$. *Пусть, далее,* $0 \le \beta < \eta \le 2$ *и модуль гладкости* $\omega_2(f;t)$ *функции* f *удовлетворяет условию (2.70). Тогда если* $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$, *то для всех* $n = 0,1,\ldots$

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_0^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \tag{2.88}$$

если, кроме того, выполняется условие (2.72), то

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \lambda_0^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\lambda_0^{(n)}\right), \tag{2.89}$$

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \lambda_0^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \tag{2.90}$$

Оценки (2.88), (2.89), (2.90) являются аналогами соотношений (2.45) и (2.46).

Следствие 2.2.15. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.4) и, кроме того,* $\lambda_n \in RBVS$. *Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 2$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *и для всех* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\left\|G_n(f,\lambda)\right\|_{\omega^*,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\omega(1/k)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}\right\}.$$

Полагая в следствии 2.2.12 $\omega^*(t)=t^\beta$, $\omega(t)=t^\alpha$, $H(t)=O\left(t^{\alpha-\beta-1}\right)$ при $\alpha-\beta<1$, а также $H(t)=O\left(\ln\frac{\pi}{t}\right)$, $t\to 0+$, при $\alpha-\beta=1$ $(\alpha=1,\beta=0)$ и, наконец, $H(t)=O(1)$ при $\alpha-\beta>1$, для средних Фейера $\sigma_n(f)$ получаем утверждение следствия 2.2.9.

§2.3. Группы отклонений рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах

Введем в рассмотрение группы отклонений сумм Фурье, определенные при помощи равенства

$$h_v^{(n)}(f;x;\alpha):=\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\rho_k(f;x),\quad n\in\mathbb{N}_0, \qquad (3.1)$$

где $\alpha=\left(\alpha_n(v)\right)$, $n\in\mathbb{N}_0$, – произвольная последовательность неотрицательных функций определенных на множестве $V\subset\mathbb{R}$, $\rho_n(f;x):=f(x)-S_n(f;x)$.

В данном параграфе устанавливаются оценки скорости сходимости величин (3.1) для функций $f\in H_\omega$ в метрике обобщенного гёльдерова пространства H_{ω^*}, при условии $H_\omega\subset H_{\omega^*}$.

Положим

$$H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha):=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\left[\rho_k(f;x)-\rho_k(f;y)\right]. \qquad (3.2)$$

1. В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, которое не лишено, по-видимому, и самостоятельного интереса.

Лемма 2.3.1. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и* $\alpha = (\alpha_n(v))$, $n \in \mathbb{N}_0$, *– последовательность функций, невозрастающая по* $n \in \mathbb{N}$ *при каждом фиксированном* $v \in V \subset \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f \in H_\omega$ *имеет место соотношение*

$$\left|H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha)\right| =$$

$$O(1)\alpha_n(v)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}, \tag{3.3}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n, x, y *и зависящая, возможно, от* f, β, η.

Доказательство. Пусть, как и прежде,

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \tag{3.4}$$

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin t/2} \tag{3.5}$$

– n-е ядро Дирихле. В этих обозначениях получим представление

$$\rho_n(f;x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi_x(t) D_n(t)\,dt.$$

Разбивая данный интеграл на две части, с учетом определения (3.2) будем иметь

$$\left|H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha)\right| \le$$

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]D_k(t)\,dt\right| +$$

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]D_k(t)\,dt\right| =:$$

$$\mathrm{I}_1^{(n)}(f;x,y)+\mathrm{I}_2^{(n)}(f;x,y). \qquad (3.6)$$

В силу оценки

$$\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right| \le 4K\omega(|x-y|)$$

и неравенства $\left|D_k(t)\right| \le k+1 \le 2n+1$, $n \le k \le 2n$, находим, что

$$\mathrm{I}_1^{(n)}(f;x,y) \le \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|\left|D_k(t)\right|dt =$$

$$O(1)\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega(|x-y|)dt = O(1)\alpha_n(v)\omega(|x-y|). \qquad (3.7)$$

Теперь воспользуемся представлением ядра Дирихле:

$$D_n(t)=\frac{\sin nt}{2tg\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\cos nt.$$

С учетом этого имеем

$$\mathrm{I}_2^{(n)}(f;x,y) \le \left|\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]}{2tg\frac{t}{2}}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\sin ktdt\right| +$$

$$\left|\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]}{2}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\cos ktdt\right| =:$$

$$\mathrm{I}_3^{(n)}(f;x,y)+\mathrm{I}_4^{(n)}(f;x,y). \qquad (3.8)$$

В силу неравенства

$$2tg\frac{t}{2} \ge t, \quad 0 \le t \le \pi,$$

применяя преобразование Абеля

$$\left|\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\begin{Bmatrix}\sin kt\\ \cos kt\end{Bmatrix}\right| < 2\pi\alpha_n(v)t^{-1},$$

получим

$$\mathrm{I}_3^{(n)}(f;x,y) \le \frac{2}{\pi(n+1)} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|}{t^2} 2\pi\alpha_n(v)\,dt =$$

$$O(1)\frac{\alpha_n(v)}{n+1}\omega(|x-y|)\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} t^{-2}dt = O(1)\alpha_n(v)\omega(|x-y|). \quad (3.9)$$

Аналогично

$$\mathrm{I}_4^{(n)}(f;x,y) = O(1)\alpha_n(v)\omega(|x-y|). \quad (3.10)$$

Следовательно, на основании соотношений (3.7) – (3.10) из (3.6) выводим, что

$$H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha) = O(1)\alpha_n(v)\omega(|x-y|). \quad (3.11)$$

С другой стороны

$$\left|H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha)\right| \le$$

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f;x)\right| + \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f;y)\right|. \quad (3.12)$$

Известно (см., например, [30:3]), что

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f;x)\right| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\left|\rho_k(f;x)\right| \le$$

$$K\alpha_n(v)E_n(f), \quad (3.13)$$

где

$$E_n(f) = \inf_{T_n}\left\|f(x)-T_n(x)\right\|_C$$

– величина наилучшего равномерного приближения функции $f \in C$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Вследствие (3.13) и неравенства Джексона (см., напр., [56, с. 274]):

$$E_n(f) \le K\omega\left(f;\frac{1}{n+1}\right)$$

из (3.12) заключаем, что

$$H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha) = O(1)\alpha_n(v)\omega\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad (3.14)$$

Следовательно, объединяя (3.11) и (3.14), окончательно получаем

$$\left|H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha)\right| = \left|H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha)\right|^{\beta/\eta} \left|H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha)\right|^{1-\beta/\eta} =$$

$$O(1)\alpha_n(v)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}.$$

Соотношение (3.3) установлено.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $0\le\beta<\eta\le 1$ *и* $\alpha=(\alpha_n(v))$, $n\in\mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n\in\mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v\in V\subset\mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f\in H_\omega\subset H_{\omega^*}$ *имеет место соотношение*

$$\left\|h_v^{(n)}(f,\alpha)\right\|_{\omega^*} = O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}, \tag{3.15}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n\in\mathbb{N}_0$, α *и зависящая, вообще говоря, от* f, β, η.

Доказательство. Оценим величину

$$\left\|h_v^{(n)}(f;\alpha)\right\|_{\omega^*} = \left\|h_v^{(n)}(f;\alpha)\right\|_C +$$

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left|h_v^{(n)}(f;x,\alpha)-h_v^{(n)}(f;y,\alpha)\right|}{\omega^*(|x-y|)}. \tag{3.16}$$

Если $f \in H_\omega$ и $0 \le \beta < \eta \le 1$, то на основании леммы будем иметь

$$\left|h_v^{(n)}(f;x,\alpha) - h_v^{(n)}(f;y,\alpha)\right| =$$

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\left[\rho_k(f;x) - \rho_k(f;y)\right]\right| =$$

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1} n} \alpha_k(v)\left[\rho_k(f;x) - \rho_k(f;y)\right]\right| =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n+1\right)\left|\frac{1}{2^i n+1} \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1} n} \alpha_k(v)\left[\rho_k(f;x) - \rho_k(f;y)\right]\right| =$$

$$O(1)\omega\left(|x-y|\right)^{\beta/\eta}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{2^i n}(v)\left(2^i n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\} =$$

$$O(1)\omega\left(|x-y|\right)^{\beta/\eta}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} +\right.$$

$$\left. 2\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{2^i n}(v)\left(2^{i-1} n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\} =$$

$$O(1)\omega\left(|x-y|\right)^{\beta/\eta}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} +\right.$$

$$\left. \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{(k+1)}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}. \tag{3.17}$$

Стало быть, с учётом (3.17) находим

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y,<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left|h_v^{(n)}(f;x,\alpha) - h_v^{(n)}(f;y,\alpha)\right|}{\omega^*\left(|x-y|\right)} =$$

$$O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y,<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + \right.$$

$$\left. \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}, \quad v \in V. \qquad (3.18)$$

Принимая во внимание (3.13) и неравенство Джексона, будем иметь

$$\left\| h_v^{(n)}(f;\alpha) \right\|_C = O(1) \times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\,\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right\}. \qquad (3.19)$$

Из (3.16), (3.18) и (3.19) вытекает соотношение (3.15). Теорема 2.3.1 доказана.

Приведем некоторые утверждения и оценки, вытекающие из доказанной теоремы.

Полагая в соотношении (3.15) $n = 0$ приходим к следующему утверждению.

Следствие 2.3.1. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и* $\alpha = (\alpha_n(v))$, $n \in \mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n \in \mathbb{N}$ *при каждом фиксированном* $v \in V \subset \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ *имеет место соотношение*

$$\left\| h_v^{(0)}(f;\alpha) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}, \quad v\in V. \qquad (3.20)$$

Последовательность функций $\alpha=(\alpha_n(v))$, $n\in\mathbb{N}_0$, $v\in V$, можно интерпретировать как последовательность, определяющую α-метод суммирования рядов, причем как непрерывный метод, так и матричный. В частности, полагая $\alpha_k(v)=(1-v)v^k$, $0<v<1$, из (3.20) для метода Абеля получаем, что

$$\left\|(1-v)\sum_{k=0}^{\infty}v^k\rho_k(f;x)\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left\{(1-v)\sum_{k=1}^{\infty}v^k\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}. \qquad (3.21)$$

Если положим $\lambda_k(n)=\lambda_k^{(n)}=((k+1)\ln(n+1))^{-1}$ при $0\le k\le n$, $\lambda_k^{(n)}=0$ при $k>n$, найдем оценку для логарифмического метода суммирования рядов:

$$\left\|\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\rho_k(f;x)\right\|_{\omega^*}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\left\{\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}.$$

Пусть теперь

$$\lambda_k(n)=\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, & 0\le k\le n,\\ 0, & k>n.\end{cases}$$

Тогда в условиях следствия 2.3.1 имеет место соотношение

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\rho_k(f)\right\|_{\omega^*}=\|f-\sigma_n(f)\|_{\omega^*}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\},$$

установленное ранее.

Подчиним последовательность функций $\alpha=\left(\alpha_n(v)\right)$, $n\in\mathbb{N}_0$, $v\in V$, дополнительному требованию

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(v)=1,\quad v\in V. \tag{3.22}$$

Тогда на основании (3.20) мы легко получим оценки отклонений в метрике пространства H_{ω^*} линейных средних Фурье функций множества H_ω.

Следствие 2.3.2. *Пусть* $0\le\beta<\eta\le 1$ *и* $\alpha=\left(\alpha_n(v)\right)$, $n\in\mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n\in\mathbb{N}$ *при каждом фиксированном* $v\in V\subset\mathbb{R}$ *и удовлетворяющая условию (3.22). Тогда для любой функции* $f\in H_\omega\subset H_{\omega^*}$ *справедливо соотношение*

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(v)S_k(f)\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\},\quad v\in V. \tag{3.23}$$

Все приведенные выше методы суммирования рядов удовлетворяют условию (3.22).

Попутно приведем следующую оценку снизу в пространстве C. Если величина $\omega(\cdot)$ является выпуклым модулем непрерывности, то для функции

$$f_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)-\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)\cos kx,$$

которая, как известно ([30:3]) принадлежит H_ω, справедливо неравенство

$$\left\| h_v^{(n)}(f_0,\alpha) \right\|_C \geq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\,\omega\left(\frac{1}{k+1}\right), \quad v \in V.$$

В самом деле,

$$\left\| h_v^{(n)}(f_0,\alpha) \right\|_C \geq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\,\rho_k(f_0) \right\|_C \geq$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\,\rho_k(f_0;0) \geq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\,\omega\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

2. Перейдем к рассмотрению обобщенных модифицированных гёльдеровых пространств, нормы в которых определяются вторыми симметричными разностями. На этом пути докажем следующее вспомогательное утверждение, которое также не лишено самостоятельного интереса.

Лемма 2.3.2. *Пусть* $0 \leq \beta < \eta \leq 2$ *и* $\alpha = (\alpha_n(v))$, $n \in \mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n \in \mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v \in V \subset \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\omega,2}$ *имеет место соотношение*

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v)\,\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right) \right\|_C =$$

$$O(1)\,\alpha_k(v)\left(\omega(h)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}, \; n \in \mathbb{N}_0,\; v \in V, \tag{3.24}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n, x, y *и зависящая, вообще говоря, от* f, β, η.

Доказательство. Анализируя доказательство леммы 2.3.1 нетрудно видеть, что

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v)\,\rho_k(f;x) \right| \leq$$

$$\frac{2n+1}{\pi}\alpha_n(v)\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2(f;t)dt+4\alpha_n(v)\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2(f;t)}{t^2}dt.$$

Отсюда

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n-1}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f;x\right)\right|\le$$

$$\frac{2n+1}{\pi}\alpha_n(v)\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)dt+4\alpha_n(v)\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)}{t^2}dt.$$

В силу того, что

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)\le 4\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C=O(1)\omega(h),$$

будем иметь

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_C=O(1)\alpha_n(v)\omega(h). \quad (3.25)$$

С другой стороны на основании неравенства (3.13) находим

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_C=$$

$$O(1)\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f)\right\|_C=O(1)\alpha_n(v)E_n(f),\quad v\in V.$$

Применяя неравенство Джексона-Стечкина ([54], [57, с. 8]),

$$E_n(f)\le C_k\omega_k\left(f;\frac{1}{n+1},\right)$$

где $\omega_k(f;\cdot)$ – модуль непрерывности k-го порядка, при $k=2$ для любого элемента $f\in H_{\omega,2}$ находим

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_C=O(1)\alpha_n(v)\omega\left(\frac{1}{n+1}\right). \quad (3.26)$$

Объединяя соотношения (3.25) и (3.26) приходим к соотношению (3.24).

Отправляясь от леммы 2.3.2 покажем справедливость утверждения относительно скорости сходимости групп отклонений в пространстве $H_{\omega,2}$.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 2$ *и* $\alpha = (\alpha_n(v))$, $n \in \mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n \in \mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v \in V \subset \mathbb{R}$. *Тогда для любого элемента* $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *справедливо соотношение*

$$\left\| h_v^{(n)}(f;\alpha) \right\|_{\omega^*,2} = O(1) \sup_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{ (n+1)\alpha_n(v) \left(\omega\left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1-\beta/\eta} + \right.$$

$$\left. \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v) \left(\omega\left(\frac{1}{k+1} \right) \right)^{1-\beta/\eta} \right\}, \ n \in \mathbb{N}_0, \ v \in V. \tag{3.27}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}_0$, α *и зависящая, вообще говоря, от* f, β, η.

Доказательство. Требуется оценить величину

$$\left\| h_v^{(n)}(f;\alpha) \right\|_{\omega^*,2} = \left\| h_v^{(n)}(f;\alpha) \right\|_C + \sup_{h>0} \frac{\left\| \dot{\Delta}_h^2 h_v^{(n)}(f;\alpha) \right\|_C}{\omega^*(h)}. \tag{3.28}$$

Пусть $f \in H_{\omega,2}$ и $0 \le \beta < \eta \le 1$. Тогда на основании соотношения (3.24) леммы 2.3.2 будем иметь

$$\left\| \dot{\Delta}_h^2 h_v^{(n)}(f;\alpha) \right\|_C = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) \rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f \right) \right\|_C =$$

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1} n} \alpha_k(v) \rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f \right) \right\|_C =$$

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^i n + 1 \right) \frac{1}{2^i n + 1} \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1} n} \alpha_k(v) \rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f \right) \right\|_C \le$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n+1\right)\left\|\frac{1}{2^i n+1}\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1} n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_C =$$

$$O(1)(\omega(h))^{\beta/\eta}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)\left(2^i n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}=$$

$$O(1)(\omega(h))^{\beta/\eta}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\right.$$

$$\left.2\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)\left(2^i n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}=$$

$$O(1)(\omega(h))^{\beta/\eta}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}. \tag{3.29}$$

Ясно, что если $f\in H_{\omega,2}$, то

$$\left\|h_v^{(n)}(f;\alpha)\right\|_C=O(1)\times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right\}. \tag{3.30}$$

Сопоставляя (3.28), (3.29), (3.30) получаем (3.27). Теорема 2.3.2 доказана.

Пользуясь теоремой Н при $m=2$, $p=\infty$, рассуждая аналогично доказательству теоремы 2.2.4, приходим к такому утверждению.

Теорема 2.3.3. *Пусть величины* $\omega(\cdot)$, $\omega^*(\cdot)$ *удовлетворяют условиям теоремы 2.2.4 и* $\alpha=\left(\alpha_n(v)\right)$, $n\in\mathbb{N}_0$, *– последова-*

тельность неотрицательных функций, удовлетворяющих условиям:

$\alpha_k(v)=0$, $k\ge n+1$, $v\in V$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k(v)=1$, $v\in V$. *Тогда существует функция* $f_0\in H_{\omega,2}$ *такая, что*

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(v)\rho_k(f_0)\right\|_{\omega^*,2}\ge K\inf_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}.$$

§2.4. Сильная аппроксимация непрерывных функций в обобщённом гёльдеровом пространстве

Ниже устанавливаются утверждения, содержащие оценки α-средних последовательности отклонений непрерывных 2π-периодических функций сумм Фурье (сильной аппроксимации) на множестве H_ω в метрике гёльдерова пространства H_{ω^*}.

Объектом исследования являются группы отклонений рядов Фурье вида

$$R_{v,n}^{(q)}(f;x)=R_{v,n}^{(q)}(f;x;\alpha):=\left(\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q}, \quad (4.1)$$

где $\rho_n(f;x)=f(x)-S_n(f;x)$, $q>0$, $v\in V\subset\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Величины (4.1), характеризующие функционалы сильной суммируемости рядов Фурье, будем называть α-средними последовательности отклонений или сильными α-средними.

Введем в рассмотрение группы отклонений в виде сильных средних Валле Пусена

$$h_n^{(q)}(x;y)=h_n^{(q)}(f;x;y):=$$

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left|\rho_k(f;x)-\rho_k(f;y)\right|^q\right\}^{1/q},\quad n\in\mathbb{N}_0. \quad (4.2)$$

Относительно величины (4.2) справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.4.1. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_\omega$, *для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *и для всех* $x, y \in \mathbb{R}$ *имеет место соотношение*

$$h_n^{(q)}(x;y) = O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}, \quad q>0, \tag{4.3}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}_0$, $x, y \in \mathbb{R}$ *и зависящая, вообще говоря, от* $q > 0$ *и* $f \in H_\omega$.

Доказательство. В силу известного неравенства для средних [61, с. 41]

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} c_k^{q_1}\right\}^{\frac{1}{q_1}} \le \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} c_k^{q_2}\right\}^{\frac{1}{q_2}},$$

где $c_k > 0$, $0 < q_1 < q_2$ будем считать, что $q \ge 2$. Отправляясь от равенства

$$\rho_k(f;x) - \rho_k(f;y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\right] D_k(t),$$

где $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, $D_k(t)$ – ядро Дирихле, в силу неравенства Минковского для сумм ([61, с. 46]) будем иметь

$$h_n^{(q)}(x;y) = \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\right] D_k(t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \left[\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\right] D_k(t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left|\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \left[\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\right] D_k(t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q} =:$$

$$J_{n,1}^{(q)}(x;y)+J_{n,2}^{(q)}(x;y). \qquad (4.4)$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части (4.4) с учетом неравенств (2.20) и условий леммы.

Поскольку $|D_k(t)|\le k+1\le 2n+1$, $n\le k\le 2n$, в силу (2.20) находим, что

$$J_{n,1}^{(q)}(x;y)\le\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)||D_k(t)|dt\right)^q\right\}^{1/q}=$$

$$O(1)\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left(n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega(|x-y|)dt\right)^q\right\}^{1/q}=$$

$$O(1)\omega(|x-y|). \qquad (4.5)$$

Воспользовавшись представлением ядра $D_k(t)$:

$$D_k(t)=\frac{\sin kt}{2tg(t/2)}+\cos kt.$$

получаем

$$J_{n,2}^{(q)}(x;y)\le\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left|\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)]}{2tg\,t/2}\sin ktdt+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)]}{2}\cos ktdt\right|^q\right\}^{1/q}.$$

Положим

$$\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n):=\begin{cases}\dfrac{\varphi_x(t)-\varphi_y(t)}{2tg\,t/2}, & t\in[\pi/(n+1),\pi],\\ 0, & t\in[-\pi,\pi]\setminus[\pi/(n+1),\pi],\end{cases}$$

$$\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n):=\begin{cases}\dfrac{\varphi_x(t)-\varphi_y(t)}{2}, & t\in\left[\pi/(n+1),\pi\right],\\ 0, & t\in[-\pi,\pi]\setminus\left[\pi/(n+1),\pi\right],\end{cases}$$

$$\Phi_{x,y}^{(i)}(t,n)=\Phi_{x,y}^{(i)}(t+2\pi,n),\quad t\in\mathbb{R},\quad i=1,2.$$

С учетом принятых обозначений получим

$$J_{n,2}^{(q)}(x;y)\le\left\{\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{k=n}^{2n}\left|\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\sin ktdt+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\cos ktdt\right|^q\right\}\right\}^{1/q}=$$

$$2\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left|b_k\left(\Phi_{x,y}^{(1)}\right)+a_k\left(\Phi_{x,y}^{(2)}\right)\right|^q\right\}^{1/q},$$

где $a_k(g)$, $b_k(g)$ – коэффициенты Фурье функции $g(\cdot)$.

Применяя неравенство Минковского к правой части последнего равенства, находим

$$J_{n,p}^{(2)}(x;y)=2\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left|b_k\left(\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\right)\right|^q\right\}^{1/q}+$$

$$2\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left|a_k\left(\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\right)\right|^q\right\}. \tag{4.6}$$

Далее, вследствие неравенства

$$2tg\frac{t}{2}\ge t,\quad 0\le t\le\pi, \tag{4.7}$$

функция $\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)$ при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}_0$ принадлежит пространству Lp, $1<p\le 2$. Функция $\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)$, очевидно, также принадлежит пространству Lp'. Используя неравенство Хаусдорфа-Юнга [22:1, с. 153], из (4.6) получаем

$$J_{n,2}^{(q)}(x;y) \le \frac{2}{(n+1)^{1/q}}\left(\left\|\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\right\|_p + \left\|\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\right\|_p\right),$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{4.8}$$

Принимая во внимание соотношение (4.7), находим

$$\left\|\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\right\|_p = \left(\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t)-\varphi_y(t)}{2tg(t/2)}\right|^p dt\right)^{1/p} =$$

$$O(1)n^{\frac{1}{q}}\omega(|x-y|). \tag{4.9}$$

Аналогично получаем

$$\left\|\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\right\|_p = O(1)\omega(|x-y|). \tag{4.10}$$

Сопоставляя соотношения (4.8)-(4.10), находим

$$J_{n,2}^{(q)}(x;y) = O(1)\omega(|x-y|). \tag{4.11}$$

Объединяя (4.4), (4.5) и (4.11), заключаем, что

$$h_n^{(q)}(x;y) = O(1)\omega(|x-y|), \tag{4.12}$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n, x, y.

С другой стороны, в силу неравенства Минковского для сумм будем иметь

$$h_n^{(q)}(x;y) \le \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left(|\rho_k(f;x)|+|\rho_k(f;y)|\right)^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}|\rho_k(f;x)|^q\right\}^{1/q} + \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}|\rho_k(f;y)|^q\right\}^{1/q}. \tag{4.13}$$

На основании же известного результата Л. Лейндлера (L. Leindler [30:1, 3], см, также, [8:1]):

$$\left\|\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}|\rho_k(f;x)|^q\right\}^{1/q}\right\|_C \le K_q E_n(f), \;\; K_q = K(q), \;\; q>0,$$

в сочетании с неравенством Джексона

$$E_n(f) \le A\omega\left(f; \frac{1}{n+1}\right),$$

получаем оценку

$$\left\| \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \left| \rho_k(f;x) \right|^q \right\}^{1/q} \right\|_C \le K_q^{(1)} \omega\left(f; \frac{1}{n+1}\right). \qquad (4.14)$$

Сопоставляя соотношения (4.13) и (4.14) находим, что

$$h_n^{(q)}(x,y) = O(1)\,\omega\left(\frac{1}{n+1}\right). \qquad (4.15)$$

Таким образом, вследствие соотношений (4.12) и (4.15) окончательно получаем

$$h_n^{(q)}(x,y) = \left(h_n^{(q)}(x;y)\right)^{\beta/\eta} \left(h_n^{(q)}(x;y)\right)^{1-\beta/\eta} =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta} \omega\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-\beta/\eta}, \quad 0 \le \beta < \eta \le 1.$$

Лемма 2.4.1 полностью доказана.

Основное утверждение данного параграфа содержится в следующей теореме.

Теорема 2.4.1. *Пусть последовательность неотрицательных функций* $\alpha = \left(\alpha_k(v)\right)$ *такова, что при каждом фиксированном значении* $v \in V \subset \mathbb{R}$ *числа* $\alpha_k(v)$ *не возрастают по индексу* k *и* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$, *для каждого* $q \ge 1$, *для всех* $v \in V$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\left\| R_{v,n}^{(q)}(f;x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x,y < \infty \\ x \ne y}} \frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)} \times$$

$$\left\{ (n+1)\alpha_n(v) \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right) \right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)} + \right.$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\Bigg\}^{1/q}, \tag{4.16}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n\in\mathbb{N}_0$, $v\in V$ *и зависящая, вообще говоря, от* β, η, q *и* $f\in H_\omega$.

Доказательство. Оценим величину

$$\left\|R_{v,n}^{(q)}(f)\right\|_{\omega^*}=\left\|R_{v,n}^{(q)}(f)\right\|_C+$$

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left|R_{v,n}^{(q)}(f;x)-R_{v,n}^{(q)}(f;y)\right|}{\omega^*(|x-y|)},\quad v\in V,\ \ n\in\mathbb{N}_0. \tag{4.17}$$

Применяя неравенство

$$\left|\|a\|_{l_q}-\|b\|_{l_q}\right|\le\|a-b\|_{l_q},\quad q\ge1,$$

где

$$l_q=\left\{a=(a_k):\|a\|_{l_q}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^q\right)^{1/q}<\infty\right\},$$

с учетом условий на $\alpha_k(v)$ для любых x, y получаем

$$\left|R_{v,n}^{(q)}(f;x)-R_{v,n}^{(q)}(f;y)\right|\le$$

$$\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left|\rho_k(f;x)-\rho_k(f,y)\right|^q\right\}^{1/q}=$$

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n}\alpha_k(v)\left|\rho_k(f;x)-\rho_k(f,y)\right|^q\right\}^{1/q}\le$$

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n}\left|\rho_k(f;x)-\rho_k(f,y)\right|^q\right\}^{1/q}. \tag{4.18}$$

Пусть $0\le\beta<\eta\le1$. Тогда на основании соотношения (4.3) леммы 2.4.1 из (4.18) получаем

$$\left|R_{v,n}^{(q)}(f;x)-R_{v,n}^{(q)}(f;y)\right|=O(1)\times$$

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)\left(2^i n+1\right)\left[\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n+1}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right]^q\right\}^{1/q}=$$

$$O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\times$$

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n+1}(v)\left(2^i n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}=$$

$$O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}+\right.$$

$$\left.2\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)\left(2^{i-1} n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}=$$

$$O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}+\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}=$$

$$O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}.$$

Таким образом,

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left|R_{v,n}^{(q)}(f;x)-R_{v,n}^{(q)}(f;y)\right|}{\omega^{*}(|x-y|)} =$$

$$O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^{*}(|x-y|)} \times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)} +\right.$$

$$\left.\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}, \quad n\in\mathbb{N}_0,\ v\in V. \qquad (4.19)$$

Аналогично будем иметь

$$\left\|R_{v,n}^{(q)}(f;x)\right\|_C = O(1)\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{q} +\right.$$

$$\left.\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q}\right\}^{1/q}. \qquad (4.20)$$

Из соотношений (4.17), (4.19) и (4.20) приходим к соотношению (4.16). Теорема 2.4.1 доказана.

Прежде чем перейти к формулировке следующего утверждения дадим ещё одно определение.

Пусть $A^{(r)}$, $r>1$, – множество последовательностей неотрицательных функций $\alpha=(\alpha_n(v))$, $v\in V$, $n\in\mathbb{N}_0$, таких, что для любого четного n выполняется неравенство

$$\left\{\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k^r(v)\right\}^{\frac{1}{r}} \le Cn^{\frac{1}{r}-1}\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n}\alpha_k(v),\ v\in V.$$

По поводу определения множества $A^{(r)}$ можно обратиться к работе [8:2], (см. также [40:2]).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $\alpha \in A^{(r)}$, $r > 1$, $0 \leq \beta < \eta \leq 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\omega} \subset H_{\omega^*}$, *для каждого* $q \geq 1$ *и всех* $n \in \mathbb{N}_0$, $v \in V$ *имеет место соотношение*

$$\left\| R_{v,2n}^{(q)}(f) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)} \right\}^{\frac{1}{q}},$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}_0$, $v \in V$ *и зависящая, вообще говоря, от* q *и* $f \in H_{\omega}$.

Доказательство. Нам необходимо оценить величину (4.17) с $R_{v,2n}^{(q)}(f;x)$. Применяя неравенство Гёльдера, согласно определению множества $A^{(r)}$, $r > 1$, для любого четного n будем иметь

$$\sum_{k=n}^{2n} \alpha_k^r(v) \left| \rho_k(f;x) - \rho_k(f;y) \right|^q \leq$$

$$\left\{ \sum_{k=n}^{2n} \alpha_k^r(v) \right\}^{\frac{1}{r}} \cdot \left\{ \sum_{k=n}^{2n} \left| \rho_k(f;x) - \rho_k(f;y) \right|^{qr'} \right\}^{\frac{1}{r'}} \leq$$

$$C \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} \alpha_k(v) n^{\frac{1}{r}-1} \left\{ \sum_{k=n}^{2n} \left| \rho_k(f;x) - \rho_k(f;y) \right|^{qr'} \right\}^{\frac{1}{r'}},$$

$$r' = \frac{r}{r-1}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad v \in V.$$

Отсюда, на основании леммы 2.4.1, получаем

$$\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\left|\rho_k(f;x)-\rho_k(f;y)\right|^q=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{q\frac{\beta}{\eta}}\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n}\alpha_k(\nu)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)}.$$

Следовательно,

$$\left|R_{v,2n}^{(q)}(f;x)-R_{v,2n}^{(q)}(f;y)\right|\le$$

$$\left\{\sum_{k=2n}^{\infty}\alpha_k(v)\left|\rho_k(f;x)-\rho_k(f;y)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}=$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2^j n}^{2^{i+1}n}\alpha_k(v)\left|\rho_k(f;x)-\rho_k(f;y)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2^{j-1}n}^{2^j n}\alpha_k(\nu)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}.$$

Завершается доказательство, как и в теореме 2.4.1.

Пусть величина $\omega(\cdot)$ *является выпуклым модулем непрерывности. Тогда существует функция* $f_0\in H_\omega$, *для которой*

$$\left\|R_{v,n}^{(q)}(f_0)\right\|_C\ge\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}},\quad q\ge1.\qquad(4.21)$$

В самом деле, пусть

$$f_0(x):=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)-\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)\cos kx.$$

Тогда, как известно ([30:3]), $f_0\in H_\omega$ и

$$\left|\rho_k(f_0;0)\right|=\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\left(\omega\left(\frac{1}{\nu}\right)-\omega\left(\frac{1}{\nu+1}\right)\right)=\omega\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

С учетом этого получаем

$$\left\|R_{\nu,n}^{(q)}(f_0;x)\right\|_C\geq\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left|\rho_k(f_0;0)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}=$$

$$\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Неравенство (4.21) доказано.

Приведем некоторые утверждения и оценки, вытекающие из теоремы 2.4.1.

Полагая в соотношении (4.16) $n=0$, $R_\nu^{(q)}(f;x):=R_{\nu,0}^{(q)}(f;x)$, получаем

$$\left\|R_\nu^{(q)}(f;x)\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)}\right\}^{\frac{1}{q}},\ \nu\in V. \qquad (4.24)$$

Из (4.24), полагая $V=\mathbb{N}_0$, $\alpha_k(\nu)=\alpha_k(n)=\alpha_k^{(n)}$, приходим к такому утверждению.

Следствие 2.4.1. *Пусть* $\alpha=\left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$, $k,n\in\mathbb{N}_0$, *– бесконечная прямоугольная матрица неотрицательных чисел, элементы* *которой не возрастают по* k *при каждом фиксированном* $n \in \mathbb{N}_0$ *и* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$, *для всех* $q \ge 1$ *и* $n \in \mathbb{N}_0$ *справедливо соотношение*

$$\left\| R_v^{(q)}(f;x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\ne y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)} \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{4.25}$$

где $O(1)$ *– величина, имеющая прежний смысл.*

Положим, например,

$$\alpha = \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, \ 0 \le k \le n; \\ 0, \ k > n \end{cases}$$

$$R_n^{(q)}(f;x;\alpha) := H_n^{(q)}(f;x) = \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left| \rho_k(f;x) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда согласно (4.25) для классических сильных средних рядов Фурье будем иметь

$$\left\| H_n^{(q)}(f;x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\ne y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)} \right\}^{1/q}. \tag{4.26}$$

В частности, если $\omega(t)=t^{\alpha}$, $\omega^*(t)=t^{\gamma}$, $0\le\gamma<\alpha\le1$, $\eta=\alpha$, $\beta=\gamma$, замечая, что

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}=1$$

на основании (4.26) приходим к следующему утверждению.

Следствие 2.4.2. *Пусть* $0\le\beta<\alpha\le1$. *Тогда для любой функции* $f\in H_{\alpha}$, *для каждого* $q\ge1$ *и для всех* $n\in\mathbb{N}_0$

$$\left\|H_n^{(q)}(f;x)\right\|_{\beta}=\begin{cases}O(1)\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-\beta}}, & \alpha-\beta<\dfrac{1}{q};\\ O(1)\left(\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\right)^{\alpha-\beta}, & \alpha-\beta=\dfrac{1}{q},\\ O(1)\dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{q}}}, & \alpha-\beta>\dfrac{1}{q},\quad q>1.\end{cases}$$

Данная оценка при $\eta=\alpha=\dfrac{1}{q}>\beta>0$ усиливает по порядку соответствующую оценку в работе Б. Золя (B. Szal [21:4]), в которой множитель $O\left((\ln n)^{\frac{1}{q}-\beta}\right)$ может быть отброшен.

Пусть теперь

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}=1,\ \ n\in\mathbb{N}_0.$$

Тогда в силу выпуклости вверх функции $\varphi(u)=u^{\gamma}$, $0<\gamma\le1$, вследствие неравенства Иенсена ([61, с. 96]) получаем оценку

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)}\le\left\{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q}\right\}^{1-\frac{\beta}{\eta}},$$

$$\gamma=1-\frac{\beta}{\eta}.$$

Следовательно, из оценки (4.25), в котором считаем, что $\alpha_k^{(n)}=0$ при $k>n$, получаем

$$\left\|R_n^{(q)}(f;x)\right\|_{\omega*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega*(|x-y|)}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q}\right\}^{\frac{1}{q}\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)}.$$

Предъявим функции $\omega(t)$, помимо её положительности и возрастания при $t>0$, дополнительное требование:

$$\omega(\lambda t)\le(\lambda+1)\omega(t),\quad \lambda>0. \tag{4.27}$$

Тогда при всех $q>1$ имеем

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\le\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)\right)^{q}\left(\frac{n^{\frac{1}{q}}}{k}+1\right)^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}=$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\left\{\sum_{k=1}^{\left[n^{\frac{1}{q}}\right]}\left(\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)\right)^{q}\left(\frac{n^{\frac{1}{q}}}{k}+1\right)^{q}+\right.$$

$$\sum_{k=\left[n^{\frac{1}{q}}\right]+1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)\right)^{q}\left(\frac{n^{\frac{1}{q}}}{k}+1\right)^{q}\Bigg\}^{\frac{1}{q}}\leq$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\left\{\sum_{k=1}^{\left[n^{\frac{1}{q}}\right]}\left(\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)\right)^{q}\left(\frac{n^{\frac{1}{q}}}{k}+1\right)^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}+$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\left\{\sum_{k=\left[n^{\frac{1}{q}}\right]+1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)\right)^{q}\left(\frac{n^{\frac{1}{q}}}{k}+1\right)^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\leq$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)\left\{\sum_{k=1}^{\left[n^{\frac{1}{q}}\right]}\left(2\frac{n^{\frac{1}{q}}}{k}\right)^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)\left\{\sum_{k=\left[n^{\frac{1}{q}}\right]+1}^{n}2^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\leq$$

$$2\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{q}}\right\}^{\frac{1}{q}}+2\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)=$$

$$\left(2\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{q}}\right\}^{\frac{1}{q}}+2\right)\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)=K_{q}\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right),$$

где

$$K_{q}=K(q):=2\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{q}}\right\}^{\frac{1}{q}}+2,$$

$\left[n^{\frac{1}{q}}\right]$ – целая часть числа $n^{\frac{1}{q}}$.

Таким образом, если выполнено условие (4.27), то имеет место неравенство

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} \le K_q\omega\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right),\ \ q>1,\ \ K_q = K(q). \quad (4.28)$$

Применяя оценку (4.28) к правой части (4.26) получаем оценку

$$\left\|H_n^{(q)}(f;x)\right\|_{\omega^*} = O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left(\omega\left(\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{q}}}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}},\ \ q>1.$$

§2.5. Наилучшие приближения в обобщённых гёльдеровых пространствах и сильная аппроксимация

Пусть $f\in X$, где X одно из пространств C или H_ω,

$$E_n(f)_X := \inf_{T_n}\left\|f-T_n\right\|_X$$

– величина наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве X.

Пусть, далее, Ω – множество всех функций типа модуля непрерывности, а именно:

1. $\omega(\cdot)$ определена и непрерывна на $[0,+\infty)$,

2. $\omega(\cdot)$ монотонно возрастает и $\omega(0)=0$,

3. $\omega(h)h^{-1}$ монотонно убывает при $h>0$.

Если $\omega,\omega^* \in \Omega$ и $\tilde{\omega}(h):=\dfrac{\omega(h)}{\omega^*(h)}$ монотонно возрастает при $h>0$, то имеет место включение $H_\omega \subset H_{\omega^*}$.

Дж. Престин и З. Прёсдорф (J. Prestin, S. Prössdorf [42]) показали, что если $f \in H_\omega$, то

$$E_n(f)_C \le 3\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)|f|_\omega,\ \ n\in\mathbb{N}_0, \qquad (5.1)$$

а также, наряду с оценкой (5.1) доказали следующее утверждение.

Теорема I. *Если* $f \in H_\omega$ *и функция* $\tilde{\omega}(h)=\dfrac{\omega(h)}{\omega^*(h)}$ *монотонно возрастает при* $h>0$, *то* $\forall n\in\mathbb{N}$

$$E_n(f)_{\omega^*} \le 648\tilde{\omega}\left(\frac{1}{n}\right)|f|_\omega. \qquad (5.2)$$

Напомним, что величина $|f|_\omega$ в правой части (5.1) определяет полунорму в пространстве H_ω.

Пусть, далее, $\alpha=\{\alpha_k(v)\}$, $k\in\mathbb{N}_0$, – последовательность неотрицательных функций, определенных на множестве $V\subset\mathbb{R}$, имеющем хотя бы одну предельную точку $v_0\in V$ и выполнены следующие условия, обозначаемые через $L(q)$: $\lim\limits_{v\to v_0}\alpha_k(v)=0$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$, ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=2^i n+1}^{2^i n}\alpha_k(v)\ln^q(k+1)\right\}^{\frac{1}{q}},\ \ q>0,$$

сходится $\forall v \in V$ и $\forall n \in \mathbb{N}_0$ и, наконец, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ существует последовательность констант $M_n^{(q)}$, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i nA_{2^i n+1,2^{i+1}n}(v)\right)^{\frac{1}{q}} \le M_n^{(q)}$$

для всех $v \in V$, где $A_{m,l}(v) = \max\limits_{m \le k \le l} \alpha_k(v)$.

В данном параграфе мы исследуем поведение последовательности функционалов сильной суммируемости рядов Фурье, определяемых равенством

$$\overline{R}_{v,n}^{(q)}(f;x) = \overline{R}_{v,n}^{(q)}(f;x;\alpha) :=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=2^i n+1}^{2^{i+1}n}\alpha_k(v)\left|\rho_k(f;x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}, \quad q>0, \tag{5.3}$$

$$\rho_n(f;x) = S_n(f;x) - f(x), \quad \overline{R}_{v,n}^{(1)}(f;x) = R_{v,n+1}^{(1)}(f;x),$$

в обобщенном гёльдеровом пространстве H_ω ([27:1]).

В этой связи рассмотрим сильные средние типа Валле Пуссена с весом α ряда Фурье функции $f \in C$, которые имеют вид

$$W_{n,r}^{(q)}(f;x) = W_{n,r}^{(q)}(x,v;f,\alpha) :=$$

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{k_i}(v)\left|\rho_{k_i}(f;x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{5.4}$$

где $n < k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le 2n$, $q > 0$, а также, функционалы

$$U_{n,r}^{(q)}(f;x) = U_{n,r}^{(q)}(x,v;f,\alpha) := \left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{k_i}(v)\left|S_{k_i}(x;f)\right|\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{5.5}$$

В. Тотиком (см., библ., напр., в [26:5]) было установлено, что для всякой функции $f \in C$ и $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|S_{k_i}(x;f)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \le K_q\|f\|_C \ln\frac{ne}{r}, \quad \forall q>0, \qquad (5.6)$$

где K_q – множитель, независящий от n, r и f. С учётом (5.6) для величины (5.5) получаем оценку

$$\left\|U_{n,r}^{(q)}(f)\right\|_C \le K_q\left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_C \ln\frac{ne}{r}, \quad \forall\varepsilon>0, \qquad (5.7)$$

где $A_{n+1}^{(r)}(v) := \max\limits_{\substack{1\le i\le r\\ n+1\le k_i\le 2n}} \alpha_{k_i}(v)$, $A_{n+1}^{(n)}(v) = A_{n+1,2n}(v)$.

Аналогично, с учётом оценки

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|S_{k_i}(x;f)-f(x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \le K_q E_n(f)_C \ln\frac{ne}{r}, \qquad (5.8)$$

вытекающей из (5.6), для величины (5.4) получаем

$$\left\|W_{n,r}^{(q)}(f)\right\|_C \le A_q\left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}} E_n(f)_C \ln\frac{ne}{r}, \quad q>0. \qquad (5.9)$$

Приведём аналог неравенств (5.7) и (5.9) для функции $f\in H_\omega$.

Лемма 2.5.1. *Если* $f\in H_\omega$, *то справедливы неравенства*

$$\left|U_{n,r}^{(q)}(f)\right|_\omega \le K_q\left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}}|f|_\omega \ln\frac{ne}{r}, \qquad (5.10)$$

$$\left\|U_{n,r}^{(q)}(f)\right\|_\omega \le K_q\left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_\omega \ln\frac{ne}{r}, \qquad (5.11)$$

где $n<k_1<k_2<\ldots<k_r\le 2n$, $q\ge 1$.

Доказательство. Оценим величину

$$\left|U_{n,r}^{(q)}(f)\right|_\omega = \sup_{h>0}\frac{\left\|\Delta_h U_{n,r}^{(q)}(f)\right\|_C}{\omega(h)}. \qquad (5.12)$$

Пусть $q\ge 1$. Тогда в силу неравенства

$$\left| \|a\|_{l_p} - \|b\|_{l_p} \right| \le \|a-b\|_{l_p}, \ \ p \ge 1,$$

где

$$l_p = \left\{ a = (a_n) : \|a\|_{l_p} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

имеем

$$\left| \Delta_h U_{n,r}^{(q)}(x, v; f, \alpha) \right| = r^{-\frac{1}{q}} \left| \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_{k_i}(v) \left| S_{k_i}(x+h; f) \right|^{\varepsilon} \right\}^{\frac{1}{q}} - \right.$$

$$\left. \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_{k_i}(v) \left| S_{k_i}(x; f) \right|^{q} \right\}^{\frac{1}{q}} \right| \le$$

$$r^{-\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_{k_i}(v) \left| S_{k_i}(x+h; f) - S_{k_i}(x; f) \right|^{q} \right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\left\{ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \alpha_{k_i}(v) \left| \Delta_h S_{k_i}(x; \Delta_h f) \right|^{q} \right\}^{\frac{1}{q}} = U_{n,r}^{(q)}(x, v; \Delta_h f, \alpha). \quad (5.13)$$

Вследствие оценок (5.11), (5.13) из (5.12) получаем

$$\left| U_{n,r}^{(q)}(v; f) \right|_{\omega} \le \sup_{h>0} \frac{\left\| U_{n,r}^{(q)}(v; \Delta_h f) \right\|_C}{\omega(h)} \le$$

$$K_q \left(A_n^{(r)}(v) \right)^{\frac{1}{q}} \ln \frac{ne}{r} |f|_{\omega}, \ \ n \in \mathbb{N}. \quad (5.14)$$

Неравенство (5.14) дает нам оценку (5.10).

Далее, учитывая равенство

$$\left\| U_{n,r}^{(q)}(f) \right\|_{\omega} = \left\| U_{n,r}^{(q)}(f) \right\|_C + \left| U_{n,r}^{(q)}(f) \right|_{\omega},$$

и принимая во внимание (5.7) и (5.10), находим

$$\left\|U_{n,r}^{(q)}(f)\right\|_{\omega} \le K_q \left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}} \ln\frac{ne}{r}\left(\|f\|_C + |f|_{\omega}\right) =$$

$$K_q \left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}} \ln\frac{ne}{r}\|f\|_{\omega}.$$

Таким образом, лемма 2.5.1 доказана.

Перейдем к установлению аналога неравенства (5.9) ((5.8)) для $f \in H_{\omega}$.

Теорема 2.5.1. *Пусть* $f \in H_{\omega} \subset H_{\omega^*}$, $q \ge 1$. *Тогда* $\forall n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|W_{n,r}^{(q)}(f)\right\|_{\omega^*} \le K_q \left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}} \ln\frac{ne}{r} E_n(f)_{\omega^*}. \qquad (5.15)$$

Доказательство. По определению нормы имеем

$$\left\|W_{n,r}^{(q)}(f)\right\|_{\omega^*} = \left\|W_{n,r}^{(q)}(f)\right\|_C + \left|W_{n,r}^{(q)}(f)\right|_{\omega^*}. \qquad (5.16)$$

Пусть $T_n^*(\cdot)$ – тригонометрический полином наилучшего приближения порядка не выше n в пространстве H_{ω^*}, т.е.

$$E_n(f)_{\omega^*} = \left\|f - T_n^*\right\|_{\omega^*}.$$

В виду того, что $\forall k \ge n$, $S_k\left(T_n^*; x\right) = T_n^*(x)$, находим

$$\left|S_k(f;x) - f(x)\right| \le \left|S_k\left(f - T_n^*; x\right)\right| + \left|T_n^*(x) - f(x)\right|.$$

С учётом этого и оценки (5.7) получаем

$$\left\|W_{n,r}^{(q)}(f)\right\|_C \le$$

$$\left\| \left\{ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \alpha_{k_i}(v) \left| S_{k_i}\left(f - T_n^*; x\right) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_C +$$

$$\left\| \left\{ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \alpha_{k_i}(v) \left| f(x) - T_n^*(x) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_C =$$

$$\left\| U_{n,r}^{(q)}\left(f - T_n^*\right) \right\|_C + \left\| f - T_n^* \right\|_C \left\{ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \alpha_{k_i}(v) \right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$K_q \left(A_{n+1}^{(r)}(v) \right)^{\frac{1}{q}} \left\| f - T_n^* \right\|_C \ln \frac{ne}{r} + \left(A_{n+1}^{(r)}(v) \right)^{\frac{1}{q}} \left\| f - T_n^* \right\|_C =$$

$$K_q \left(A_{n+1}^{(r)}(v) \right)^{\frac{1}{q}} \ln \frac{ne}{r} \left\| f - T_n^* \right\|_C . \tag{5.17}$$

Пользуясь неравенством Минковского, находим

$$\left\| \Delta_h W_{n,r}^{(q)}(f) \right\|_C \le \left\| W_{n,r}^{(q)}(\Delta_h f) \right\|_C =$$

$$\left\| \left\{ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \alpha_{k_i}(v) \right| S_{k_i}(\Delta_h f; x) - \right.$$

$$\left. \Delta_h T_n^*(x) + \Delta_h T_n^*(x) - \Delta_h f(x) \Big|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \Bigg\|_C \le$$

$$\left\| \left\{ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \alpha_{k_i}(v) \left| S_{k_i}(\Delta_h f; x) - \Delta_h T_n^*(x) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_C +$$

$$\left(A_n^{(r)}(v) \right)^{\frac{1}{q}} \left\| T_n^* - f \right\|_C . \tag{5.18}$$

В силу того, что

$$\Delta_h T_n^*(x) = T_n^*(x+h) - T_n^*(x) = S_k\left(T_n^*; x+h\right) - S_k\left(T_n^*; x\right) =$$

$$S_k\left(T_n^*(x+h)-T_n^*(x);x\right)=S_k\left(\Delta_h T_n^*;x\right),$$

из (5.18) находим

$$\left\|\Delta_h W_{n,r}^{(q)}(v;f)\right\|_C=\left\|\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{k_i}(v)\left|S_{k_i}\left(\Delta_h\left(f-T_n^*\right);x\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right\|_C+$$

$$\left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\Delta_h\left(T_n^*-f\right)\right\|_C=$$

$$\left\|U_{n,r}^{(q)}\left(\Delta_h\left(f-T_n^*\right)\right)\right\|_C+\left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\Delta_h\left(T_n^*-f\right)\right\|_C. \quad (5.19)$$

Принимая во внимание оценку (5.7), из (5.19) следует

$$\left\|\Delta_h W_{n,r}^{(q)}(v;f)\right\|_C=K_q\left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\Delta_h\left(f-T_n^*\right)\right\|_C\ln\frac{ne}{r}+$$

$$\left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\Delta_h\left(T_n^*-f\right)\right\|_C=$$

$$K_q'\left(A_{n+1}^{(r)}(v)\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\Delta_h\left(f-T_n^*\right)\right\|_C\ln\frac{ne}{r}. \quad (5.20)$$

Сопоставляя (5.16), (5.17) и (5.20) приходим к требуемой оценке (5.15).

Теорема 2.5.1 доказана.

При $r=n$ величины $W_{n,r}^{(q)}(\cdot)$ переходят в сильные средние Валле Пуссена с весом α :

$$W_n^{(q)}(f;x)=W_n^{(q)}(x,v;f,\alpha)=W_{n,n}^{(q)}(x,v;f,\alpha)=$$

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\alpha_k(v)\left|S_k(f;x)-f(x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

В этом случае из теоремы 2.5.1 вытекает следующая оценка для $f\in H_\omega\subset H_{\omega^*}$

$$\left\| W_n^q(f) \right\|_{\omega^*} = K_q A_{n+1,2n}^{(r)}(v) E_n(f)_{\omega^*}. \qquad (5.21)$$

Если последовательность функций $\alpha = \{\alpha_k(v)\}$ не возрастает по k при каждом фиксированном $v \in V$, то из (5.21) следует такая оценка для $f \in H_\omega$:

$$\left\| W_n^{(q)}(f) \right\|_{\omega^*} \le K_q \alpha_{n+1}^{\frac{1}{q}}(v) E_n(f)_{\omega^*}.$$

Прейдем к оценке величины (5.3) в пространстве H_{ω^*} для функций $f \in H_\omega$.

Теорема 2.5.2. *Если* $H_\omega \subset H_{\omega^*}$, $\alpha \in L(q)$, $q \ge 1$, *то для всех* $f \in H_\omega$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \overline{R}_{v,n}^{(q)}(f) \right\|_{\omega^*} \le K_q \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^i n A_{2^i n+1, 2^{i+1} n}(v) \right)^{\frac{1}{q}} E_{2^i n}(f)_{\omega^*}. \quad (5.22)$$

Доказательство. Принимая во внимание неравенство (5.21) и определение величины $\overline{R}_{v,n}^{(q)}(f)$, будем иметь

$$\left\| \overline{R}_{v,n}^{(q)}(f) \right\|_{\omega^*} = \left\| \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2^i n+1}^{2^{i+1} n} \alpha_k(v) \left| S_k(f;x) - f(x) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_{\omega^*} =$$

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^i n\right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \frac{1}{2^i n} \sum_{k=2^i n+1}^{2^{i+1} n} \alpha_k(v) \left| S_k(f;x) - f(x) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_{\omega^*} =$$

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^i n\right)^{\frac{1}{q}} W_{2^i n}^{(q)}(f) \right\|_{\omega^*} \le K_q \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^i n\right)^{\frac{1}{q}} \left\| W_{2^i n}^{(q)}(f) \right\|_{\omega^*} \le$$

$$K_q \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^i n\right)^{\frac{1}{q}} A_{2^i n+1, 2^{i+1} n}^{\frac{1}{q}}(v) E_{2^i n}(f)_{\omega^*} =$$

$$K_q\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i nA_{2^i n+1,2^{i+1}n}(v)\right)^{\frac{1}{q}} E_{2^i n}(f)_{\omega^*},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, теорема 2.5.2 доказана.

Отсюда, принимая во внимание (5.2), приходим к такому утверждению.

Следствие 2.5.1. *Пусть* $f\in H_\omega$, $\omega^*\in\Omega$, *функция* $\tilde{\omega}(h)=\dfrac{\omega(h)}{\omega^*(h)}$ *монотонно возрастает при* $h>0$ *и* $\alpha\in L(q)$, $q\ge 1$. *Тогда* $\forall n\in\mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\overline{R}_{v,n}^{(q)}(f)\right\|_{\omega^*}\le K_q|f|_\omega\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i nA_{2^i n+1,2^{i+1}n}(v)\right)^{\frac{1}{q}}\tilde{\omega}\left(\frac{1}{2^i n}\right),$$

в частности, при $n=1$ *получаем*

$$\left\|\overline{R}_{v,n}^{(q)}(f)\right\|_{\omega^*}\le K_q|f|_\omega\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i A_{2^i+1,2^{i+1}}(v)\right)^{\frac{1}{q}}\tilde{\omega}\left(\frac{1}{2^i}\right).\qquad(5.23)$$

Пусть $V\equiv\mathbb{N}$,

$$\alpha_k^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{k^\beta-(k-1)^{\beta-1}}{n^\beta}, & 1\le k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

где $\beta>0$. Подберём целое число m такое, что $2^m+1\le n<2^{m+1}$. Тогда в условиях следствия (2.5.1) с учётом неравенства (5.23) получаем такое утверждение.

Следствие 2.5.2. *Пусть* $f\in H_\omega$ *и функции* ω^*, $\tilde{\omega}$ *удовлетворяют условиям теоремы I. Тогда справедливо неравенство*

$$\left\|\frac{1}{n^{\frac{\beta}{q}}}\sum_{i=o}^{m}\left\{\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left(k^\beta-(k-1)^\beta\right)\left|S_k(x;f)-f(x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right\|_{\omega^*}\le$$

$$K_{q,\beta}\left|f\right|_{\omega} n^{-\frac{\beta}{q}}\sum_{i=0}^{m}\left(2^{i\beta}\right)^{\frac{1}{q}}\tilde{\omega}\left(\frac{1}{2^{i}}\right),\ \ q\geq 1.$$

Если, к тому же, $\tilde{\omega}(h)\leq Mh^{\gamma}$ *для* $h>0$ *и некоторого* $\gamma\in(0,1)$, *то*

$$\left\|\frac{1}{n^{\frac{\beta}{q}}}\sum_{i=o}^{m}\left\{\sum_{k=2^{i}+1}^{2^{i+1}}\left(k^{\beta}-(k-1)^{\beta}\right)\left|S_k(f;x)-f(x)\right|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\right\|_{\omega^*}\leq$$

$$K_{q,\beta,\gamma}\left|f\right|_{\omega}\begin{cases}\dfrac{1}{n^{\gamma}}, & \gamma<\dfrac{\beta}{q},\\[2mm] \dfrac{\ln(n+1)}{n^{\gamma}}, & \gamma=\dfrac{\beta}{q},\\[2mm] \dfrac{1}{n^{\frac{\beta}{q}}}, & \gamma>\dfrac{\beta}{q}.\end{cases}$$

При $q=1$ из (5.22) получаем оценку

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(v)\left|S_k(f;x)-f(x)\right|\right\|_{\omega^*}\leq$$

$$K\left|f\right|_{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}2^{k}A_{2^{k}+1,2^{k+1}}(v)\tilde{\omega}\left(\frac{1}{2^{k}}\right),$$

откуда вытекает следующее неравенство для сильных средних Рисса.

$$\left\|\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=+1}^{n}\left(k^{\beta}-(k-1)^{\beta}\right)\left|S_k(f;x)-f(x)\right|\right\|_{\omega^*}\leq$$

$$K_{\beta}\left|f\right|_{\omega} n^{-\beta}\sum_{k=0}^{m}2^{k\beta}\tilde{\omega}\left(\frac{1}{2^{k}}\right). \tag{5.24}$$

Неравенство (5.24) было установлено М. Горзенской, М. Лесиниевич, Л. Ремпульской (M. Gorzenska, M. Lesiniewicz, L. Rempulska [9:1]).

§2.6. Средние Фейера в обобщенном модифицированном гёльдеровом пространстве

В пространстве

$$H_{\omega^*,2} = H_{\omega^*,\infty,2} := \left\{ f \in C : |f|_{\omega^*,2} < \infty \right\},$$

где

$$|f|_{\omega^*,2} = |f|_{\omega^*,\infty,2} := \sup_{h>0} \frac{\left\| \dot{\Delta}_h^2 f \right\|_C}{\omega^*(h)},$$

определяемой второй симметричной разностью, для отклонений сумм Фейера

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f;x)$$

имеет место оценка, ([27:2]), уточняющая оценку (2.2.50) для сумм Фейера.

Теорема 2.6.1. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 2$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *справедливо неравенство*

$$\left\| f - \sigma_n(f) \right\|_{\omega^*,2} \le \|f\|_{\omega,2} \left(2^{2\frac{\beta}{\eta}-1} + 2 \sup_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \right) \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \right\}. \qquad (6.1)$$

Доказательство теоремы (2.6.1) основывается на утверждениях следующих теорем.

Теорема 2.6.2. *Для любой функции* $f \in C$

$$\left\| f - \sigma_n(f) \right\|_C \le$$

$$\frac{1}{2}\left\{ \omega_2\left(f; \frac{\pi}{n+1} \right) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega_2\left(f; \frac{\pi}{k+1} \right) \right\}. \qquad (6.2)$$

Оценка (6.2) приведена в работе [57, с. 225].

Теорема 2.6.3. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 2$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *имеет место неравенство*

$$\left| \sigma_n(f) - f \right|_{\omega^*,2} \le 2\sup_{h>0} \frac{\left(\omega(h) \right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \left| f \right|_{\omega,2} \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \right\}. \qquad (6.3)$$

Доказательство теоремы 2.6.1. Используя неравенство (6.2) с учётом того, что $\omega_2(f;t) \le 4\|f\|_C$, для любой функции $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ будем иметь

$$\left\| f - \sigma_n(f) \right\|_C \le \frac{1}{2}\left\{ \left(\omega_2\left(f; \frac{\pi}{n+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \cdot \left(\omega_2\left(f; \frac{\pi}{n+1} \right) \right)^{\frac{\beta}{\eta}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_2\left(f; \frac{\pi}{k+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \left(\omega_2\left(f; \frac{\pi}{k+1} \right) \right)^{\frac{\beta}{\eta}} \right\} \le$$

$$\frac{1}{2}\left\{ 4^{\frac{\beta}{\eta}} \|f\|_C^{\frac{\beta}{\eta}} \cdot |f|_{\omega,2}^{1-\frac{\beta}{\eta}} \left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \right.$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}4^{\frac{\beta}{\eta}}\left\|f\right\|_C^{\frac{\beta}{\eta}}\cdot\left|f\right|_{\omega,2}^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\Bigg\}\le$$

$$\frac{4^{\frac{\beta}{\eta}}}{2}\left\|f\right\|_{\omega,2}\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \quad (6.4)$$

В силу оценок (6.3), (6.4) находим, что

$$\left\|f-\sigma_n\left(f\right)\right\|_{\omega^*,2}\le\left(\frac{4^{\frac{\beta}{\eta}}}{2}\left\|f\right\|_{\omega,2}+2\left\|f\right\|_{\omega,2}\sup_{h>0}\frac{\left(\omega\left(h\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(h\right)}\right)\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}=$$

$$\left\|f\right\|_{\omega,2}\left(2^{2\frac{\beta}{\eta}-1}+2\sup_{h>0}\frac{\left(\omega\left(h\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(h\right)}\right)\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}.$$

Отсюда и следует оценка (6.1). Теорема 2.6.1 доказана.

Перейдем к **доказательству теоремы** 2.6.2. Имеем

$$\left|f\left(x\right)-\sigma_n\left(f\right)\right|\le$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f\left(x+t\right)+f\left(x-t\right)-2f\left(x\right)\right]F_n\left(t\right)dt\le$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\dot{\Delta}_t^2 f\left(x\right)F_n\left(t\right)dt\right|+$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\dot{\Delta}_t^2 f(x)F_n(t)\,dt\right| =: I_1 + I_2, \tag{6.5}$$

где $F_n(t) = \dfrac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}$ – ядро Фейера. Ясно, что

$$I_1 \le \frac{1}{2}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right). \tag{6.6}$$

Оценивая величину I_2, будем иметь

$$I_2 \le \frac{1}{\pi(n+1)}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\left|\dot{\Delta}_t^2 f(x)\right|\frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$\frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{\pi}{k+2}}^{\frac{\pi}{k+1}}\left|\dot{\Delta}_t^2 f(x)\right|\frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}} \le$$

$$\frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)\int\limits_{\frac{\pi}{k+2}}^{\frac{\pi}{k+1}}\frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}} \le$$

$$\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right). \tag{6.7}$$

В силу оценок (6.6) и (6.7) из (6.5) получаем (6.2). Теорема 2.6.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.6.3. Требуется оценить полунорму

$$\left|\sigma_n(f)-f\right|_{\omega^*,2} := \sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2\left(\sigma_n(f)-f\right)\right\|_C}{\omega^*(h)}, \tag{6.8}$$

при условии, что $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$.

Вследствие неравенств

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right) \le 4\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C,$$

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right) \le 4\omega_2\left(f;t\right),$$

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C \le \left|f\right|_{\omega,2} \cdot \omega\left(h\right),$$

а также того, что $\dot{\Delta}_h^2\left(\sigma_n\left(f\right)-f\right)=\sigma_n\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)-\dot{\Delta}_h^2 f$, на основании оценки (6.2) получаем

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2\left(\sigma_n\left(f\right)-f\right)\right\|_C \le$$

$$\frac{1}{2}\left\{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{k+1}\right)\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}\le$$

$$\frac{1}{2}\left(4\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{4^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\frac{4^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}=2\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_C^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}\le$$

$$2\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left|f\right|_{\omega,2}^{\frac{\beta}{\eta}}\cdot\left|f\right|_{\omega,2}^{1-\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}\le$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (6.9)$$

Сопоставляя оценку (6.9) с (6.8), приходим к утверждению теоремы 2.6.3.

ГЛАВА 3
АППРОКСИМАЦИЯ И ГРУППЫ ОТКЛОНЕНИЙ РЯДОВ ФУРЬЕ В ОБОБЩЁННЫХ L_p-ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В данной главе устанавливаются аналоги результатов главы 2 на случай обобщённых L_p-гёльдеровых пространств и их модификаций, а также рассматриваются аппроксимационные свойства средних Караматы K^λ рядов Фурье и их сопряженных. Отметим, что особенности L_p-метрики при $1<p<\infty$ здесь не учитываются, при этом результаты формулируются при всех значениях $p\geq 1$.

§3.1. Аппроксимация функций K^λ-средними рядов Фурье и их сопряженных в L_p-гёльдеровых пространствах

1. Положим

$$H_{\alpha,p}:=\left\{f\in L_p:\left\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\right\|_p\leq K|t|^\alpha,\ \ K=K(f)\right\}.$$

Пространство $H_{\alpha,p}$ $\left(p\geq 1,\ \ 0<\alpha\leq 1\right)$ является B-пространством относительно нормы

$$\|f\|_{\alpha,p}:=\|f\|_p+\sup_{t\neq 0}\frac{\left\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\right\|_p}{|t|^\alpha},\quad \alpha>0, \tag{1.1}$$

$$\|f\|_{0,p}:=\|f\|_p,\quad \alpha=0.$$

Метрику $\|\cdot\|_{\alpha,p}$ будем называть L_p-гёльдеровой нормой. На основании неравенства

$$\|f\|_{\beta,p}\leq(2\pi)^{\alpha-\beta}\|f\|_{\alpha,p}$$

заключаем, что

$$H_{\alpha,p} \subseteq H_{\beta,p} \subseteq L_p, \ \ p \ge 1, \ \ 0 \le \beta < \alpha \le 1.$$

Для дальнейших целей введем следующие обозначения:

$$\Phi_x(t) := \frac{1}{2}\left\{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right\},$$

$$\Psi_x(t) := \frac{1}{2}\left\{f(x+t) - f(x-t)\right\}, \tag{1.2}$$

$$\tilde{f}(x,\varepsilon) := -\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\Psi_x(x)\frac{1}{2}ctg\frac{t}{2}dt, \ \ f \in L,$$

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+}\tilde{f}(x,\varepsilon) \quad (\textit{почти всюду}).$$

Если $f \in L_p$, $p > 1$, то согласно теореме М. Рисса $\tilde{f} \in L_p$ ([22:1]).

Пусть, далее, $S_n(f;x)$ и $\tilde{S}_n(f;x)$ определяют n-ые частичные суммы рядов (2.1.1) и (2.1.2), соответственно при этом

$$S_n(f;x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi_x(t)D_n(t)dt, \tag{1.3}$$

$$\tilde{S}_n(f;x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Psi_x(t)\tilde{D}_n(t), \tag{1.4}$$

где, как обычно,

$$D_n(t) := \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \ \ \tilde{D}_n(t) := \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \tag{1.5}$$

Б.А. Лендоном (B. A. Landon [29]) доказаны следующие аналоги теорем A и B, приведенных в главе 2.

Теорема 3.1.1. *Пусть последовательность* $K_n^{\lambda}(f)$ *является последовательностью* K^{λ}*-средних сумм Фурье функции* $f \in H_{\alpha,p}$*. Если* $p \ge 1$, $0 \le \beta < \alpha \le 1$, *то имеет место соотношение*

$$\left\| f - K_n^\lambda(f) \right\|_{\beta,p} = O\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\alpha-\beta}} \right), \quad \lambda > 0. \tag{1.6}$$

Теорема 3.1.2. *Пусть* $h = \dfrac{\pi}{l(n)}$, *где* $l(n) = \dfrac{3}{2} + \lambda \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda + k}$.

Пусть, далее, $\tilde{K}_n^\lambda(f)$ *– последовательность* K^λ*- средних ряда сопряженного к ряду Фурье функции* $f \in H_{\alpha,p}$, $p > 1$. *Если* $0 \le \beta < \alpha \le 1$, *то*

$$\left\| \tilde{K}_n^\lambda(f) - \tilde{f}(\cdot,h) \right\|_{\beta,p} = O\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\alpha-\beta}} \right). \tag{1.7}$$

Для доказательств этих теорем нам понадобится ещё ряд обозначений (см. (1.2)):

$$G(t) := \Phi_{y+u}(t) - \Phi_y(t),$$

$$\tilde{G}(t) := \Psi_{y+u}(t) - \Psi_y(t),$$

$$L_n(y) := K_n^\lambda(f;y) - f(y),$$

$$\tilde{L}_n(y) := \tilde{K}_n^\lambda(f;y) - \tilde{f}(y,h),$$

$$K_n(t) := \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+n)} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \lambda^k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t,$$

$$\tilde{K}_n(t) := \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+n)} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \lambda^k \tilde{D}_k(t),$$

$$r_k(t) := \left(\lambda^2 + 2\lambda k \cos t + k^2\right)^{1/2},$$

$$tg\theta_k = \frac{\lambda \sin t}{\lambda \cos t + k},$$

$$R(n,t) := \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)} \prod_{k=0}^{n-1} r_k(t),$$

$$l(n) := \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda + k},$$

$$h := \frac{\pi}{l(n)}.$$

2. Нам также понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3.1.1. *Пусть* A *и* C *положительные числа и* γ *- любое действительное число. Тогда при* $\mu \to \infty$,

$$\int_{\pi/\mu}^{C} t^{\gamma} e^{-A\mu t^2} dt = O(1) \begin{cases} \mu^{-\gamma-1}, & \gamma < -1 \\ \ln \mu, & \gamma = -1 \\ \dfrac{1}{\mu^k}, & 2k\text{-}1 < \gamma \le 2k, \quad k = 0,1,2,\dots \\ \dfrac{1}{\mu^{\gamma-k}}, & 2k \le \gamma \le 2k+1. \end{cases}$$

Лемма 3.1.2. *Справедливы следующие равенства*

$$K_n(t) = R(n,t) \sin\left(\frac{3}{2}t + \sum_{k=1}^{n-1} \theta_k\right)$$

$$\tilde{K}_n(t) = R(n,t) \cos\left(\frac{3}{2}t + \sum_{k=1}^{n-1} \theta_k\right).$$

В самом деле, с помощью простых вычислений находим

$$\tilde{K}_n(t) + iK_n(t) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)} \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] \left(\lambda e^{it}\right)^k e^{it/2} =$$

$$\frac{\Gamma(\lambda) e^{it/2}}{\Gamma(n+\lambda)} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\lambda e^{it} + k\right) =$$

$$\frac{\Gamma(\lambda) e^{it/2}}{\Gamma(n+\lambda)} \prod_{k=0}^{n-1} \left[(\lambda \cos t + k) + i\lambda \sin t\right] =$$

$$\frac{\Gamma(\lambda) e^{it/2}}{\Gamma(n+\lambda)} \prod_{k=0}^{n-1} r_k(t) e^{i\theta_k} =$$

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)} R(n,t)\exp\left\{i\left(\frac{3}{2}t+\sum_{k=1}^{n-1}\theta_k\right)\right\}.$$

Отсюда и следует лемма 3.1.1.

Лемма 3.1.3. *Пусть* $0<t<\pi$. *Тогда для некоторого положительного постоянного* A

$$R(n,t)=\begin{cases} O(1), \\ O(1)e^{-At^2\ln n}, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$K_n(t)=\begin{cases} O(1), \\ O(1)e^{-At^2\ln n}, \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\tilde{K}_n(t)=\begin{cases} O(1), \\ O(1)e^{-At^2\ln n}, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\tilde{E}_n(t)=O\left(t^{-1}\right). \tag{1.11}$$

Доказательство. $R(n,t)$ достигает максимального значения для $t=0$, причём $R(n,0)=1$. Отсюда следует первое соотношение в (1.8). Далее

$$R(n,t)=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\prod_{k=0}^{n+1}\left(\lambda^2+2\lambda k\cos t+k^2\right)^{1/2}=$$

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\lambda(n+\lambda)}\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda+k)\left[1-\frac{4k\sin^2\frac{t}{2}}{(\lambda+k)^2}\right]^{1/2}=$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left[1-\frac{4k\sin^2\frac{t}{2}}{(\lambda+k)^2}\right]^{1/2} =$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left\{1-\frac{4\lambda\sin^2\frac{t}{2}}{(\lambda+k)^2}\right\}^{-1}\right]. \tag{1.12}$$

Ясно, что

$$0<\frac{4\lambda k\sin^2\frac{t}{2}}{(\lambda+k)^2}<1$$

для $k=1,2,3,\ldots$ и $0<t<\pi$. В силу того, что $\ln(1-\theta)^{-1}\geq\theta$ для $0<\theta<1$ и $\sin x\geq\frac{2x}{\pi}$, $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left\{1-\frac{4\lambda\sin^2\frac{t}{2}}{(\lambda+k)^2}\right\}^{-1}\geq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4\lambda k\sin^2\frac{t}{2}}{(\lambda+k)^2}\geq$$

$$\frac{2\lambda t^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(\lambda+k)^2}\geq At^2\ln n, \tag{1.13}$$

где A-некоторая положительная постоянная. Используя (1.12) и (1.13) мы получаем второе соотношение в (1.8). Соотношения (1.9) и (1.10) следуют из (1.8). Из равенства $\tilde{D}_k(t)=O(t^{-1})$ вытекает (1.11).

Лемма 3.1.4. *Пусть* $0<t\leq\frac{\pi}{4}$. *Тогда*

$$\sin\left(\frac{3}{2}t+\sum_{k=0}^{n-1}\theta_k\right)-\sin l(n)t=O\left(t^3\ln n\right), \tag{1.14}$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}t+\sum_{k=0}^{n-1}\theta_k\right)-\cos l(n)t=O\left(t^3\ln n\right). \tag{1.15}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\left|\sin\left(\frac{3}{2}t+\sum_{k=0}^{n-1}\theta_k\right)-\sin l(n)t\right|\le\left|\left(\frac{3}{2}t+\sum_{k=0}^{n-1}\theta_k\right)-l(n)t\right|. \tag{1.16}$$

Заметим, что

$$0<\frac{\lambda\sin t}{\lambda\cos t+n}<1,$$

если $0<t\le\frac{\pi}{4}$ и $k\ge 1$. Следовательно, в случае, когда $0<t\le\frac{\pi}{4}$,

$$\theta_k=\left[\left(tg\frac{\lambda\sin t}{\lambda\cos t+k}\right)^{-1}-\frac{\lambda\sin t}{\lambda\cos t+k}\right]+$$

$$\left[\frac{\lambda\sin t}{\lambda\cos t+k}-\frac{\lambda t}{\lambda\cos t+k}\right]+\left[\frac{\lambda t}{\lambda\cos t+k}-\frac{\lambda t}{\lambda+k}\right]+\frac{\lambda t}{\lambda+k}=$$

$$O\left[\left(\frac{\lambda\sin t}{\lambda\cos t+k}\right)^3\right]+O\left[\frac{t^3}{\lambda\cos t+k}\right]+$$

$$O\left[\frac{t^3}{(\lambda\cos t+k)(\lambda+k)}\right]+\frac{\lambda t}{\lambda+k}=$$

$$O\left(\left(\frac{t}{k}\right)^3\right)+O\left(\frac{t^3}{k^2}\right)+O\left(\frac{t^3}{k}\right)+\frac{\lambda t}{\lambda+k}=$$

$$\frac{\lambda t}{\lambda+k}+O\left(\frac{t^3}{k}\right),\quad 1\le k\le n-1. \tag{1.17}$$

Используя (1.17), будем иметь

$$\frac{3}{2}t+\sum_{k=1}^{n-1}\theta_k=\frac{3}{2}t+\lambda t\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda+k}+O\left(t^3\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=$$

$$tl(n)+O\left(t^3\ln n\right). \tag{1.18}$$

На основании (1.18) и (1.16) получаем соотношение (1.14) леммы 3.1.4. Аналогично доказанному приходим к соотношению (1.15).

Лемма 3.1.5. *Справедливы следующие соотношения*

$$R'(n,t)=O(1)t\ln nR(n,t),\quad 0<t\le\frac{\pi}{2}, \tag{1.19}$$

$$R(n,t+h)-R(n,t)=O(1)te^{-At^2\ln n},\quad \mathrm{h}\le t\le\frac{\pi}{2}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Имеем

$$R(n,t)=\lambda\prod_{k=1}^{n-1}r_k(t).$$

Находя логарифмическую производную, получаем

$$R'(n,t)=R(n,t)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r_k'(t)}{r_k(t)}=R(n,t)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-\lambda k\sin t)}{\left(r_k(t)\right)^2}=$$

$$O(1)tR(n,t)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=O(1)t\ln nR(n,t)$$

$$\left(r_k(t)\ge k,\quad 0<t\le\frac{\pi}{2}\right).$$

Соотношение (1.19) доказано.

По теореме Лагранжа

$$R(n,t+h)-R(n,t)=hR'(n,t+\xi h)=$$

$$O(1)h(t+\xi h)R(n,t+\xi h)\ln n=$$

$$O(1)te^{-At^2\ln n},\quad 0<\xi<1,\ h\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда и следует соотношение (1.20).

3. Перейдём к **доказательству теоремы 3.1.1.**

Используя (1.3) и принятые выше обозначения, получаем

$$K_n^\lambda(f;x)=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\lambda^k S_k(f;x)=$$

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\lambda^k\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\Phi_x(t)D_k(t)\,dt\right\}+$$

$$f(x)\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\lambda^k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\Phi_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}K_n(t)\,dt+f(x).$$

Отсюда следует, что

$$L_n(x)=K_n^\lambda(f;x)-f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\Phi_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}K_n(t)\,dt.\qquad(1.21)$$

Зафиксируем δ такое, что $0<\delta<\frac{\pi}{4}$, и пусть $u\neq 0$. Тогда на основании (1.21)

$$L_n(y+u)-L_n(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{G(t)}{2\sin\frac{t}{2}}K_n(t)\,dt=$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\int_0^h+\int_h^\delta+\int_\delta^\pi\right)\frac{G(t)}{2\sin\frac{t}{2}}K_n(t)\,dt=$$

$$\frac{2}{\pi}(P+Q+R)=:I_1+I_2+I_3. \qquad (1.22)$$

Применяя неравенство Минковского, из (1.22) находим

$$\left\|L_n(y+u)-L_n(y)\right\|_p\le\|I_1\|_p+\|I_2\|_p+\|I_3\|_p.$$

Далее, в силу обобщенного неравенства Минковского

$$\left\{\int_a^b\left|\int_c^d f(x,y)\,dy\right|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}\le\int_c^d\left\{\int_a^b|f(x,y)|^r\,dx\right\}^{\frac{1}{r}}dy,\quad 1\le r<\infty,$$

запишем

$$\|I_1\|_p\le\frac{2}{\pi}\int_0^h\|G(t)\|_p\left|\frac{K_n(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt, \qquad (1.23)$$

$$\|I_2\|_p\le\frac{2}{\pi}\int_h^\delta\|G(t)\|_p\left|\frac{K_n(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt, \qquad (1.24)$$

$$\|I_3\|_p\le\frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi\|G(t)\|_p\left|\frac{K_n(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt, \qquad (1.25)$$

где $h=\dfrac{\pi}{l(n)}$.

Заметим, что если $0\le\beta<\alpha\le1$ и $f\in H_{\alpha,p}$, то для $0<t\le\pi$ и $u\ne0$

$$G(t)=O(1)\begin{cases} t^{\alpha}, \\ |u|^{\alpha}, \\ |u|^{\beta}\, t^{\alpha-\beta}. \end{cases} \tag{1.26}$$

Тогда, используя соотношение (1.9), с учётом (1.26), из (1.23) и (1.25) получаем

$$\|I_1\|_p = O\left(|u|^{\beta}\int_0^h t^{\alpha-\beta}dt\right)=O\left(\frac{|u|^{\beta}}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}\right), \tag{1.27}$$

и

$$\|I_3\|_p = O\left(|u|^{\beta}\int_{\delta}^{\pi} t^{\alpha-\beta-1}e^{-At^2\ln n}dt\right)=$$

$$O\left(|u|^{\beta}\, e^{-A\delta^2\ln n}\right)=O\left(\frac{|u|^{\beta}}{(\ln n)^{\Delta}}\right), \tag{1.28}$$

где Δ – некоторое положительное число.

На основании леммы 3.1.2 из (1.24) следует

$$\|I_2\|_p \le \int_h^{\delta}\|G(t)\|_p\left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right||K_n(t)|dt+$$

$$\int_h^{\delta}\frac{\|G(t)\|_p}{t}R(n,t)\sin l(n)t dt+$$

$$\int_h^{\delta}\frac{\|G(t)\|_p}{t}R(n,t)\left\{\sin\left(\frac{3}{2}t+\sum_{k=1}^{n-1}\theta_k\right)-\sin l(n)t\right\}dt:=$$

$$I+J+K. \tag{1.29}$$

В силу того, что

$$\left\{\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right\}=O(t),$$

применяя соотношение (1.26) и оценку (1.9) леммы 3.1.3, находим

$$I=O\left(|u|^{\beta}\int_h^{\delta}t^{\alpha-\beta+1}e^{-At^2\ln n}dt\right)=O\left(\frac{|u|^{\beta}}{\ln n}\right). \qquad (1.30)$$

Далее,

$$J=\int_h^{\delta}\frac{\|G(t)\|_p}{|t|}\left|R(n,t)\sin l(n)t\right|dt=$$

$$\left(\int_h^{2h}+\int_{2h}^{\delta+h}-\int_{\delta}^{\delta+h}\right)\frac{\|G(t)\|_p}{|t|}\left|R(n,t)\sin l(n)t\right|dt. \qquad (1.31)$$

Производя замену t на $t+h$ во втором интеграле, получим

$$J=\int_h^{2h}\frac{\|G(t)\|_p}{|t|}\left|R(n,t)\sin l(n)t\right|dt-$$

$$\int_h^{\delta}\frac{\|G(t+h)\|_p}{|t+h|}\left|R(n,t+h)\sin l(n)t\right|dt-$$

$$\int_{\delta}^{\delta+h}\frac{\|G(t)\|_p}{|t|}\left|R(n,t)\sin l(n)t\right|dt. \qquad (1.32)$$

Из (1.31) и (1.32) находим

$$2J=\int_h^{\delta}\left[\frac{\|G(t)\|_p}{|t|}\left|R(n,t)\right|-\frac{\|G(t+h)\|_p}{|t+h|}R(n,t+h)\right]\left|\sin l(n)t\right|dt+$$

$$\int_h^{2h}\frac{\|G(t)\|_p}{|t|}\left|R(n,t)\sin l(n)t\right|dt-$$

$$\int_{\delta}^{\delta+h} \frac{\|G(t)\|_p}{|t|} \left| R(n,t) \sin l(n) t \right| dt =: L + M - N. \qquad (1.33)$$

Вследствие (1.26) и соотношения (1.8) леммы 3.1.3 получаем

$$M = O\left(|u|^{\beta} \int_{h}^{2h} t^{\alpha-\beta-1} dt \right) = O\left(\frac{|u|^{\beta}}{(\ln n)^{\alpha-\beta}} \right) \qquad (1.34)$$

и

$$N = O\left(|u|^{\beta} \int_{\delta}^{\delta+h} t^{\alpha-\beta-1} e^{-At^2 \ln n} dt \right) =$$

$$O\left(|u|^{\beta} e^{-At^2 \ln n} \right) = O\left(\frac{|u|^{\beta}}{(\ln n)^{\Delta}} \right), \qquad (1.35)$$

где Δ – некоторое положительное число.

Далее,

$$L = \int_{h}^{\delta} \frac{\|G(t)\|_p - \|G(t+h)\|_p}{t} R(n,t) \sin l(n) t dt +$$

$$\int_{h}^{\delta} \left(R(n,t) - R(n,t+h) \right) \frac{\|G(t+h)\|_p}{|t|} \sin l(n) t dt +$$

$$\int_{h}^{\delta} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+h} \right) \|G(t+h)\|_p R(n,t+h) \sin l(n) t dt =:$$

$$L_1 + L_2 + L_3. \qquad (1.36)$$

При помощи оценок (1.26) и соотношений

$$G(t+h)-G(t)=O(1)\begin{cases} h^{\alpha}, \\ |u|^{\alpha}, \\ |u|^{\beta}\, h^{\alpha-\beta}, \end{cases} \tag{1.37}$$

$$f\in H_{\alpha,p},\quad 0\le\beta<\alpha\le 1,\quad x\ne y,$$

находим

$$L_2=O\left(|u|^{\beta}\int_h^{\delta}(t+h)^{\alpha-\beta}\,e^{-At^2\ln n}dt\right)=$$

$$O\left(|u|^{\beta}\int_h^{\delta}t^{\alpha-\beta}e^{-At^2\ln n}dt\right)=O\left(\frac{|u|^{\beta}}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}\right). \tag{1.38}$$

На основании (1.26), соотношения (1.8) леммы 3.1.3 и леммы 3.1.1 (заменяя μ на $\ln n$) будем иметь

$$L_3=h\int_h^{\delta}\frac{\|G(t+h)\|_p}{t(t+h)}R(n,t+h)\sin l(n)tdt=$$

$$O\left(h|u|^{\beta}\int_h^{\delta}\frac{(t+h)^{\alpha-\beta-1}}{t}e^{-At^2\ln n}dt\right)=$$

$$O\left(h|u|^{\beta}\int_h^{\delta}t^{\alpha-\beta-2}e^{-At^2\ln n}dt\right)=$$

$$O\left(|u|^{\beta}\right)\begin{cases} \dfrac{1}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}, & \alpha-\beta<1, \\ \dfrac{\ln\ln n}{\ln n}, & \alpha-\beta=1. \end{cases} \tag{1.39}$$

Объединяя (1.33)–(1.39), получаем

$$J=O\left(|u|^{\beta}\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}\right),\quad 0\le\beta<\alpha\le 1. \tag{1.40}$$

В силу (1.26), соотношения (1.8) леммы 3.1.3 и соотношения (1.14) леммы 3.1.4 получим

$$K=\int_h^{\delta}\frac{\|G(t)\|_p}{t}R(n,t)\left\{\sin\left(\frac{3}{2}t+\sum_{k=1}^{n-1}\theta_k\right)-\sin l(n)t\right\}dt=$$

$$O\left(|u|^{\beta}\ln n\int_h^{\delta}t^{\alpha-\beta+2}e^{-At^2\ln n}dt\right)=O\left(\frac{|u|^{\beta}}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}\right). \tag{1.41}$$

Объединяя соотношения (1.27)–(1.32), (1.40) и (1.41), приходим к тому, что

$$|L_n(y+u)-L_n(y)|=O\left(|u|^{\beta}\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}\right), \tag{1.42}$$
$$0\le\beta<\alpha\le 1.$$

Из (1.42) следует

$$\sup_{u\ne 0}\frac{|L_n(y+u)-L_n(y)|}{|u|^{\beta}}=O\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}\right), \tag{1.43}$$
$$0\le\beta<\alpha\le 1.$$

Ясно, что при условии $f\in H_{\alpha,p}$, подобным образом получается оценка

$$\|L_n(\cdot)\|_p=O\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\alpha}}\right),\quad 0<\alpha\le 1. \tag{1.44}$$

Следовательно, сопоставляя (1.43) и (1.44) приходим к оценке (1.6). Теорема 3.1.1 доказана.

Перейдем к **доказательству теоремы 3.1.2.** Используя (1.4) и принятые ранее обозначения, будем иметь

$$\tilde{K}_n^{\lambda}(f;x)=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\lambda_k\tilde{S}_k(f;x)=$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Psi_x(t)\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\lambda^k\tilde{D}_k(t)\right)dt=$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\Psi_x(t)\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\lambda^k\tilde{D}_k(t)\right)dt-$$

$$\frac{2}{\pi}\int_h^{\pi}\Psi_x(t)\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\lambda^k\right)\frac{1}{2}ctg\frac{t}{2}dt+$$

$$\frac{2}{\pi}\int_h^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\lambda^k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)dt=$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\Psi_x(t)\tilde{E}_n(t)dt+\tilde{f}(x,h)+\frac{2}{\pi}\int_h^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\tilde{K}_n(t)dt.$$

Поэтому

$$\tilde{L}_n(x):=\tilde{K}_n^{\lambda}(f;x)-\tilde{f}(x,h)=$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\Psi_x(t)\tilde{E}_n(t)dt+\frac{2}{\pi}\int_h^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\tilde{K}_n(t)dt. \qquad (1.45)$$

Пусть $0<\delta<\frac{\pi}{4}$, $x\neq y$. Тогда на основании (1.45) запишем представление

$$\tilde{L}_n(y+u)-\tilde{L}(y)=$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^h \tilde{G}(t)\tilde{E}_n(t)dt+\frac{2}{\pi}\int_h^\delta \frac{\tilde{G}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\tilde{K}_n(t)dt+$$

$$\frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{\tilde{G}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\tilde{K}_n(t)dt=:-\tilde{P}+\tilde{Q}+\tilde{R}. \tag{1.46}$$

Применяя неравенство Минковского, из (1.46) находим

$$\left\|\tilde{L}_n(y+u)-\tilde{L}(y)\right\|_p \le \left\|\tilde{P}\right\|_p+\left\|\tilde{Q}\right\|_p+\left\|\tilde{R}\right\|_p .$$

При помощи же обобщенного неравенства Минковского будем иметь

$$\left\|\tilde{P}\right\|_p \le \frac{2}{\pi}\int_0^h \left\|\tilde{G}(t)\right\|_p \left|\tilde{E}_n(t)\right| dt, \tag{1.47}$$

$$\left\|\tilde{Q}\right\|_p \le \frac{2}{\pi}\int_0^h \left\|\tilde{G}(t)\right\|_p \left|\frac{\tilde{K}_n(t)}{2\sin t/2}\right| dt, \tag{1.48}$$

$$\left\|\tilde{R}\right\|_p \le \frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi \left\|\tilde{G}(t)\right\|_p \left|\frac{\tilde{K}_n(t)}{2\sin t/2}\right| dt. \tag{1.49}$$

С учетом соотношения (1.26), оценки (1.11) леммы 3.1.3 из (1.47) находим

$$\left\|\tilde{P}\right\|_p = O\left(|u|^\beta \int_0^h t^{\alpha-\beta-1}dt\right)=O\left(\frac{|u|^\beta}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}\right). \tag{1.50}$$

В силу (1.10) из (1.49) получаем

$$\left\|\tilde{R}\right\|_p = O\left(|u|^\beta \int_\delta^\pi t^{\alpha-\beta-1}e^{-At^2\ln n}dt\right)=$$

$$O\left(|u|^{\beta} e^{-A\delta^2 \ln n}\right) = O\left(\frac{|u|^{\beta}}{(\ln n)^{\Delta}}\right), \tag{1.51}$$

где Δ – достаточно большое положительное число. Оценивая $\tilde{Q}$ таким же образом, что и Q в доказательстве теоремы 3.1.1, из (1.48) получаем

$$\|\tilde{Q}\|_p = O\left(|u|^{\beta} \frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}\right), \quad 0 \le \beta < \alpha \le 1. \tag{1.52}$$

Сопоставляя (1.49)–(1.52), находим, что

$$\sup_{u \ne 0} \frac{\left\|\tilde{L}_n(y+u) - \tilde{L}_n(y)\right\|_p}{|u|^{\beta}} = O\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\alpha-\beta}}\right), \tag{1.53}$$
$$0 \le \beta < \alpha \le 1, \quad p > 1.$$

Аналогично получаем

$$\left\|\tilde{L}_n(\cdot)\right\|_p = O\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\alpha}}\right), \quad 0 < \alpha \le 1. \tag{1.54}$$

Оценка (1.7) немедленно следует из (1.53) и (1.54). Теорема 3.1.2 полностью доказана.

Оценки приближения функций так называемыми средними Тейлора в гёльдеровых пространствах $H_{\alpha,p}$ рассматривались в работах [35:1], [36], [64].

§3.2. Линейные средние сумм Фурье в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах

1. В данном параграфе доказываются L_p-интегральные аналоги результатов §2.2 главы 2, анонсированные в работе [26:7, 12]. Устанавливаются оценки приближения функций линейными средними сумм Фурье в метрике пространства $H_{\omega^*,p}$ на множестве $H_{\omega,p}$, где $H_{\omega,p} \subset H_{\omega^*,p}$, $p \geq 1$. При этом особенности L_p-нормы при $1 < p < \infty$ здесь не учитываются, а результаты формулируются одновременно для всех $p \geq 1$.

Пусть $\omega^*(t)$,как и раньше, неубывающая и положительная при $t > 0$ функция,

$$H_{\omega^*,p} := \Big\{ f \in L_p : \left\| f(\cdot + x) - f(\cdot + y) \right\|_p \leq$$

$$K\omega^*(|x-y|),\ \ K = K(f),\ \ p \geq 1,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \Big\},$$

где $K = K(f)$ – положительная постоянная, зависящая, вообще говоря, от f. $H_{\omega^*,p}$ является B-пространством относительно нормы

$$\|f\|_{\omega^*,p} := \|f\|_p + \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \Delta^{\omega^*,p} f(x,y), \tag{2.1}$$

где

$$\Delta^{\omega^*,p} f(x,y) := \frac{\left\| f(\cdot + x) - f(\cdot - y) \right\|_p}{\omega^*(|x-y|)},\ \ \Delta^{0,p}(x,y) := 0.$$

Полагая $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, норму в пространстве $H_{\omega^*,p}$, можно определить в виде

$$\|f\|_{\omega^*,p} = \|f\|_p + \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h f\|_p}{\omega^*(h)}.$$

Метрика, веденная с помощью нормы (2.1) в пространстве $H_{\omega^*,p}$, называется обобщенной L_p-гёльдеровой метрикой, а пространство $H_{\omega^*,p}$ называется обобщенным L_p-гёльдеровым пространством.

Как отмечалось ранее, если существуют постоянные $c>0$ и $0\le\gamma\le 1$ такие, что

$$\omega^{\gamma}(t)\le c\omega^*(t),\quad t>0,$$

то справедливо включение

$$H_{\omega,p}\subseteq H_{\omega^*,p}\subseteq L_p,$$

где $\omega(t)$ – неубывающая и положительная при $t>0$ функция. В частности, полагая $\omega^*(t)=t^{\beta}$, $\omega(t)=t^{\alpha}$, $0\le\beta<\alpha\le 1$, в качестве множества $H_{\omega,p}$ получаем множество $H_{\alpha,p}$ в пространстве $H_{\beta,p}$ с L_p-гёльдеровой нормой, определяемой равенством (1.1).

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\Lambda=\left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $k=0,\dots,n-1$; $n=1,2,\dots,$ *– бесконечная треугольная матрица чисел элементы которой удовлетворяют условию*

$$\lambda_k^{(n)}\ge 0,\quad \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}=1,\quad n=0,1,\dots;\tag{2.2}$$

Тогда если $0\le\beta<\eta\le 1$, *то для любой функции* $f\in H_{\omega,p}\subset H_{\omega^*,p}$, $p\ge 1$, *и для любого* $n=0,1,\dots$

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\},\tag{2.3}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n = 0,1,\ldots$ *и зависящая, вообще говоря, от* f, p, β, η.

Теорема 3.2.2. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2). Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 1$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,p} \subset H_{\omega^*,p}$, $p \ge 1$, *и для всех* $n = 1,2,\ldots$ *справедливо соотношение*

$$\left\| U_n(f) - f \right\|_{\omega^*,p} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x \ne y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\omega(1/k)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{k} \sum_{r=0}^{k+1} \lambda_r^{(n)} + \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \sum_{r=k}^{n} \left| \Delta \lambda_r^{(n)} \right| \right\}. \tag{2.4}$$

Соотношение (2.3) и (2.4) являются аналогами оценок (2.2.5), (2.2.6) соответственно.

Теорема 3.2.3. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2),* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и модуль непрерывности* $\omega(f;t)_p$ *функции* f *удовлетворяет условию*

$$\int_u^{\pi} t^{-2} \left(\omega(f;t)_p \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} dt = O\left(H^{(p)}_{1-\frac{\beta}{\eta}}(u) \right), \quad u \to 0+,$$

где $H_\gamma^{(p)}(u)$ *– некоторая неотрицательная на* $(0,\pi]$ *функция. Тогда если* $f \in H_{\omega,p} \subset H_{\omega^*,p}$, $p \ge 1$, *то для всех* $n = 0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}. \tag{2.5}$$

Если, кроме того,

$$\int_0^t H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}(u)du=O\left(tH_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}(t)\right),\ \ \mathrm{t}\to 0+, \tag{2.6}$$

то

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}, \tag{2.7}$$

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\},\quad n=0,1,\ldots \tag{2.8}$$

При доказательстве соответствующих теорем будем пользоваться доказанными выше леммами 2.2.1 и 2.2.2.

2. Доказательство теоремы 3.2.1. Необходимо оценить величину

$$\left\|G_n\right\|_{\omega^*,p}=\left\|G_n\right\|_p+\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left\|G_n(\cdot+x)-G_n(\cdot+y)\right\|_p}{\omega^*\left(|x-y|\right)}, \tag{2.9}$$

где

$$G_n(x)=G_n(f;x;\Lambda)=U_n(f;x;\Lambda)-f(x)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)}\right)dt, \tag{2.10}$$

$$\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

Вследствие (2.10) имеем

$$G_n(f;\tau+x;\Lambda)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_{\tau+x}(t)\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)}\right)dt, \tag{2.11}$$

где

$$\varphi_{\tau+x}(t)=f(\tau+x+t)+f(\tau+x-t)-2f(\tau+x).$$

Применяя обобщённое неравенство Минковского

$$\left\{\int_a^b\left|\int_c^d f(x,y)dy\right|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}\le\int_c^d\left\{\int_a^b|f(x,y)|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}dy, \tag{2.12}$$

с учетом (2.11) получаем

$$\|G_n(\cdot+x)-G_n(\cdot+y)\|_p\le$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\|_p}{\sin(t/2)}\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin(k+1/2)t\right|dt=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}+\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\right)\frac{\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\|_p}{\sin(t/2)}\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin(k+1/2)t\right|dt=:$$

$$I_{n,p}^{(1)}(x,y)+I_{n,p}^{(2)}(x,y). \qquad (2.13)$$

В силу неравенств

$$\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p \le 4\omega\left(f;|x-y|\right)_p \le 4K\omega\left(|x-y|\right),$$

$$\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p \le 4\omega\left(f;t\right)_p \le 4K\omega(t), \qquad (2.14)$$

где $K=K(f)$,

$$\sin t \ge \frac{2t}{\pi}, \quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}, \qquad (2.15)$$

а также неравенства $|\sin t|\le t$, $0\le t\le \dfrac{\pi}{n+1}$, из которого следует, что

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right|=O(nt), \qquad (2.16)$$

получаем

$$I_{n,p}^{(1)}(x,y)=O(1)\int_0^{\pi}\frac{\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p^{1-\frac{\beta}{\eta}}\cdot\left\|\varphi_{\tau+x}^{(t)}-\varphi_{\tau+y}^{(t)}\right\|_p^{\frac{\beta}{\eta}}}{\sin(t/2)}ntdt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \qquad (2.17)$$

На основании соотношения (2.15) леммы 2.2.2, неравенства Минковского (2.12) и соотношений (2.14) находим

$$I_{n,p}^{(2)}(x,y)=O(1)\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\cdot\left(\omega(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}, \tag{2.18}$$

$$0\le\beta<\eta\le 1.$$

Принимая во внимание соотношения (2.17) и (2.18), из (2.13) получаем

$$\left\|G_n(\cdot+x)-G_n(\cdot+y)\right\|_p=O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \tag{2.19}$$

Легко видеть, что

$$\left\|G_n\right\|_p=O(1)\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \tag{2.20}$$

Сопоставляя соотношения (2.19) и (2.20) из (2.9) окончательно получаем

$$\left\|G_n\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.2.2. Отправляемся от соотношения (2.13). В силу неравенств (2.15), (2.16) находим

$$I_{n,p}^{(1)}(x,y)=O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}n\int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega(f;t)\right)_p^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \tag{2.21}$$

В силу же монотонности функции $\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}$ и соотношения (2.14) леммы 2.2.2 получаем

$$I_{n,p}^{(2)}(x,y)=O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left(\omega(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t}dt\times$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\tau}\lambda_r^{(n)}+\frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right)dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}\frac{\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t}\times$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\tau}\lambda_r^{(n)}+\frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right)dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\omega(1/k)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\sum_{r=k}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right\}, \tag{2.22}$$

где $\tau=\left[\frac{\pi}{t}\right]$.

Легко видеть, что

$$\|G_n\|_p = O(1)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega(1/k)}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}\omega\left(\frac{1}{k}\right)\sum_{r=k}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right). \qquad (2.23)$$

Объединяя соотношения (2.21)–(2.23) с (2.13), приходим к требуемому соотношению (2.4).

Доказательство теоремы 3.2.3. Оценим величины $I_{n,p}^{(i)}(x,y)$, $i=1,2$, содержащиеся в соотношении (2.13). В силу соотношений (2.14)–(2.16) находим

$$I_{n,p}^{(1)}(x,y) = O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} n\int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \qquad (2.24)$$

Учитывая соотношение (2.15) в лемме 2.2.2 и условие теоремы, получаем

$$I_{n,p}^{(2)}(x,y) = O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \qquad (2.25)$$

Рассуждая аналогично

$$\|G_n\|_p = O(1)\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}. \qquad (2.26)$$

Объединяя оценки (2.24)–(2.26) и (2.13) приходим к соотношению (2.5).

Докажем оценку (2.7). Полагая, как и ранее, $\delta_n = \sum_{k=0}^{n} \left|\Delta\lambda_k\right|$, где $\delta_n < \pi$, будем иметь

$$\left\|G_n(\cdot + x) - G_n(\cdot + y)\right\|_p \le$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\left\|\varphi_{\tau+x}(t) - \varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p}{\sin(t/2)} \left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \sin(k+1/2)t\right| dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta_n} + \int_{\delta_n}^{\pi}\right) \frac{\left\|\varphi_{\tau+x}(t) - \varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p}{\sin(t/2)} \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \sin(k+1/2)t\right) dt =$$

$$I_{n,p}^{(1)}(x,y) + I_{n,p}^{(2)}(x,y). \tag{2.27}$$

С учетом неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \sin(k+1/2)t\right| \le 1,$$

соотношения (2.13) леммы 2.2.1, а также соотношений (2.14) и (2.15) получаем

$$I_{n,p}^{(1)}(x,y) = O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \int_0^{\delta_n} \frac{\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t} dt =$$

$$O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \sum_{k=0}^{n} \left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\sum_{k=0}^{n} \left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right). \tag{2.28}$$

Принимая во внимание условие теоремы 3.2.3, а также неравенство (2.15) в лемме 2.2.2, находим

$$I_{n,p}^{(2)}(x,y) = O(1)\left\{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \sum_{k=0}^{n} \left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| \int_{\delta_n}^{\pi} \frac{\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2} dt\right\} =$$

$$O(1)\left\{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}. \qquad (2.29)$$

Аналогичными рассуждениями приходим к соотношению

$$\|G_n\|_p=O(1)\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}. \qquad (2.30)$$

Объединяя оценки (2.27)–(2.30), получаем требуемую оценку (2.7).

Наконец покажем справедливость соотношения (2.8). Пользуясь доказанными ранее оценками

$$\lambda_j^{(n)}\le\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|,\quad j=0,1,\ldots,n;$$

$$\frac{1}{2n}\le\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|,$$

с учетом соотношения (2.13) леммы 2.2.1 с $\gamma=1-\dfrac{\beta}{\eta}$, в силу соотношений (2.14)–(2.16) будем иметь

$$I_{n,p}^{(1)}(x,y)=O(1)\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}ndt=$$

$$O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{n}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=$$

$$O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \qquad (2.31)$$

В силу соотношений (2.29)–(2.31) приходим к требуемому соотношению (2.8).

Следствие 3.2.1. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2) и, кроме того,* $\lambda_n=\left(\lambda_k^{(n)}\right)\in HBVS$. *Тогда* *если* $0 \le \beta < \eta \le 1$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,p} \subset H_{\omega^*,p}$, $p \ge 1$, *и для всех* $n = 0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\| U_n(f) - f \right\|_{\omega^*,p} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \ne y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_n^{(n)} \sum_{k=0}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \right\}. \qquad (2.32)$$

В случае, когда элементы матрицы Λ возрастают по k, оценка (2.32) установлена в [26:2].

В дальнейшем считаем, что $\forall A > 0$ $H_\gamma^{(p)}(Au) = O\left(H_\gamma^{(p)}(u)\right)$, $u \to 0+$.

Следствие 3.2.2. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2) и, кроме того,* $\lambda_n = \left(\lambda_k^{(n)}\right) \in HBVS$. *Пусть, далее,* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и модуль непрерывности* $\omega(f;t)_p$ *функции* f *удовлетворяет условию теоремы 2.2.3. Тогда если* $f \in H_{\omega,p} \subset H_{\omega^*,p}$, $p \ge 1$, *то для всех* $n = 0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\| U_n(f) - f \right\|_{\omega^*,p} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \ne y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_n^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \right\}, \qquad (2.33)$$

если, кроме того, выполняется условие (2.6), то

$$\left\| U_n(f) - f \right\|_{\omega^*,p} =$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\left\{\lambda_n^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right\}, \qquad (2.34)$$

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\left\{\lambda_n^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \qquad (2.35)$$

Следствие 3.2.3. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2) и, кроме того,* $\lambda_n=\left(\lambda_k^{(n)}\right)\in RBVS$. *Тогда если* $0\le\beta<\eta\le 1$, *то для любой функции* $f\in H_{\omega,p}\subset H_{\omega^*,p}$, $p\ge 1$, *и для всех* $n=0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\lambda_0^{(n)}\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (2.36)$$

Следствие 3.2.4. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2) и, кроме того,* $\lambda_n\in RBVS$. *Пусть, далее,* $0\le\beta<\eta\le 1$ *и модуль непрерывности* $\omega(f;t)_p$ *функции* f *удовлетворяет условию теоремы 3.2.3. Тогда если* $f\in H_{\omega,p}\subset H_{\omega^*,p}$, $p\ge 1$, *то для всех* $n=0,1,\ldots$

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\lambda_0^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \qquad (2.37)$$

если, кроме того, выполняется условие (2.6), то

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\lambda_0^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\lambda_0^{(n)}\right), \qquad (2.38)$$

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\lambda_0^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \qquad (2.39)$$

Следствие 3.2.5. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2) и, кроме того,* $\lambda_n\in RBVS$. *Тогда если* $0\le\beta<\eta\le1$, *то для любой функции* $f\in H_{\omega,p}\subset H_{\omega^*,p}$, $p\ge1$, *и для всех* $n=1,2,\ldots$ *справедливо соотношение*

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\omega(1/k)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{k}\sum_{r=0}^{k}\lambda_r^{(n)}\right\}. \qquad (2.40)$$

Полагая в условиях следствия 3.2.1 $\omega^*(t)=t^{\beta}$, $\omega(t)=t^{\alpha}$, $0\le\beta<\alpha\le1$, $\eta=\alpha$, получаем следующие утверждения ([26:2]).

Следствие 3.2.6. *Пусть выполнены все условия следствия 3.2.1 и* $0 \le \beta < \alpha \le 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\alpha,p}$, $p \ge 1$, *и для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют место соотношения*

$$\left\| U_n(f) - f \right\|_{\omega^*,p} =$$

$$\begin{cases} O(1)\left((n+1)^{\beta-\alpha} + \lambda_n^{(n)} (n+1)^{\beta-\alpha+1}\right), \ 0 < \alpha - \beta < 1, \\ O(1)\left(\dfrac{1}{n+1} + \lambda_n^{(n)} \ln(n+1)\right), \ \alpha - \beta = 1 \ (\alpha = 1, \ \beta = 0), \end{cases} \tag{2.41}$$

Следствие 3.2.7. *Пусть* $0 \le \beta < \alpha \le 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\alpha,p}$, $p \ge 1$, *для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют место соотношения*

$$\left\| f - \sigma_n(f) \right\|_{\beta,p} = \begin{cases} O(1)(n+1)^{\beta-\alpha}, \ \ \alpha - \beta < 1, \\ O(1)\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}, \ \ \alpha - \beta = 1 \ \ (\alpha = 1, \ \beta = 0). \end{cases}$$

Отметим, что для любой функции $f \in H_{1,p}$, $1 < p < \infty$, Квад (E. Quade [25]) показал, что

$$\left\| f - \sigma_n(f) \right\|_p = O\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Оценки (2.33)–(2.41) являются интегральными аналогами соответствующих сценок главы 2.

3. Приедем аналог теоремы 2.2.4 об оценке снизу величины $\left\| U_n(f) - f \right\|_{\omega^*,p}$.

Теорема 3.2.4. *Пусть величина* $\omega(\cdot)$ *является модулем непрерывности, удовлетворяющая условию (2.2.52),* $\omega^*(\cdot)$ *– положительная и возрастающая на* $(0,\infty)$ *функция. Тогда существует функция* $f_0 \in H_{\omega,p} \subset H_{\omega^*,p}$, $p \ge 1$, *такая, что*

$$\left\|U_n(f_0)-f_0\right\|_{\omega^*,p} \ge B\inf_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}},$$

где $0\le\beta<\eta\le1$, B *-некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Согласно условию теоремы функция $\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ определяет положительную монотонно убывающую к нулю последовательность чисел. Тогда вследствие L_p-аналога теоремы С.Н. Бернштейна [56, с. 51] существует функция $f_0\in L_p$, что

$$E_n(f_0)_p=\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Применяя теорему H для функции f_0 и случая $m=1$, получаем

$$\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h(f_0-U_n(f_0))\right\|_p}{\omega^*(h)}\ge B_1\frac{E_n(f_0)_p}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}=$$

$$B_1\frac{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}=B_1\frac{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\ge$$

$$B_1\inf_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Остается показать, что $f_0\in H_{\omega,p}$. Воспользуемся неравенством Стечкина, А.Ф. Тимана и М.Ф. Тимана ([56, с. 345]):

$$\omega\left(f_0;\frac{1}{k+1}\right)_p\le\frac{A}{k+1}\sum_{i=0}^{k}E_i(f_0)_p,\quad p\ge1, \tag{2.42}$$

В силу (2.42), с учётом условия (2.2.52), находим

$$\omega\left(f_0;\frac{1}{k+1}\right)_p \le \frac{A}{k+1}\sum_{i=0}^{k} E_i\left(f_0\right)_p \le \frac{A}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\omega\left(\frac{\pi}{i+1}\right)\le$$

$$\frac{A_1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\omega\left(\frac{1}{i+1}\right)\le A_i\omega\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

Стало быть, $f_0\in H_{\omega,p}$ и теорема доказана.

Из теоремы 3.2.4 вытекает неулучшаемость, в известном смысле, соотношения (2.32) следствия (3.2.1). Полагая в соотношении (2.41) условие $\lambda_n^{(n)}=O\left(\frac{1}{n+1}\right)$ замечаем, что соотношение

$$\left\|U_n\left(f\right)-f\right\|_{\beta,p}=O\left(\left(n+1\right)^{\beta-\alpha}\right),\ 0\le\beta<\alpha<1,\ p\ge 1,$$

неулучшаемо по порядку. В частности, это верно для средних Фейера $U_n\left(f\right)=\sigma_n\left(f\right)$.

Если же $\alpha=1$ и $\beta>0$, то мы можем утверждать, что существует функция f_0 такая, что

$$\omega\left(f_0;h\right)_1=O\left(h\ln\frac{1}{h}\right),\ \ h>0,$$

для которой

$$\left\|\sigma_n\left(f\right)-f\right\|_{\beta,1}\ge K\left(n+1\right)^{\beta-1},\ \ K>0.$$

Действительно, для этого положим $\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=\frac{\pi}{n+1}\left(\alpha=1\right)$. Тогда согласно аналогу теоремы С.Н. Бернштейна, найдется функция f_0 такая, что $E_n\left(f_0\right)_1=\frac{\pi}{n+1}$. Это, как известно ([56, с. 345]), влечёт за собой условие для $\omega(f_0;h)$ упомянутое выше. Далее, рассуждая, как и при доказательстве теоремы 3.2.4 получаем требуемую оценку.

4. Приведем ещё одну оценку величины $\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p}$, дополняющую предыдущие оценки и являющуюся аналогом оценки 2.2.54.

Теорема 3.2.5. *Пусть* $\Lambda=\left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $k=0,\dots,n-1$, $n=1,2,\dots$, *– бесконечная треугольная матрица положительных чисел, элементы которой удовлетворяют условиям (2.2) и, кроме того,* $\lambda_k^{(n)}\le\lambda_{k+1}^{(n)}$, $k,n=0,1,\dots$. *Тогда если* $0\le\beta<\eta\le1$, *то для любой функции* $f\in H_{\omega,p}\subset H_{\omega^*,p}$, $p\ge1$, *для каждого* $n\in\mathbb{N}$ *имеет место соотношение*

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\beta,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\ln\left(1+n\lambda_n^{(n)}\right)+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\left(\omega(1/k)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\},\quad(2.43)$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n\in\mathbb{N}$ *и зависящая, вообще говоря, от* f, p, β, η, $\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]$ *– целая часть числа* $\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}$.

Доказательство. С учетом обобщенного неравенства Минковского и того, что $(n+1)\lambda_n^{(n)}\ge1$ будем иметь

$$\left\|G_n(\cdot+x)-G_n(\cdot+y)\right\|_p\le$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(k+1/2)}{\sin(t/2)}\right|dt=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{n+1}}+\int_{\frac{1}{n+1}}^{\lambda_n^{(n)}}+\int_{\lambda_n^{(n)}}^{\pi}\right)\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(k+1/2)}{\sin(t/2)}\right|dt=:$$

$$\overline{I}_{n,p}^{(1)}(x,y)+\overline{I}_{n,p}^{(2)}(x,y)+\overline{I}_{n,p}^{(3)}(x,y). \qquad (2.44)$$

В силу неравенств (2.14), (2.15) находим

$$\overline{I}_{n,p}^{(1)}(x,y)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n+1}}\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p^{1-\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p^{\frac{\beta}{\eta}}\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(k+1/2)}{\sin t/2}\right|dt=$$

$$O(1)\big(\omega(|x-y|)\big)^{\frac{\beta}{\eta}}\int_0^{\frac{1}{n+1}}\frac{\big(\omega(f;t)_p\big)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}kt\right)dt=$$

$$O(1)\big(\omega(|x-y|)\big)^{\frac{\beta}{\eta}}\int_0^{\frac{1}{n+1}}n\big(\omega(f;t)_p\big)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt=$$

$$O(1)\big(\omega(|x-y|)\big)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f;\frac{1}{n+1}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}=$$

$$O(1)\big(\omega(|x-y|)\big)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \qquad (2.45)$$

Поскольку $\left|\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right|\le 1$, $t\in\mathbb{R}$, вследствие неравенств (2.14) находим

$$\overline{I}_{n,p}^{(2)}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\lambda_n^{(n)}}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f;t\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\lambda_n^{(n)}}\frac{\left(\omega\left(f;t\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t}dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\ln\left(1+n\lambda_n^{(n)}\right). \qquad (2.46)$$

При помощи преобразования Абеля с учётом оценок (2.14) получаем

$$\overline{I}_{n,p}^{(3)}(x,y)=\frac{\lambda_n^{(n)}}{2\pi}\int\limits_{\lambda_n^{(n)}}^{\pi}\frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f;t\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt=$$

$$O(1)\,\lambda_n^{(n)}\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int\limits_{\lambda_n^{(n)}}^{\pi}\frac{\left(\omega\left(f;t\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt=$$

$$O(1)\,\lambda_n^{(n)}\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int\limits_{1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\left(\omega\left(f;\frac{1}{t}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\left(\omega\left(1/k\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \qquad (2.47)$$

Объединяя соотношения (2.45)–(2.47), из (2.44) выводим

$$\left\|G_n(\cdot+x)-G_n(\cdot+y)\right\|_p=O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\ln\left(1+n\lambda_n^{(n)}\right)+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\left(\omega\left(1/k\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \quad (2.48)$$

Понятно, что

$$\left\|G_n\right\|_p=O(1)\left\{\left(\omega\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right)\ln\left(1+n\lambda_n^{(n)}\right)+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\lambda_n^{(n)}}\right]}\left(\omega\left(1/k\right)\right)\right\}. \quad (2.49)$$

В силу (2.48) и (2.49) получаем соотношение (2.43). Теорема доказана.

§3.3. Линейные средние сумм Фурье в модифицированных L_p-гёльдеровых пространствах

1. Пусть $\dot{\Delta}_h^2 f(x):=f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$ – вторая симметричная разность и

$$\omega_2(f;t)_p:=\sup_{0<h\le t}\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p. \quad (3.1)$$

Величина (3.1) определяет интегральный модуль гладкости функции из L_p.

Пусть, далее $\omega(\cdot)$ положительная и неубывающая функция на промежутке $(0,\infty)$ и $H_{\omega,p,2}=H_{\omega,p,2}(0,2\pi)$ – пространство измеримых 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p}{\omega(h)}<\infty \quad (3.2)$$

с нормой

$$\|f\|_{\omega,p,2} := \|f\|_p + \sup_{h>0} \frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p}{\omega(h)}. \tag{3.3}$$

Аналогично доказательству предложения 1.4.1 (см. также [14]) можно показать, что $H_{\omega,p,2}$ является B-пространством относительно нормы (3.3) с полунормой (3.2). Из следствия 1.6.1 вытекает, что если $\omega(t) = t^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, то $H_{\omega,p,2} = H_{\omega,p}$, причем нормы в этих пространствах эквивалентны.

Напомним (см. §1.1.6), что если существует последовательность чисел $\{h_i\} \to 0$ такая, что $h_i^{-h}\omega(h_i) \to 0$, то включение $f \in H_{\omega,p,n}$, где $n = 1,2$, влечёт условие $f = 0$, $1 \le p < \infty$.

Имеет место следующий аналог теоремы 2.2.6.

Теорема 3.3.1. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяет условиям 2.2. Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 1$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,p,2} \subset H_{\omega^*,p,2}$ *справедливо соотношение*

$$\|U_n(f) - f\|_{\omega^*,p,2} = O(1)\sup_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}, \tag{3.4}$$

$$n \in \mathbb{N}_0,$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n *и зависящая, вообще говоря, от* f, p, β, η.

Следствие 3.3.1. *Пусть* $0 \le \beta < \alpha \le 2$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\alpha,p,2}$, $p \ge 1$, *справедливы соотношения*

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{\beta,p,2}=\begin{cases}O\left((n+1)^{\beta-\alpha}\right), & \alpha-\beta<1,\\ O\left(\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\right), & \alpha-\beta=1,\\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \alpha-\beta>1,\end{cases} \qquad (3.5)$$

$$\|f\|_{0,p,2}:=\|f\|_p .$$

Соотношения (3.5) были получены в работе [14]. С учётом упомянутого ранее результата Квада, порядок $O\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ при $1<p<\infty$ достигается и в случае $\alpha=1$, $\beta=0$.

Доказательство теоремы 3.3.1. Анализ доказательства 3.2.1 показывает, что

$$\|G_n(f,\Lambda)\|_p=$$

$$O(1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2(f;t)_p dt+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\int_1^{n+1}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{t}\right)_p dt\right\}.$$

Принимая во внимание, что $\dot{\Delta}_h^2(U_n-f)=\dot{\Delta}_h^2U_n-\dot{\Delta}_h^2f$, в силу неравенств

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2f;t\right)_p\le 4\left\|\dot{\Delta}_h^2f\right\|_p,$$

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2f;t\right)_p\le 4\omega_2(f;t)_p,\quad h>0,$$

находим

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2G_n(f,\Lambda)\right\|_p=$$

$$O(1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2f;t\right)_p dt+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\int_1^{n+1}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2f;\frac{\pi}{t}\right)_p dt\right\}=$$

$$O(1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\cdot\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p\right)^{\frac{\beta}{\eta}}dt+\right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\int_1^{n+1}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{t}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\cdot\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{t}\right)_p\right)^{\frac{\beta}{\eta}}dt\right\}=$$

$$O(1)\left\{\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p^{\frac{\beta}{\eta}}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega_2(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt+\right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p^{\frac{\beta}{\eta}}\int_1^{n+1}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{t}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt\right\}=$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\int_1^{n+1}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{t}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt\right\}=$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\},$$

$$h>0,\quad 0\le\beta<\eta\le 1.$$

Аналогично этому находим

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_p=$$

$$O(1)\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{r=0}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}.$$

Отсюда, вследствие определения нормы (3.3), окончательно получаем (3.4).

Теорема доказана.

2. Приведем аналог теоремы 3.2.4 в случае пространств $H_{\omega,p,2}$, $p\ge 1$.

Теорема 3.3.2. *Пусть величина* $\omega(\cdot)$ *является модулем непрерывности, удовлетворяющая условию (2.2.64), а* $\omega^*(\cdot)$ *– положительная и возрастающая на* $(0,\infty)$ *функция. Тогда существует функция* $f_0\in H_{\omega,p,2}\subset H_{\omega^*,p,2}$, $p\ge 1$, *такая, что*

$$\left\|U_n(f_0)-f_0\right\|_{\omega^*,p,2}\ge B\inf_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}},$$

где $0\le\beta<\eta\le 2$, B *-некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Согласно L_p-аналогу теоремы С.Н. Бернштейна найдется функция $f_0\in L_p$, $p\ge 1$, что $E_n(f_0)_p=\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$. Применяя теорему H для функции f_0 и случая $m=2$, $p\ge 1$, будем иметь

$$\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2\left(f_0-U_n(f_0)\right)\right\|_p}{\omega^*(h)}\ge B_1\frac{E_n(f_0)_p}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}=$$

$$B_1\frac{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}=B_1\frac{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\ge$$

$$B_1 \inf_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \geq$$

$$B_1 \inf_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \left(\omega\left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Докажем включение $f_0 \in H_{\omega,p,2}$. Используя неравенство С.Б. Стечкина, А.Ф. Тимана и М.Ф. Тимана (см., напр., [57, с. 8])

$$\omega_2(f;1/k)_p \leq \frac{A_2}{k_2} \sum_{i=1}^{k} iE_i(f)_p, \quad p \geq 1, \tag{3.6}$$

где A_2 – константа, независящая от k, p и f, будем иметь

$$\omega_2(f_0;1/k)_p \leq \frac{A_2}{k^2} \sum_{i=1}^{k} iE_i(f_0)_p \leq \frac{A_2}{k^2} \sum_{i=1}^{k} i\omega\left(\frac{\pi}{i+1} \right) \leq$$

$$\frac{A_2}{k^2} \sum_{i=1}^{k} i\omega\left(\frac{1}{i} \right) \leq A_3 \omega\left(\frac{1}{k} \right).$$

В результате получаем, что $f_0 \in H_{\omega,p,2}$. Теорема 3.3.2 доказана.

3. Теорема 3.3.3. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям 2.2. Тогда если* $0 \leq \beta < \eta \leq 2$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,p,2} \subset H_{\omega^*,p,2}$ *и для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливо соотношение*

$$\|G_n(f;\Lambda)\|_{\omega^*,p,2} = O(1) \sup_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{ \left(\omega\left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\omega(1/k))^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{k} \sum_{r=0}^{k+1} \lambda_r^{(n)} + \right.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\sum_{r=k}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\Bigg\}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Анализируя доказательство теоремы 3.2.2 легко видеть, что

$$\left\|G_n(f;\Lambda)\right\|_p = O(1)\Bigg\{\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2(f;t)_p\,dt +$$

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2(f;t)_p}{t}\left(\sum_{r=0}^{\tau}\lambda_r^{(n)}+\frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right)dt\Bigg\}, \tag{3.8}$$

где $\tau=[\pi/t]$, $G_n(f,\Lambda):=U_n(f)-f$.

Вследствие этого имеем

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n(f;\Lambda)\right\|_p = O(1)\Bigg\{\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p dt +$$

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p}{t}\left(\sum_{r=0}^{\tau}\lambda_r^{(n)}+\frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right)dt\Bigg\} =$$

$$O(1)\Bigg\{\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p^{\frac{\beta}{\eta}}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega_2(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt \; +$$

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p^{\frac{\beta}{\eta}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left(\omega_2(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t}\left(\sum_{r=0}^{\tau}\lambda_r^{(n)}+\frac{1}{t}\sum_{r=\tau}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right)dt\Bigg\}. \tag{3.9}$$

Продолжая оценивать (3.9), также как в (2.24) и (2.25), получаем

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n(f,\Lambda)\right\|_p = O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\omega(1/k)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\sum_{r=k}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right\}. \quad (3.10)$$

Оценивая величину (3.8) подобно (2.24) и (2. 25), будем иметь

$$\left\|G_n(f;\Lambda)\right\|_p = O(1)\left\{\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega(1/k)}{k}\sum_{r=0}^{k+1}\lambda_r^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}\omega\left(\frac{1}{k}\right)\sum_{r=k}^{n}\left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right|\right\}. \quad (3.11)$$

Объединяя соотношения (3.10) и (3.11), приходим к требуемому соотношению (3.7).

Докажем аналог теоремы 3.2.3.

Теорема 3.3.4. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2),* $0\le\beta<\eta\le 2$ *и модуль гладкости* $\omega_2(f;t)_p$ *функции* f *удовлетворяет условию*

$$\int_u^{\pi} t^{-2}\left(\omega_2(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt := O\left(H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}(u)\right),\quad u\to 0+, \quad (3.12)$$

$$H_\gamma^{(p,2)}(u) := H_\gamma^{(p,2)}(u,\omega_2).$$

Тогда если $f\in H_{\omega,p,2}\subset H_{\omega^*,p,2}$, $p\ge 1$, *то для всех* $n=0,1,\ldots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \qquad (3.13)$$

если, кроме того,

$$\int_0^t H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}(u)du = O\left(tH_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}(t)\right), \ \ \mathrm{t}\to 0+, \qquad (3.14)$$

то

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}, \qquad (3.15)$$

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \ \ n=0,1,\ldots \qquad (3.16)$$

Доказательство. Анализируя соотношение (2.5) в теореме 3.2.3, приходим к выводу, что

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_p = O(1)\left\{n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2(f;t)_p\,dt+\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2(f;t)_p}{t^2}dt\right\}. \qquad (3.17)$$

Вследствие (3.17) и условия (3.12) будем иметь

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2\left(U_n-f\right)\right\|_p=O(1)\left\{n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)dt+\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p}{t^2}dt\right\}=$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega_2\left(f;t\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt+\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left(\omega_2\left(f;t\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt\right\}=$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}. \tag{3.18}$$

Продолжая оценку (3.17), подобно (3.18) получаем

$$\left\|G_n\left(f,\Lambda\right)\right\|_p=O(1)\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}. \tag{3.19}$$

Сопоставляя оценки (3.18) и (3.19) приходим к требуемому соотношению (3.13).

Перейдем к доказательству соотношения (3.15). Анализ доказательства соотношения (2.7) дает нам следующую оценку

$$\left\|G_n\left(f,\Lambda\right)\right\|_p =$$

$$O(1)\left\{\int_0^{\delta_n}\frac{\omega_2\left(f;t\right)_p}{t}dt+\delta_n\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{\omega_2\left(f;t\right)_p}{t^2}dt\right\}, \qquad (3.20)$$

где $\delta_n=\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|$.

Таким образом, в силу (3.20) имеем

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n\left(f,\Lambda\right)\right\|_p =$$

$$O(1)\left\{\int_0^{\delta_n}\frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p}{t}dt+\delta_n\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p}{t^2}dt\right\}=$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\int_0^{\delta_n}\frac{\left(\omega_2\left(f;t\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t}dt+\delta_n\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{\left(\omega_2\left(f;t\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt\right\}. \qquad (3.21)$$

Вследствие соотношения (2.13) леммы 2.2.1 и условия (3.12) получаем

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n\left(f,\Lambda\right)\right\|_p = O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}.$$

Продолжая аналогично оценивать соотношение (3.20), находим

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_p = O(1)\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\right)\right\}. \quad (3.22)$$

Принимая во внимание оценки (3.21), (3.22), получаем соотношение (3.15).

Для доказательства (3.16) заметим, что соотношения (2.25) и (2.31) содержат в себе следующее соотношение (при $\beta = 0$)

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_p = O(1)\times$$

$$\left\{n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2(f;t)_p\,dt + \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2(f;t)_p}{t^2}dt\right\}. \quad (3.23)$$

Следовательно, на основании (3.23) будем иметь

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 G_n(f;\Lambda)\right\|_p = \left\|\dot{\Delta}_h^2(U_n - f)\right\|_p =$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left(\omega_2(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt +\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left(\omega_2(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{t^2}dt\right\}.$$

Далее рассуждая как и при доказательстве соотношений (2.25) и (2.31), с учётом оценки

$$\left\|G_n(f,\Lambda)\right\|_p = O(1)\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\},$$

полученной из (3.23) по аналогии с (2.25) и (2.31), приходим к соотношению (3.16).

Теорема полностью доказана.

Следствие 3.3.2. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2) и, кроме того,* $\lambda_n = \left(\lambda_k^{(n)}\right) \in HBVS$. *Тогда если* $0 \le \beta < \eta \le 2$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega,p,2} \subset H_{\omega^*,p,2}$, $p \ge 1$, *и для всех* $n = 0,1,\dots$ *имеет место соотношение*

$$\left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*,p,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_n^{(n)}\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (3.24)$$

Следствие 3.3.3. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2) и, кроме того,* $\lambda_n = \left(\lambda_k^{(n)}\right) \in HBVS$. *Пусть, далее,* $0 \le \beta < \eta \le 2$ *и модуль гладкости* $\omega_2(f;t)_p$ *функции* f *удовлетворяет условию (3.12). Тогда если* $f \in H_{\omega,p,2} \subset H_{\omega^*,p,2}$, $p \ge 1$, *то для всех* $n = 0,1,\dots$ *справедливо соотношение*

$$\left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*,p,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \lambda_n^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \qquad (3.25)$$

если, кроме того, выполняется условие (3.14), то

$$\left\|U_n(f) - f\right\|_{\omega^*,p,2} =$$

$$O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left\{\lambda_n^{(n)} H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p)}\left(\lambda_n^{(n)}\right)\right\}, \qquad (3.26)$$

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p,2}=$$

$$O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left\{\lambda_n^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \tag{3.27}$$

Следствие 3.3.4. *Пусть элементы матрицы* Λ *удовлетворяют условиям (2.2) и, кроме того,* $\lambda_n \in RBVS$. *Пусть, далее,* $0\le\beta<\eta\le 2$ *и модуль гладкости* $\omega_2(f;t)_p$ *функции* f *удовлетворяет условию (3.12). Тогда если* $f\in H_{\omega,p,2}\subset H_{\omega^*,p,2}$, *то для всех* $n=0,1,\ldots$

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p,2}=O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\lambda_0^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}, \tag{3.28}$$

если, кроме того, выполняется условие (3.14), то

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p,2}=O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\lambda_0^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\lambda_0^{(n)}\right), \tag{.329}$$

$$\left\|U_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p,2}=O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\lambda_0^{(n)}H_{1-\frac{\beta}{\eta}}^{(p,2)}\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \tag{3.30}$$

Соотношение (3.24)–(3.30) являются интегральными аналогами оценок (2.2.83)–(2.2.90).

§3.4. Группы отклонений рядов Фурье в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах и их модификациях

1. В данном параграфе устанавливаются оценки скорости сходимости величин $h_v^{(n)}(f;x;\alpha)$ в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах $H_{\omega^*,p}$, где

$$h_v^{(n)}(f;x;\alpha):=\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\rho_k(f;x),\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{4.1}$$

где $\alpha=(\alpha_n(v))$, $n\in\mathbb{N}_0$, – произвольная последовательность неотрицательных функций, определенных на множестве $V\subset\mathbb{R}$, $\rho_n(f;x)=f(x)-S_n(f;x)$, $S_n(f;x)$ – суммы Фурье порядка n

Результаты данного параграфа установлены в работах автора [26:8, 10].

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, которое не лишено и самостоятельного интереса. Введем следующее обозначение

$$H_{v,p}^{(n)}(f;x,y,\alpha):=$$

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\left[\rho_k(f;\tau+x)-\rho_k(f;\tau+y)\right]\right\|_p$$

$$v\in V,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Лемма 3.4.1. *Пусть* $0\le\beta<\eta\le1$ *и* $\alpha=(\alpha_n(v))$, $n\in\mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n\in\mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v\in V\subset\mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f\in H_{\omega,p}$, $p\ge1$, *имеет место соотношение*

$$\left|H_{v,p}^{(n)}(f;x,y,\alpha)\right|=$$

$$O(1)\alpha_n(v)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}, \qquad (4.2)$$

$$v\in V,\ \ n\in\mathbb{N}_0.$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n, x, y, v *и зависящая, вообще говоря, от* f, β, η, p.

Доказательство. Пользуясь обозначениями (1.3) и (1.5) запишем представление

$$\rho_n(f;x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)D_n(t)dt.$$

Тогда

$$H_v^{(n)}(f;x,y,\alpha)=$$

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right]D_k(t)dt\right\|_p \le$$

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left[\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right]D_k(t)dt\right\|_p +$$

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\left[\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right]D_k(t)dt\right\|_p =:$$

$$\mathrm{I}_{1,p}^{(n)}(f;x,y)+\mathrm{I}_{2,p}^{(n)}(f;x,y). \qquad (4.3)$$

Принимая во внимание неравенство

$$\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|\le 4K\omega(|x-y|), \qquad (4.4)$$

и оценку $|D_k(t)|\le k+1,\ n\le k\le 2n$, а также обобщенное неравенство Минковского (2.7), находим

$$\mathrm{I}_{1,p}^{(n)}(f;x,y)\le\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\times$$

$$\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p D_k(t)\,dt=$$

$$O(1)\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega(|x-y|)\,dt=O(1)\alpha_n(v)\,\omega(|x-y|). \quad (4.5)$$

Далее воспользуемся представлением ядра Дирихле в виде

$$D_n(t)=\frac{\sin nt}{2tg\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\cos nt.$$

С учетом этого равенства получаем

$$\mathrm{I}_{2,p}^{(n)}(f;x,y)\le$$

$$\left\|\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left[\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right]}{2tg\frac{t}{2}}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\sin ktd\right\|_p+$$

$$\left\|\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left[\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right]}{2}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\cos ktd\right\|_p=:$$

$$\mathrm{I}_{3,p}^{(n)}(f;x,y)+\mathrm{I}_{4,p}^{(n)}(f;x,y). \quad (4.6)$$

Вследствие неравенства

$$2tg\frac{t}{2}\ge t,\quad 0\le t\le\pi,$$

преобразования Абеля:

$$\left|\sum_{k=n}^{2n-1}\alpha_k(v)\begin{Bmatrix}\sin kt\\ \cos kt\end{Bmatrix}\right|<2\pi\alpha_n(v)t^{-1},$$

соотношения (4.4) и обобщенного неравенствам Минковского получаем

$$\mathrm{I}_{3,p}^{(n)}(f;x,y)=O\left(\frac{1}{n+1}\right)\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\left\|\varphi_{\tau+x}(t)-\varphi_{\tau+y}(t)\right\|_p}{t^2}\alpha_n(v)\,dt=$$

$$O(1)\frac{\alpha_n(v)}{n+1}\omega(|x-y|)\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} t^{-2}dt = O(1)\alpha_n(v)\omega(|x-y|). \quad (4.7)$$

Аналогично

$$\mathrm{I}_{4,p}^{(n)}(f;x,y) = O(1)\alpha_n(v)\omega(|x-y|). \quad (4.8)$$

Следовательно, в силу соотношений (4.3), (4.5)–(4.8) получаем

$$H_{v,p}^{(n)}(f;x,y,\alpha) = O(1)\alpha_n(v)\omega(|x-y|). \quad (4.9)$$

С другой стороны

$$H_{v,p}^{(n)}(f;x,y,\alpha) \le$$

$$\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\left[\rho_k(f;\tau+x)-\rho_k(f;\tau+y)\right]\right\|_p \le$$

$$\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f;\tau+x)\right\|_p +$$

$$\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f;\tau+y)\right\|_p . \quad (4.10)$$

Известно (см., например, [40:1, с. 44], [53, с. 383]), что при $p=1$

$$\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f;\tau+x)\right\|_1 \le K\alpha_n(v)E_n(f)_1 . \quad (4.11)$$

Если же $p>1$, то в силу известного неравенства М. Рисса ([4:2, С. 593]):

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_p \le K(p)E_n(f)_p ,$$

находим

$$\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f;\tau+x)\right\|_p \le K(p)\alpha_n(v)E_n(f)_p , \quad (4.12)$$

где $E_n(f)_p$ – величина наилучшего приближения тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве L_p, $p \ge 1$. На основании (4.10)–(4.12) получаем

$$H_{v,p}^{(n)}(f;x,y,\alpha) = O(1)\alpha_n(v)E_n(f)_p. \qquad (4.13)$$

В силу же неравенства Джексона ([56, с. 274])

$$E_n(f)_p \le K(p)\omega\left(f;\frac{1}{n+1}\right)_p, \quad p \ge 1,$$

принимая во внимание, что $f \in H_{\omega,p}$, из (4.13) находим

$$H_{v,p}^{(n)}(f;x,y,\alpha) = O(1)\alpha_n(v)\omega\left(f;\frac{1}{n+1}\right)_p =$$

$$O(1)\alpha_n(v)\omega\left(\frac{1}{n+1}\right). \qquad (4.14)$$

Следовательно, объединяя соотношения (4.9) и (4.14), окончательно получаем

$$H_{v,p}^{(n)}(f;x,y,\alpha) = \left(H_{v,p}^{(n)}(f;x,y,\alpha)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(H_{v,p}^{(n)}(f;x,y,\alpha)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} =$$

$$O(1)\alpha_n(v)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Лемма 3.4.1 доказана.

2. Основное утверждение данного параграфа содержится в следующей теореме.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и* $\alpha = (\alpha_n(v))$, $n \in \mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n \in \mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v \in V \subset \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\omega,p} \subset H_{\omega^*,p}$, $p \ge 1$, *имеет место соотношение*

$$\left\|h_{\nu}^{(n)}(f)\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(\nu)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{4.15}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n\in\mathbb{N}_0$, $\nu\in V$ *и зависящая, вообще говоря, от* f, p, β, η.

Доказательство. Оценим величину

$$\left\|h_{\nu}^{(n)}(f)\right\|_{\omega^*,p}=\left\|h_{\nu}^{(n)}(f)\right\|_{p}+$$

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left\|h_{\nu}^{(n)}(f;\tau+x)-h_{\nu}^{(n)}(f;\tau+y)\right\|_{p}}{\omega^*(|x-y|)}, \tag{4.16}$$

где $f\in H_{\omega,p}$ и $0\le\beta<\eta\le 1$, $p\ge 1$.

В силу леммы 3.4.1 находим

$$\left\|h_{\nu}^{(n)}(f;\tau+x)-h_{\nu}^{(n)}(f;\tau+y)\right\|_{p}=$$

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left[\rho_k(f;\tau+x)-\rho_k(f;\tau+y)\right]\right\|_{p}=$$

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=2^{\nu}n}^{2^{\nu+1}n}\alpha_k(\nu)\left[\rho_k(f;\tau+x)-\rho_k(f;\tau+y)\right]\right\|_{p}\le$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(2^{\nu}n+1\right)\left\|\frac{1}{2^{\nu}n+1}\sum_{k=2^{\nu}n}^{2^{\nu+1}n}\alpha_k(\nu)\left[\rho_k(f;\tau+x)-\rho_k(f;\tau+y)\right]\right\|_{p}=$$

$$O(1)\omega(|x-y|)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{2^{\nu}n}(v)\left(2^{\nu}n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^{\nu}n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}=$$

$$O(1)\omega(|x-y|)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.2\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{2^{\nu}n}(v)\left(2^{\nu-1}n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^{\nu}n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}=$$

$$O(1)\omega(|x-y|)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (4.17)$$

Таким образом

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y,<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left\|h_{\nu}^{(n)}(f;\tau+x)-h_{\nu}^{(n)}(f;\tau+y)\right\|_p}{\omega^*(|x-y|)}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y,<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\},\quad v\in V. \qquad (4.18)$$

Аналогично, с учетом неравенств (4.11), (4.12) и неравенства Джексона заключаем, что

$$\left\|h_v^{(n)}(f)\right\|_p = O(1)\times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right\}. \quad (4.19)$$

Объединяя соотношения (4.16)–(4.19), приходим к (4.15).

Приведем некоторые утверждения и оценки, вытекающие из доказанной теоремы. В частности, полагая в (4.15) $n=0$ приходим к следующему утверждению.

Следствие 3.4.1. *Пусть* $0\le\beta<\eta\le1$ *и* $\alpha=(\alpha_n(v))$, $n\in\mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n\in\mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v\in V\subset\mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f\in H_{\omega,p}\subset H_{\omega^*,p}$, $p\ge1$, *имеет место соотношение*

$$\left\|h_v^{(0)}(f)\right\|_{\omega^*,p} = O(1)\times$$

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \quad (4.20)$$

В частности, полагая $\alpha_k(v)=(1-v)v^k$, $0<v<1$, из (4.20) для метода Абеля находим оценку, являющуюся аналогом соотношения (3.21):

$$\left\|(1-v)\sum_{k=0}^{\infty}v^k\rho_k(f)\right\|_{\omega^*,p} =$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\left\{(1-v)\sum_{k=0}^{\infty}v^k\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\},$$

$$p\ge1.$$

Полагая

$$\alpha_k(v)=\alpha_k(n)=\alpha_k^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, & 0\le k\le n+1,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

для метода Фейера из (4.20) получаем

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\rho_k(f)\right\|_{\omega^*,p}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\},$$

$$p\ge 1.$$

Возвращаясь к пространствам $H_{\gamma,p}$, полагая $\omega^*(t)=t^{\gamma}$, $\omega(t)=t^{\alpha}$, $\eta=\alpha$, $\beta=\gamma$, $0\le\gamma<\alpha\le 1$ на основании соотношения (4.20) получаем такое утверждение.

Следствие 3.4.2. *Пусть* $0\le\beta<\alpha\le 1$. *Тогда для любой функции* $f\in H_{\alpha,p}$, $p\ge 1$ *имеют место соотношения*

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\rho_k(f)\right\|_{\beta,p}=\begin{cases}O(1)\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-\beta}}, & \alpha-\beta<1,\\ O(1)\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}, & \alpha-\beta=1,\end{cases}$$

где $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные по* $n\in\mathbb{N}_0$ *и зависящие, вообще говоря, от* f, *а норма* $\|\cdot\|_{\gamma,p}$ *определена равенством (1.1).*

Следствие 3.4.3. *Пусть* $0\le\beta<\eta\le 1$ *и* $\alpha=(\alpha_n(v))$, $n\in\mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n\in\mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v\in V\subset\mathbb{R}$ *и удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v) = 1, \quad v \in V.$$

Тогда для любой функции $f \in H_{\omega,p} \subset H_{\omega^*,p}$ *справедливо соотношение*

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v) S_k(f) \right\|_{\omega^*,p} =$$

$$O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x \neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v) \left(\omega\left(\frac{1}{k+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \right\},$$

$$v \in V.$$

Рассмотрим аналог теоремы 3.4.1. На этом пути докажем следующее вспомогательное утверждение, которое также не лишено самостоятельного интереса.

Лемма 3.4.2. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$ *и* $\alpha = (\alpha_n(v))$, $n \in \mathbb{N}_0$, *– последовательность функций, невозрастающая по* $n \in \mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v \in V \subset \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\omega,p,2}$, $p \ge 1$, *имеет место соотношение*

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v) \rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right) \right\|_p =$$

$$O(1) \alpha_k(v) \left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \left(\omega\left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}, \tag{4.21}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n, h, v *и зависящая, вообще говоря, от* f, p, β, η.

Доказательство. Из доказательства леммы 3.4.1 усматриваем, что

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \alpha_k(v) \rho_k(f) \right\|_p =$$

$$O(1)\left\{\alpha_n(v)n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2(f;t)_p\,dt+\alpha_n(v)\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2(f;t)_p}{t^2}dt\right\}.$$

Отсюда

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}^2 f\right)\right\|_p=$$

$$O(1)\left\{\alpha_n(v)n\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p dt+\alpha_n(v)\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p}{t^2}dt\right\}.$$

В силу соотношений

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p\le 4\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p=O(1)\omega(h)$$

находим

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_p=O(1)\alpha_n(v)\omega(h),\ \ p\ge 1. \quad (4.22)$$

Пусть теперь $p=1$. Тогда на основании неравенства

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f)\right\|_1\le K\alpha_n(v)E_n(f)_1,\ \ K=const,$$

получаем

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_1=$$

$$O(1)\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k(f)\right\|_1=O(1)\alpha_n(v)E_n(f)_1.$$

Если же $p>1$, то в силу неравенства М. Рисса

$$\left\|\rho_n(f)\right\|_p\le K_p E_n(f)_p,\ \ K_p=K(p),$$

находим

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_p=O(1)\alpha_n(v)E_n(f)_p,$$

где $p\ge 1$.

Вследствие известного интегрального неравенства Джексона-Тимана ([56, с. 274], при $k=2$ Н.И. Ахиезера [3]):

$$E_n(f)_p \le C_k\omega_k\left(f;\frac{1}{n+1}\right)_p,\ p\ge 1,\ C_k=C(k),$$

где $\omega_k(f;\cdot)_p$ – интегральный модуль непрерывности k-го порядка, при $k=2$, для любой функции $f\in H_{\omega,p,2}$ получаем, что

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_p =$$

$$O(1)\alpha_n(v)\omega_2\left(f;\frac{1}{n+1}\right)_p = O(1)\alpha_n(v)\omega\left(\frac{1}{n+1}\right). \quad (4.23)$$

Соотношение (4.22) в сочетании с (4.23) дает нам требуемое соотношение 4.21, чем и завершается доказательство леммы 3.5.2.

Теорема 3.4.2. *Пусть* $0\le\beta<\eta\le 2$ *и* $\alpha=(\alpha_n(v))$, $n\in\mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по* $n\in\mathbb{N}_0$ *при каждом фиксированном* $v\in V\subset\mathbb{R}$. *Тогда для любого функции* $f\in H_{\omega,p,2}\subset H_{\omega^*,p,2}$, $p\ge 1$, *имеет место соотношение*

$$\left\|h_v^{(n)}(f)\right\|_{\omega^*,p,2} = O(1)\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\},\ n\in\mathbb{N}_0, \quad (4.24)$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n\in\mathbb{N}_0$, v *и зависящая, вообще говоря, от* f, β, η *и* p.

Доказательство. Оценим величину

$$\left\|h_v^{(n)}(f)\right\|_{\omega^*,p,2} = \left\|h_v^{(n)}(f)\right\|_p + \sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2 h_v^{(n)}(f)\right\|_p}{\omega(h)}.$$

В силу предыдущей леммы

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 h_v^{(n)}(f)\right\|_p = \left\|\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_p =$$

$$\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_p =$$

$$\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n+1\right)\frac{1}{2^i n+1}\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_p \le$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n+1\right)\left\|\frac{1}{2^i n+1}\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n}\alpha_k(v)\rho_k\left(\dot{\Delta}_h^2 f\right)\right\|_p =$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)\left(2^i n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\} =$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.2\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)\left(2^{i-1}n+1\right)\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\} =$$

$$O(1)\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (4.25)$$

Принимая во внимание, что при условии $f \in H_{\omega,p,2}$

$$\left\|h_v^{(n)}(f)\right\|_p = O(1)\times$$

$$\left\{(n+1)\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right\}, \quad (4.26)$$

с учетом оценки (4.25) и (4.26) получаем соотношение (4.24), чем и завершается доказательство теоремы 3.4.2.

Приведем утверждения, являющиеся аналогами теорем 2.2.4 и 2.3.3 для случая пространств $H_{\omega,p}$ и $H_{\omega,p,2}$.

Теорема 3.4.3. *Пусть величина* $\omega(\cdot)$ *является модулем непрерывности, удовлетворяющая условию (2.2.52),* $\omega^*(\cdot)$ *– положительная и возрастающая на* $(0,\infty)$ *функция. Пусть, далее,* $\alpha=(\alpha_k(v))$, $k\in\mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, удовлетворяющая условиям*

$$\begin{aligned}&\alpha_k(v)=0, \quad k\ge n+1, \quad v\in V,\\ &\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(v)=1, \quad v\in V.\end{aligned} \quad (4.27)$$

Тогда существует функция $f_0\in H_{\omega,p}$, *для которой имеет место неравенство*

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(v)\rho_k(f_0)\right\|_{\omega^*,p} \ge K\inf_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}},$$

где $0\le\beta<\eta\le1$, K *– некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. В силу условий (4.27), с учётом того, что $E_n(f_0)_p=\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ находим

$$\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(v)\rho_k(f_0)\right)\right\|_p}{\omega^*(h)}=$$

$$\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h\left(f_0-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(v)S_k(f_0)\right)\right\|_p}{\omega^*(h)}\geq$$

$$K_1\frac{E_n(f_0)_p}{\omega^*(h)}\geq K_1\inf_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Как и в теореме 3.2.4 показывается, что $f_0\in H_{\omega,p}$. Теорема 3.4.3 доказана.

3. Теорема 3.4.4. *Пусть величины* $\omega(\cdot)$, $\omega^*(\cdot)$ *удовлетворяют условиям теоремы 2.2.7 и* $\alpha=(\alpha_n(v))$, $k\in\mathbb{N}_0$, *– последовательность неотрицательных функций, удовлетворяющих условиям (4.27). Тогда существует функция* $f_0\in H_{\omega,p,2}$ *такая, что*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(v)\rho_k(f_0)\right\|_{\omega^*,p,2}\geq K\inf_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Доказательство этой теоремы опирается на использование теоремы Н для случая $m=2$, $p\geq1$, а также на оценку (3.6).

§3.5. Средние Фейера в модифицированном L_p-гёльдеровом пространстве

1. Целью настоящего параграфа является установление аналогов результатов §2.2.6 для случая модифицированных обобщенных L_p-гёльдеровых пространств, где $p\geq1$, т.е. для пространств

$$H_{\omega^*,p,2}:=\left\{f\in L_p:|f|_{\omega^*,p,2}<\infty\right\},$$

где

$$|f|_{\omega^*,p,2}:=\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p}{\omega^*(h)},$$

$\omega^*(\cdot)$ – положительная и неубывающая на $(0,+\infty)$ функция.

Аналогом теоремы 2.6.1 является следующее утверждение.

Теорема 3.5.1. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 2$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\omega,p,2} \subset H_{\omega^*,p,2}$, $p \ge 1$, *справедливо неравенство*

$$\left\|\sigma_n(f)-f\right\|_{\omega^*,p,2} \le \left\|f\right\|_{\omega,p,2}\left(2^{2^{\frac{\beta}{\eta}-1}}+2\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\right)\times$$

$$\times\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (5.1)$$

Аналоги теорем 2.6.2 и 2.6.3 выглядят следующим образом.

Теорема 3.5.2. ([57, c. 225]) *Для любой функции* $f \in L_p$, $p \ge 1$, *имеет место неравенство*

$$\left\|\sigma_n(f)-f\right\|_p \le$$

$$\frac{1}{2}\left\{\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)_p+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)_p\right\}. \qquad (5.2)$$

Теорема 3.5.3. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 2$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\omega,p,2} \subset H_{\omega^*,p,2}$ *имеет место оценка*

$$\left|\sigma_n(f)-f\right|_{\omega^*,p,2} \le 2\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\left|f\right|_{\omega,p,2}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (5.3)$$

2. Доказательство теоремы 3.5.1. В силу оценки (5.2) с учётом того, что $\omega_2(f;t)_p \le 4\|f\|_p$, $p \ge 1$, для любой функции $f \in H_{\omega,p,2} \subset H_{\omega^*,p,2}$ будем иметь

$$\|\sigma_n(f)-f\|_p \le \frac{1}{2}\left\{\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)_p\right)^{\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)_p\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\right\} \le$$

$$\frac{1}{2}\left\{4^{\frac{\beta}{\eta}}\|f\|_p^{\frac{\beta}{\eta}}|f|_{\omega,p,2}^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}4^{\frac{\beta}{\eta}}\|f\|_p^{\frac{\beta}{\eta}}|f|_{\omega,p,2}^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\} \le$$

$$\frac{4^{\frac{\beta}{\eta}}}{2}\|f\|_{\omega,p,2}\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \quad (5.4)$$

Согласно оценкам (5.3), (5.4) находим, что

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{\omega^*,p,2} \le \left(\frac{4^{\frac{\beta}{\eta}}}{2}\|f\|_{\omega,p,2}+2\|f\|_{\omega,p,2}\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\right)\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}=$$

$$\|f\|_{\omega,p,2}\left(2^{2\frac{\beta}{\eta}-1}+2\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\right)\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}.$$

Теорема 3.5.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.5.2. В силу обобщенного неравенства Минковского (2.12) будем иметь

$$\|\sigma_n(f)-f\|_p\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\|\dot{\Delta}_t^2 f\|_p F_n(t)\,dt+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\|\dot{\Delta}_t^2 f\|_p F_n(t)\,dt=:I_1^{(p)}+I_2^{(p)},\tag{5.5}$$

где

$$F_n(t)=\frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

$\dot{\Delta}_t f$ – вторая симметричная разность. В силу возрастания величины $\omega_2(f;\cdot)_p$ находим, что

$$I_1^{(p)}\le\frac{1}{2}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right)_p,\ \ p\ge 1.\tag{5.6}$$

Рассуждая как и при доказательстве оценки (2.6.7), будем иметь

$$I_2^{(p)}\le\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\|\dot{\Delta}_t^2 f\|_p\frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}}=$$

$$\frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{\pi}{k+2}}^{\frac{\pi}{k+1}}\left\|\dot{\Delta}_t^2 f\right\|_p\frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}}\le$$

$$\frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)_p\int\limits_{\frac{\pi}{k+2}}^{\frac{\pi}{k+1}}\frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}}\le$$

$$\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)_p,\quad p\ge 1. \tag{5.7}$$

На основании неравенств (5.6) и (5.7) из (5.5) приходим к (5.1) и доказательству теоремы 3.5.2.

Наконец перейдем к **доказательству теоремы 3.5.3.**

Оценим полунорму

$$\left|\sigma_n(f)-f\right|_{\omega^*,p,2}:=\sup_{h>0}\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2\left(\sigma_n(f)-f\right)\right\|_p}{\omega^*(h)}, \tag{5.8}$$

где $f\in H_{\omega,p,2}\subset H_{\omega^*,p,2}$.

Согласно свойствам интегрального модуля гладкости $\omega_2(f;\cdot)_p$

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p\le 4\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p,$$

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p\le 4\omega_2(f;t)_p,$$

а также неравенства

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p\le\left|f\right|_{\omega,p,2}\omega(h),$$

на основании оценки (5.2) получаем

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\left(\sigma_n(f)-f\right)\right\|_p\le$$

$$\frac{1}{2}\left\{\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{n+1}\right)_p+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{k+1}\right)_p\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{n+1}\right)_p\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{n+1}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{k+1}\right)_p\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{k+1}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}\le$$

$$\frac{1}{2}\left(4\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{4^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{\pi}{n+1}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\right.$$

$$\left.\frac{4^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega_2\left(f;\frac{\pi}{k+1}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}\le$$

$$2\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left|f\right|_{\omega,p,2}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}. \qquad (5.9)$$

Вследствие оценки (5.9) из (5.8) получаем требуемую оценку (5.3). Теорема 3.5.3 доказана.

В заключении этой главы отметим, что некоторые вопросы теории приближения 2π -периодических функций в пространствах L_p, с учётом особенности L_p -метрики при $1<p<\infty$, изложены в монографии М.Ф. Тимана [57].

ГЛАВА 4
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ОБОБЩЁННЫХ ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ МОДИФИКАЦИЯХ

В данной главе изучаются аппроксимационные свойства некоторых сингулярных интегральных операторов, в том числе операторов типа Фейера, в обобщённых гёльдеровых и L_p-гёльдеровых пространствах и их модификациях. Рассматриваются вопросы одновременной аппроксимации функций, заданных на всей действительной оси в указанных пространствах.

§4.1. Аппроксимация функций операторами типа Фейера в обобщенном гёльдеровом пространстве

1. Пусть $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $C(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных и ограниченных на всей действительной оси функций $f = f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} := \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|.$$

Обозначим через $H_{\omega^*}(\mathbb{R})$ множество всех функций $f \in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \Delta^{\omega^*} f(x,y) < \infty,$$

где

$$\Delta^{\omega^*} f(x,y) := \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega^*(|x-y|)}, \quad \Delta^0 f(x,y) := 0$$

и $\omega^*(t)$ – некоторая неубывающая и положительная при $t>0$ функция. Как и в §1.1.4 можно показать, что $H_{\omega^*}(\mathbb{R})$ является B-пространством относительно обобщённой гёльдеровой нормы

$$\|f\|_{\omega^*(\mathbb{R})} := \|f\|_{C(\mathbb{R})} + \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \Delta^{\omega^*} f(x,y). \qquad (1.1)$$

Пусть $H_{\omega}(\mathbb{R})$ – множество функций $f \in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \Delta^{\omega} f(x,y) = \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)} < \infty$$

лежащее в пространстве $H_{\omega^*}(\mathbb{R})$, $H_{\omega}(\mathbb{R}) \subset H_{\omega^*}(\mathbb{R})$, где $\omega(t)$ – некоторая неубывающая и положительная при $t>0$ функция. Как уже упоминалась ранее, последнее включение выполняется, если существуют постоянные $c>0$ и $0\le\gamma\le1$ такие, что

$$\omega_1^{\gamma}(t) \le c\omega_2(t).$$

В частности, полагая $\omega^*(t)=t^{\beta}$, $\omega(t)=t^{\alpha}$, $0\le\beta<\alpha\le1$, в качестве $H_{\omega^*}(\mathbb{R})$ получаем пространство

$$H_{\beta}(\mathbb{R}) := \Big\{ f\in C(\mathbb{R}) : |f(x)-f(y)| \le L|x-y|^{\beta}$$

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ \ L=L(f) \Big\}$$

с гёльдеровой нормой

$$\|f\|_{\beta(\mathbb{R})} := \|f\|_{C(\mathbb{R})} + \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\beta}}, \qquad (1.2)$$

а в качестве множества $H_{\omega}(\mathbb{R})$ получаем

$$H_\alpha(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C(\mathbb{R}) : |f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\alpha$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ L = L(f) \Big\},$$

при этом $H_\alpha(\mathbb{R}) \subset H_\beta(\mathbb{R})$.

Введём в рассмотрение семейство интегральных операторов

$$F_\lambda(f) = F_\lambda(f;x) := \lambda \int_{\mathbb{R}} f(u) K(\lambda(x-u))\,du, \quad \lambda > 0, \qquad (1.3)$$

с ядром $K(x)$ типа Фейера ([3])

a) $K(-x) = K(x)$,

b) $\int_{\mathbb{R}} K(x)\,dx = 1$,

c) $\sup\limits_{-1 \le x \le 1} |K(x)| < \infty$,

d) $\sup\limits_{-\infty < x < \infty} x^2 |K(x)| < \infty$.

При этих условиях интеграл (1.3) представляет линейный оператор, действующий из $C(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R})$.

В настоящем параграфе устанавливаются оценки приближения функций $f \in H_\omega(\mathbb{R})$ операторами типа Фейера (1.3) в обобщенном гёльдеровом пространстве H_{ω^*} с нормой, определяемой равенством (1.1).

Основной результат данного параграфа содержится в следующем утверждении (см. [26:2, 4,]).

Теорема 4.1.1. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_\omega(\mathbb{R})$ *и для любого* $\lambda > 1$ *имеет место соотношение*

$$\|f - F_\lambda(f)\|_{\omega^*(\mathbb{R})} =$$

$$O(1)\sup_{-\infty<x,y<\infty}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_1^{\lambda}\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right\}, \qquad (1.4)$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по параметру* λ *и зависящая, вообще говоря, от* $f\in H_{\omega}(\mathbb{R})$, β, η.

Полагая в условиях теоремы 4.1.1 $\omega(t)=t^{\alpha}$, $\omega^*(t)=t^{\beta}$, $0\le\beta<\alpha\le1$, $\eta=\alpha$, в силу (1.2) и (1.4) получаем следующее утверждение.

Следствие 4.1.1. *Пусть* $0\le\beta<\alpha\le1$. *Тогда для любой функции* $f\in H_{\alpha}(\mathbb{R})$ *справедливы соотношения*

$$\left\|f-F_{\lambda}(f)\right\|_{\beta(\mathbb{R})}=\begin{cases}O(1)\lambda^{\beta-\alpha}, & \alpha-\beta<1,\\ O(1)\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}, & \alpha-\beta=1,\ \lambda>1.\end{cases}$$

Предположим теперь, что ядро типа Фейера $K(x)$ удовлетворяет условию ограниченности вариации на всей оси. Тогда, как хорошо известно ([3]), если рассматривать 2π-периодические непрерывные функции $f\in C(\mathbb{R})$ с рядом Фурье

$$S[f]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx},$$

семейство операторов типа Фейера (1.3)преобразуется в следующую последовательность линейных средних ряда Фурье функции f:

$$F_n(f)=F_n(f;x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)c_k(f)e^{ikx},\ \ n\in\mathbb{N}, \qquad (1.5)$$

где значение $\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ совпадают при $t=\frac{k}{n}$ со значениями функции $\varphi(t)$, которая является преобразованием Фурье ядра $K(x)$.

Стало быть, сопоставляя сказанное с теоремой 4.1.1, получаем такое утверждение.

Теорема 4.1.2. *Пусть* $0 \le \beta < \alpha \le 1$ *и* $\varphi(\cdot)$ *– преобразование Фурье ядра типа Фейера* $K(\cdot)$ *ограниченной вариации на всей оси. Тогда для любой* 2π *-периодической функции* $f \in H_{\omega}(\mathbb{R}) \subset H_{\omega^*}(\mathbb{R})$

$$\left\| f - F_n(f) \right\|_{\omega^*(\mathbb{R})} =$$

$$O(1) \sup_{-\infty < x, y < \infty} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} \right\},$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n *и зависящая, вообще говоря, от* $f \in H_{\omega}(\mathbb{R})$, β, η.

2. Доказательство теоремы 4.1.1. Положим

$$\delta_{\lambda}(x) = \delta_{\lambda}(f;x) := F_{\lambda}(f;x) - f(x),$$

$$\delta_{\lambda}(x,y) = \delta_{\lambda}(f;x,y) := \delta_{\lambda}(x) - \delta_{\lambda}(y),$$

$$\varphi_x(t) := f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

С учётом свойств а) и в) ядра $K(x)$ можем записать представления

$$\delta_{\lambda}(x) = \lambda \int_0^{\infty} \varphi_x(t) K(\lambda t) dt,$$

$$\delta_{\lambda}(x,y) = \lambda \int_0^{\infty} \left[\varphi_x(t) - \varphi_y(t) \right] K(\lambda t) dt =$$

$$\lambda\left(\int_0^{\frac{1}{\lambda}}+\int_1^{\infty}\right)\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]K(\lambda t)\,dt+$$

$$\lambda\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1}\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]K(\lambda t)\,dt=J_\lambda^{(1)}(x,y)+J_\lambda^{(2)}(x,y). \quad (1.6)$$

Обозначим

$$i_\lambda(x,y)=\lambda\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]K(\lambda t)\,dt,$$

$$j_\lambda(x,y)=\lambda\int_1^{\infty}\left[\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right]K(\lambda t)\,dt.$$

Таким образом,

$$J_\lambda^{(1)}(x,y)=i_\lambda(x,y)+j_\lambda(x,y). \quad (1.7)$$

Из определения множества $H_\omega(\mathbb{R})$ вытекает, что

$$\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|\le 4L\omega(|x-y|),$$

$$\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|\le 4\omega(f;t)\le 4L\omega(t),\ \ L=L(f). \quad (1.8)$$

Тогда на основании свойства c) ядра $K(x)$ и неравенств (1.8), получаем

$$\left|i_\lambda(x,y)\right|=\lambda\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{\frac{\beta}{\eta}}\left|K(\lambda t)\right|dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\lambda\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(\omega(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left|K(\lambda t)\right|dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \qquad (1.9)$$

Вследствие свойства d) ядра, принимая во внимание ограниченность $f(\cdot)$ и (1.8), находим

$$\left|j_\lambda(x,y)\right|\le\lambda\int_1^\infty\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{1-\frac{\beta}{\eta}}\cdot\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{\frac{\beta}{\eta}}\left|K(\lambda t)\right|dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\lambda\int_1^\infty\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{1-\frac{\beta}{\eta}}\frac{dt}{(t\lambda)^2}=$$

$$O(1)\frac{1}{\lambda^{1-\frac{\beta}{\eta}}\cdot\lambda^{\frac{\beta}{\eta}}}\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}=$$

$$O(1)\left(\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}=$$

$$O(1)\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}. \qquad (1.10)$$

Сопоставляя соотношения (1.7), (1.9) и (1.10), получаем

$$\left|J_\lambda^{(1)}(x,y)\right|=O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}, \qquad (1.11)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по λ.

Далее, вследствие свойства d) ядра $K(x)$ согласно (1.8) имеем

$$\left|J_{\lambda}^{(2)}(x,y)\right| = O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \lambda\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{\left(\omega(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{(t\lambda)^2}dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \frac{1}{\lambda}\int_{1}^{\lambda}\left(\omega\left(f;\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} du =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \frac{1}{\lambda}\int_{1}^{\lambda}\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} du. \qquad (1.12)$$

Вследствие соотношений (1.6), (1.11) и (1.12) имеем

$$\left|\delta_{\lambda}(x,y)\right| = O(1)\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \frac{1}{\lambda}\int_{1}^{\lambda}\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} du\right\}.$$

Отсюда

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left|\delta_{\lambda}(x,y)\right|}{\omega^{*}\left(|x-y|\right)} = O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^{*}\left(|x-y|\right)} \times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \frac{1}{\lambda}\int_{1}^{\lambda}\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} du\right\} =$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^{*}\left(|x-y|\right)} \left\{\frac{1}{\lambda}\int_{1}^{\lambda}\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} du\right\}, \qquad (1.13)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по λ и зависящая, вообще говоря, от $f \in H_{\omega}(\mathbb{R})$, β, η.

Легко видеть, что

$$\left\|\delta_\lambda(x)\right\|_{C(\mathbb{R})}=O(1)\frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda \omega\left(\frac{1}{u}\right)du. \tag{1.14}$$

Вследствие (1.13) и (1.14) окончательно получаем

$$\left\|\delta_\lambda(x)\right\|_{\omega^*(\mathbb{R})}=\left\|\delta_\lambda(x)\right\|_{C(\mathbb{R})}+\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left|\delta_\lambda(x,y)\right|}{\omega^*(|x-y|)}=$$

$$O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right\},$$

$$0\le\beta<\eta\le1.$$

Теорема 4.1.1 доказана.

§4.2. Модифицированные интегральные операторы в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах

1. В данном параграфе определяются модифицированные интегральные операторы в пространстве $L_p=L_p(\mathbb{R})$, $p\ge1$. Устанавливается скорость сходимости таких операторов в соответствующей метрике. Полученные результаты применяются и к сингулярным операторам.

Пусть $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $1\le p\le\infty$. Обозначим через $L_p^{(m)}=L_p^{(m)}(\mathbb{R})$ множество всех $f\in L_p$ производные которых $f',\ f'',\ \dots,f^{(m)}$ также принадлежат к L_p. Норма в $L_p^{(m)}$ определяется при помощи равенства $\|f\|_{p,m}=\|f\|_p$, $L_p^{(0)}:=L_p$.

Определение 4.2.1. ([38]) *Пусть* $f \in L_p^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $p \geq 1$. *Определим свойство модифицированных интегральных операторов при помощи формулы*

$$F_{\lambda,m}(f;x) := \lambda \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j K(\lambda(t-x))dt, \qquad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}$ *и* $\lambda > 0$.

В частности, $F_{\lambda,0}(f;\cdot) = F_{\lambda}(f;\cdot)$ для $f \in L_p$.

Очевидно, что равенство (2.1)может быть переписано в следующем виде:

$$F_{\lambda,m}(f;x) := \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{j!} \lambda \int_{\mathbb{R}} f^{(j)}(t+x) t^j K(\lambda t) dt$$

для каждого $f \in L_p^{(m)}$, $x \in \mathbb{R}$ и $\lambda > 0$.

Если выполняется условие $K(-x) = K(x)$ и для каждого $j = 0,1,2,..,m$

$$\int_0^{\infty} u^j |K(u)| du < \infty,$$

тогда для фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\lambda > 0$ интеграл (2.1) является линейным оператором действующим $L_p^{(m)}$ в L_p (см. замечание 2).

Пусть теперь $\omega(f;\cdot)$ модуль непрерывности в L_p, т.е.

$$\omega(f;t)_p := \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h f(\cdot)\|_p, \quad t \geq 0,$$

где $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$.

Как и прежде $H_{\omega^*,p} := H_{\omega^*,p,1}(\mathbb{R})$ множество всех функций $f \in L_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{h\neq 0}\frac{\left\|\Delta_h(f)\right\|_p}{\omega^*(|h|)}<\infty,$$

где $\omega^*(t)$ – неубывающая и положительная при $t>0$ функция, с нормой

$$\|f\|_{\omega^*,p}:=\|f\|_p+\sup_{h\neq 0}\frac{\left\|\Delta_h f\right\|_p}{\omega^*(|h|)}. \tag{2.2}$$

Пусть $m\in\mathbb{N}_0$ и $1\leq p\leq\infty$. Обозначим через $H^{(m)}_{\omega^*,p}$ множество всех $f\in H_{\omega^*,p}$ производные которых f', f'', ..., $f^{(m)}$ принадлежат $H_{\omega^*,p}$. Норма в $H^{(m)}_{\omega^*,p}$ определяется при помощи равенства (2.2), т.е. для $f\in H^{(m)}_{\omega^*,p}$, мы имеем $\|f\|_{\omega^*,p,m}:=\|f\|_{\omega^*,p}$. В частности $H^{(0)}_{\omega^*,p}=H_{\omega^*,p}$.

Пусть, как и прежде,

$$\delta_\lambda(x)=\delta_\lambda(f;x):=F_\lambda(f;x)-f(x),$$

$$\delta_\lambda(x+h,x)=\delta_\lambda(f;x+h,x):=\delta_\lambda(x+h)-\delta_\lambda(x),$$

$$\varphi_x(t):=f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

Теперь сформулируем основные результаты данного параграфа, установленные в работе Р.Н. Мохапатра и Б. Золя [38], являющиеся L_p-аналогами результатов §4.1.

Теорема 4.2.1. *Пусть ядро* $K(\cdot)$ *оператора* $F_\lambda(f;\cdot)$ *удовлетворяет условиям*

e) $K(-x)=K(x)$,

f) $\int\limits_{\mathbb{R}}K(x)dx=1$, *g)* $\sup\limits_{-1\le x\le 1}|K(x)|<\infty$,

h) $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} x^2|K(x)|<\infty$.

Если $0\le\beta<\eta\le 1$, *то для любой функции* $f\in H_{\omega,p}\subset H_{\omega^*,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *и для любого* $\lambda>1$ *имеет место следующее соотношение*

$$\|f-F_\lambda(f)\|_{\omega^*,p}=$$

$$O(1)\sup_{h\ne 0}\frac{(\omega(|h|))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right\}, \tag{2.3}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* λ *и зависящая, вообще говоря, от* $f\in H_{\omega,p}$, β, η.

Замечание 1. Случай $p=\infty$ содержится в §4.1.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $0\le\beta<\eta\le 1$, $\lambda\ge\lambda_0>0$ *и справедливы условия a)–c) для ядра* $K(\cdot)$. *Если*

$$\int_0^\infty u|K(u)|du<\infty, \tag{2.4}$$

то для любой функции $f\in H_{\omega,p}\subset H_{\omega^*,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *имеет место соотношение*

$$\|f-F_\lambda(f)\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{h\ne 0}\frac{(\omega(|h|))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Замечание 2. Пусть $m\in\mathbb{N}_0$, $1\le p\le\infty$ и выполняется условие a). Если для любого $j=0,1,2,..,m$

$$\int_0^{\infty} u^j \left|K(u)\right| du < \infty, \qquad (2.5)$$

то для каждой функции $f \in L_p^{(m)}$ и $\lambda > 0$

$$\left\|F_{\lambda,m}(f)\right\|_p = O(1)\sum_{j=0}^{m} \frac{\left\|f^{(j)}\right\|_p}{j!\lambda^j}.$$

Более того, если $f \in H_{\omega^*,p}^{(m)}$ $\lambda > 0$, то

$$\left\|F_{\lambda,m}(f)\right\|_{\omega^*,p} = O(1)\sum_{j=0}^{m} \frac{\left\|f^{(j)}\right\|_{\omega^*,p}}{j!\lambda^j}.$$

Теорема 4.2.3. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \ge \lambda_0 > 0$ *и ядро* $K(\cdot)$ *удовлетворяет условиям a), b). Если для каждого* $j = 1, 2, .., m+1$

$$\int_0^{\infty} u^j \left|K(u)\right| du < \infty, \qquad (2.6)$$

то для любой функции $f \in H_{\omega,p}^{(m)} \subset H_{\omega^*,p}^{(m)}$ $(1 \le p \le \infty)$ *справедливо соотношение*

$$\left\|f - F_{\lambda,m}(f)\right\|_{\omega^*,p} = O(1)\sup_{h\ne 0} \frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)} \frac{1}{\lambda^m}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Полагая $\omega(t) = t^{\alpha}$, $\omega^*(t) = t^{\beta}$, $0 \le \beta < \eta \le 1$, $\eta = \alpha$ из предыдущих теорем получаем следующее утверждение.

Следствие 4.2.1. *Пусть* $0 \le \beta < \alpha \le 1$ *и ядро* $K(\cdot)$ *удовлетворяет условиям a)–d). Тогда для любой функции* $f \in H_{\alpha,p}$ $(p \ge 1)$ *и для любого* $\lambda > 1$ *справедливы соотношения*

$$\left\|f-F_{\lambda}(f)\right\|_{\beta,p}=\begin{cases}O(1)\lambda^{\beta-\alpha}, & \alpha-\beta<1,\\ O(1)\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}, & \alpha-\beta=1.\end{cases}$$

Следствие 4.2.2. *Пусть* $0\le\beta<\alpha\le 1$, $\lambda\ge\lambda_0>0$ *и ядро* $K(\cdot)$ *Удовлетворяет условиям a)–c). Если*

$$\int_0^{\infty}u\left|K(u)\right|du<\infty,$$

то для любой функции $f\in H_{\alpha,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *имеет место соотношение*

$$\left\|f-F_{\lambda}\right\|_{\beta,p}=O(1)\lambda^{\beta-\alpha}.$$

Следствие 4.2.3. *Пусть* $0\le\beta<\alpha\le 1$, $m\in\mathbb{N}$, $\lambda\ge\lambda_0>0$ *и ядро* $K(\cdot)$ *удовлетворяет условиям a), b). Если для каждого* $j=1,2,..,m+1$

$$\int_0^{\infty}u^j\left|K(u)\right|du<\infty,$$

то для любой функции $f\in H_{\alpha,p}^{(m)}$ $(1\le p\le\infty)$

$$\left\|f-F_{\lambda,m}(f)\right\|_{\beta,p}=O(1)\lambda^{\beta-\alpha-m}.$$

2. Перейдем к конкретным реализациям приведенных выше теорем. Пусть ядро $K(\cdot)$, помимо условий a)–d), ещё удовлетворяет условию ограниченности вариации на всей оси. Тогда, если $f(\cdot)$ является 2π - периодической функцией из L_p с рядом Фурье

$$S[f]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx},$$

семейство операторов типа Фейера $F_\lambda(f)$ преобразуется в линейные средние ряда Фурье функции f

$$F_n(f;x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)c_k(f)e^{ikx},\quad n\in\mathbb{N},$$

где значение $\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ совпадают при $t=\frac{k}{n}$ со значениями функции $\varphi(t)$, которая является преобразованием Фурье ядра $K(\cdot)$.

Рассмотрим средние Рисса ряда Фурье $S[f]$:

$$R_n(\gamma,f;x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)^{\gamma}c_k(f)e^{ikx},\quad \gamma>0.$$

Для таких средних

$$\varphi^{(\gamma)}(t)=\begin{cases}(1-|t|)^{\gamma},|t|\le 1\\ 0,|t|\ge 1\end{cases}$$

и, соответственно,

$$K_{R(\gamma)}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(\gamma)}(x)e^{itx}dx=$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\cos t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!(2k+1+\gamma)}+\right.$$

$$\left.\sin t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+2+\gamma)}\right\}. \tag{2.7}$$

Ясно, что ядро $K_{R(\gamma)}$ удовлетворяет условиям a), c) и d). Более того, функция $\varphi^{(\gamma)}$ является преобразованием Фурье ядра $K_{R(\gamma)}$, т.е.

$$\varphi^{(\gamma)}(t)=\int_{\mathbb{R}} K_{R(\gamma)}(x)e^{-itx}dt$$

для всех $x\in\mathbb{R}$. Отсюда

$$1=\varphi^{(\gamma)}(0)=\int_{\mathbb{R}} K_{R(\gamma)}(x)dx$$

и условие b) также выполнено.

Следовательно, при помощи теоремы 4.2.1 получаем следующий результат

Следствие 4.2.4. *Пусть* $0\le\beta<\eta\le1$ *и* $\gamma>0$. *Тогда для любой* 2π *-периодической функции* $f\in H_{\omega,p}\subset H_{\omega^*,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *справедливо соотношение*

$$\left\|f-R_n(\gamma,f)\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{h\neq0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\right\}.$$

Следствие 4.2.5. *Пусть* $0\le\beta<\alpha\le1$ *и* $\gamma>0$. *Тогда для любой* 2π *-периодической функции* $f\in H_{\alpha,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *имеет место соотношение*

$$\left\|f-R_n(\gamma,f)\right\|_{\beta,p}=\begin{cases}O\left(n^{\beta-\alpha}\right),\alpha-\beta<1,\\ O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right),\alpha-\beta=1,\quad n>1.\end{cases}$$

В частности, полагая $\gamma=1$, мы получим ядро Фейера (см. (2.7))

$$K_{R(1)}(t)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(t/2)}{t}\right)^2$$

и соответственно средние Фейера $\sigma_n(f)$ ряда Фурье $S[f]$.

Пусть, далее,

$$K_{\overline{p}}(t) := \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2},\ \lambda = \frac{1}{\varepsilon},\ \varepsilon > 0.$$

Тогда в качестве оператора (1.3) получим сингулярный интеграл функции $f \in L_p$, т.е.

$$\overline{P}_\varepsilon(f) = \overline{P}_\varepsilon(f;x) := \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\frac{1}{\varepsilon^2+t^2}dt.$$

Аппроксимационные свойства таких операторов исследовались, например, в работе [62]. Ясно, что ядро $K_{\overline{p}}(\cdot)$ удовлетворяет условиям a)–d). Следовательно, из теоремы 4.2.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.2.6. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\alpha,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *имеет место соотношение*

$$\left\|f - \overline{P}_\varepsilon(f)\right\|_{\omega^*,p} = O(1)\sup_{h\neq 0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}\left\{\varepsilon\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right\},$$

где $0 < \varepsilon < 1$.

Следствие 4.2.7. *Пусть* $0 \le \beta < \alpha \le 1$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\alpha,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *справедливы соотношения*

$$\left\|f - \overline{P}_\varepsilon(f)\right\|_{\beta,p} = \begin{cases} O(1)\varepsilon^{\beta-\alpha}, \alpha-\beta<1, \\ O(1)\left(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\right), \alpha-\beta=1, \end{cases} \varepsilon \to 0+$$

Положим

$$K_P(t) := \frac{1}{2}\exp(-|t|),\quad \lambda = \frac{1}{r},\quad r > 0$$

и

$$K_W(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-t^2),\quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2r}},\quad r > 0,$$

Тогда в качестве операторов (1.3) будем иметь, соответственно, сингулярный интеграл Пикара и сингулярный интеграл Гаусса-Вейерштрасса для функции $f \in L_p$, т.е.

$$P_r(f) = P_r(f;x) := \frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\exp\left(\frac{-|t|}{r}\right)dt,$$

$$W_r(f) = W_r(f;x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi r}}\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\exp\left(-\frac{t^2}{4r}\right)dt$$

Предельные свойства этих интегралов можно найти в работах [7], [35:2].

В силу известных равенств

$$\int_0^\infty u^m \left|K_p(u)\right| du = \frac{m!}{2}$$

и

$$\int_0^\infty u^m \left|K_W(u)\right| du = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & m = 0, \\ \dfrac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}, & m = 2k \geq 2, \\ \dfrac{k!}{2\sqrt{\pi}}, & m = 2k+1 \geq 1 \end{cases}$$

$m \in \mathbb{N}_0$, из теорем 4.2.2 и 4.2.3 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.2.8. *Пусть* $0 \leq \beta < \eta \leq 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и* $f \in H_{\omega,p}^{(m)} \subset H_{\omega^*,p}^{(m)}$ $(1 \leq p \leq \infty)$. *Тогда*

$$\left\|f - P_r(f)\right\|_{\omega^*,p} = O(1)\sup_{h\neq 0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)} r^m \left(\omega(r)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}$$

и

$$\left\|f-W_r(f)\right\|_{\omega^*,p}=O(1)\sup_{h\neq 0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}r^{\frac{m}{2}}\left(\omega\left(\sqrt{r}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}$$

при $r\to 0+$.

Следствие 4.2.9. *Пусть* $0\le\beta<\alpha\le 1$, $m\in\mathbb{N}_0$ *и* $f\in H_{\alpha,p}^{(m)}$ $(1\le p\le\infty)$. *Тогда*

$$\left\|f-P_r(f)\right\|_{\beta,p}=O\left(r^{m+\alpha-\beta}\right)$$

и

$$\left\|f-W_r(f)\right\|_{\beta,p}=O\left(r^{\frac{m+\alpha-\beta}{2}}\right),$$

при $r\to 0+$.

Перейдем к доказательствам теорем.

3. Доказательство теоремы 4.2.1. Для $p=\infty$ утверждение теоремы 4.2.1 совпадает с теоремой 4.1.1. Пусть $1\le p<\infty$. Тогда используя условие a), b) ядра $K(\cdot)$ получаем

$$\delta_\lambda(x)=\lambda\int_0^\infty\varphi_x(t)K(\lambda t)\,dt$$

и

$$\delta_\lambda(x+h,x)=\lambda\int_0^\infty\left(\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right)K(\lambda t)\,dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского будем иметь

$$\left\|\delta_\lambda(\cdot+h,\cdot)\right\|_p=\lambda\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\int_0^\infty\left(\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right)K(\lambda t)\,dt\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\lambda\int_0^\infty\left|K(\lambda t)\right|\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\left(\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}dt=$$

$$\lambda\left(\int_0^{\frac{1}{\lambda}}+\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1}+\int_1^{\infty}\right)\left|K(\lambda t)\right|\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} dt =:$$

$$J_\lambda^{(1)}(h)+J_\lambda^{(2)}(h)+J_\lambda^{(3)}(h). \tag{2.8}$$

Ясно, что для $p \geq 1$

$$\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq 4\omega\left(f;|h|\right)_p, \tag{2.9}$$

$$\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq 4\omega\left(f;t\right)_p. \tag{2.10}$$

Тогда в виду свойства c) ядра $K(\cdot)$ и неравенств (2.9) и (2.10) получаем, что для $f \in H_{\omega,p}$

$$J_\lambda^{(1)}(h)=\lambda\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left|K(\lambda t)\right|\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}\cdot\frac{\beta}{\eta}} \times$$

$$\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)} dt =$$

$$O(1)\,\lambda\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left|K(\lambda t)\right|\left(\omega\left(f;t\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \tag{2.11}$$

Далее, согласно свойству d) ядра $K(\cdot)$, при помощи оценок (2.9) и (2.10) находим

$$J_\lambda^{(2)}(h)=O(1)\lambda\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int\limits_{\frac{1}{\lambda}}^{1}\left|K(\lambda t)\right|\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt=$$

$$O(1)\lambda\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int\limits_{\frac{1}{\lambda}}^{1}\left(\omega(f;t)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{(\lambda t)^2}dt=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{1}^{\lambda}\left(\omega\left(f;\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du=$$

$$O(1)\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{1}^{\lambda}\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du. \qquad (2.12)$$

Используя свойство d) ядра $K(\cdot)$, (2.9) для $f\in H_{\omega,p}$ находим, что

$$J_\lambda^{(3)}(h)=\lambda\int\limits_{1}^{\infty}\left|K(\lambda t)\right|\left\{\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\left(\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}\cdot\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)}dt=$$

$$O(1)\lambda\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int\limits_{1}^{\infty}\left|K(\lambda t)\right|\left(8\|f\|_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt=$$

$$O(1)\lambda\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda t)^2}dt=O(1)\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{\lambda}=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{\lambda^{\frac{\beta}{\eta}}}\frac{1}{\lambda^{1-\frac{\beta}{\eta}}}.$$

Заметим, что если $\lambda > 1$, то

$$\omega(f;1)_p \le (\lambda+1)\,\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_p \le 2\lambda\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_p.$$

В результате полученного неравенства заключаем, что

$$J_\lambda^{(3)}(h) = O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{\lambda^{\frac{\beta}{\eta}}} =$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \qquad (2.13)$$

Из соотношений (2.8), (2.11), (2.12) и (2.13) получаем

$$\left\|\delta_\lambda(\cdot+h,\cdot)\right\|_p = O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right\}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du \ge \frac{1}{\lambda}\int_{\frac{\lambda-1}{2}}^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du \ge$$

$$\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\frac{\lambda+1}{2\lambda} \ge \frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}},$$

находим, что

$$\left\|\delta_\lambda(\cdot+h,\cdot)\right\|_p = O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right\}.$$

Следовательно,

$$\sup_{h\neq 0}\frac{\left\|\delta_\lambda(\cdot+h,\cdot)\right\|_p}{\omega^*(|h|)} = O(1)\sup_{h\neq 0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}\times$$

$$\left\{\frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right\}. \tag{2.14}$$

Легко заметить, что

$$\left\|\delta_\lambda(\cdot)\right\|_p = O(1)\frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda\omega\left(\frac{1}{u}\right)du =$$

$$O(1)\frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du. \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) окончательно получаем

$$\left\|\delta_\lambda(\cdot)\right\|_{\omega^*,p} = \left\|\delta_\lambda(\cdot)\right\|_p + \sup_{h\neq 0}\frac{\left\|\delta_\lambda(\cdot+h,\cdot)\right\|_p}{\omega^*(h)} =$$

$$O(1)\sup_{h\neq 0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right\}.$$

Соотношения (2.3) установлено и теорема 4.2.1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 4.2.2. Пусть $p=\infty$. Тогда благодаря свойствам a), b) ядра $K(\cdot)$ получим

$$\left|\delta_\lambda(x+h,x)\right| \le \lambda\int_0^\infty \left|K(\lambda t)\right|\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|dt =$$

$$\lambda\left(\int_0^{\frac{1}{\lambda}}+\int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty\right)\left|K(\lambda t)\right|\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|dt =:$$

$$J_\lambda^{(1)}(h)+J_\lambda^{(2)}(h). \tag{2.16}$$

Заметим, что

$$\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right| \le 4\omega\left(f;|h|\right)_\infty,$$

$$\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right| \le 4\omega\left(f;t\right)_\infty. \tag{2.17}$$

В силу свойства c) ядра $K(\cdot)$ для $f\in H_{\omega,p}$ будем иметь

$$J_\lambda^{(1)}(h)=\lambda\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left|K(\lambda t)\right|\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt =$$

$$O(1)\lambda\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(\omega\left(f;t\right)_\infty\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt =$$

$$O(1)\left(\omega\left(|h|\right)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \tag{2.18}$$

Далее, благодаря (2.17) и (2.4) находим, что

$$J_\lambda^{(2)}(h)=\lambda\int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty\left|K(\lambda t)\right|\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\lambda\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}\left(\omega(f;t)_\infty\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left|K(\lambda t)\right|dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\lambda\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}\left(\frac{\omega(f;t)_\infty}{t}\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}t^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left|K(\lambda t)\right|dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_\infty\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\lambda^{2-\frac{\beta}{\eta}}\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}t^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left|K(\lambda t)\right|dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\lambda^{2}\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}t\left|K(\lambda t)\right|dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\int_{1}^{\infty}u\left|K(u)\right|du=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \qquad (2.19)$$

Аналогично этому доказывается, что

$$\left\|\delta_\lambda(\cdot)\right\|_\infty=O(1)\,\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_\infty=O(1)\left(\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_\infty\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left(\omega\left(f;\frac{1}{\lambda_0}\right)_\infty\right)^{\frac{\beta}{\eta}}=O(1)\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \qquad (2.20)$$

Следовательно, сопоставляя (2.16), (2.18), (2.19) и (2.20) находим, что

$$\left\|\delta_\lambda(\cdot)\right\|_{\omega^*,p} = \left\|\delta_\lambda(\cdot)\right\|_\infty + \sup_{h\neq 0}\frac{\left\|\delta_\lambda(\cdot+h,\cdot)\right\|_\infty}{\omega^*(h)} =$$

$$O(1)\sup_{h\neq 0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Пусть теперь $1\le p<\infty$. На основании свойств a) и b), а также с учётом обобщённого неравенства Минковского будем иметь

$$\left\|\delta_\lambda(\cdot+h,\cdot)\right\|_p = \lambda\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\int_0^\infty\left(\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right)K(\lambda t)dt\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\lambda\int_0^\infty\left|K(\lambda t)\right|\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} dt =$$

$$\lambda\left(\int_0^{\frac{1}{\lambda}}+\int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty\right)\left|K(\lambda t)\right|\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} dt =:$$

$$L_\lambda^1(h)+L_\lambda^2(h). \tag{2.21}$$

Вследствие свойства c) ядра $K(\cdot)$ и неравенств (2.9) и (2.10) находим, что

$$L_\lambda^{(1)}(h) = \lambda\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left|K(\lambda t)\right|\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}\cdot\frac{\beta}{\eta}} \times$$

$$\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi_{x+h}(t)-\varphi_x(t)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)} dt =$$

$$O(1)\lambda\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int_0^{\frac{1}{\lambda}}|K(\lambda t)|\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \tag{2.22}$$

В силу условия (2.4), а также оценок (2.9) и (2.10) получаем

$$L_\lambda^{(2)}(h)=O(1)\lambda\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}|K(\lambda t)|\left(\omega(f;t)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\lambda\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}\left(\frac{\omega(f;t)_p}{t}\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}t^{1-\frac{\beta}{\eta}}|K(\lambda t)|dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\lambda^{2-\frac{\beta}{\eta}}\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}t^{1-\frac{\beta}{\eta}}|K(\lambda t)|dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\int_1^{\infty}u|K(u)|du=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \tag{2.23}$$

Замечая, что

$$\|\delta_\lambda(\cdot)\|_p=O(1)\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_p=$$

$$O(1)\left(\omega\left(f;\frac{1}{\lambda_0}\right)_p\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}=$$

$$O(1)\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}, \tag{2.24}$$

из (2.21)– (2.24) в результате будем иметь

$$\left\|\delta_\lambda(\cdot)\right\|_{\omega^*,p} = \left\|\delta_\lambda(\cdot)\right\|_p + \sup_{h\neq 0}\frac{\left\|\delta_\lambda(\cdot+h,\cdot)\right\|_p}{\omega^*(h)} =$$

$$O(1)\sup_{h\neq 0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Теорема 4.2.2 доказана.

Обратимся теперь к **доказательству замечания 2.** Пусть $p=\infty$. Тогда при помощи свойства а) ядра $K(\cdot)$ и свойства (2.5) получаем

$$\left\|F_{\lambda,m}(f)\right\|_\infty \le \sum_{j=0}^{m}\frac{\left\|f^{(j)}\right\|_\infty}{j!}\lambda\int_{\mathbb{R}}\left|t^j K(\lambda t)\right|dt =$$

$$2\sum_{j=0}^{m}\frac{\left\|f^{(j)}\right\|_\infty}{j!}\lambda\int_0^\infty t^j\left|K(\lambda t)\right|dt =$$

$$2\sum_{j=0}^{m}\frac{\left\|f^{(j)}\right\|_\infty}{j!\lambda^j}\int_0^\infty u^j\left|K(u)\right|du = O(1)\sum_{j=0}^{m}\frac{\left\|f^{(j)}\right\|_\infty}{j!\lambda^j}. \tag{2.25}$$

Предположим, что $1\le p<\infty$. Применяя обобщенное неравенство Минковского, с учетом свойств а) и (2.5) ядра $K(\cdot)$ будем иметь

$$\left\|F_{\lambda,m}(f)\right\|_p = \left\|\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j}{j!}\lambda\int_{\mathbb{R}}f^{(j)}(t+\cdot)t^jK(\lambda t)dt\right\|_p \le$$

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{\lambda}{j!}\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}f^{(j)}(t+x)t^{j}K(\lambda t)dt\right|^{p}dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{\left\|f^{(j)}\right\|_{p}}{j!}\lambda\int_{0}^{\infty}t^{j}\left|K(\lambda t)\right|dt=O(1)\sum_{j=0}^{m}\frac{\left\|f^{(j)}\right\|_{p}}{j!\lambda^{j}}. \qquad (2.26)$$

Используя (2.25) и (2.26), получаем

$$\left\|F_{\lambda,m}(f)\right\|_{\omega^{*},p}=\left\|F_{\lambda,m}(f)\right\|_{p}+\sup_{h\neq0}\frac{\left\|\Delta_{h}\left(F_{\lambda,m}(f);\cdot\right)\right\|_{p}}{\omega^{*}(|h|)}=$$

$$O(1)\left\{\sum_{j=0}^{m}\frac{\left\|f^{(j)}\right\|_{p}}{j!\lambda^{j}}+\sup_{h\neq0}\frac{\left\|\Delta_{h}\left(f^{(j)};\cdot\right)\right\|_{p}}{j!\lambda^{j}\omega^{*}(|h|)}\right\}=$$

$$O(1)\sum_{j=0}^{m}\frac{\left\|f^{(j)}\right\|_{\omega^{*},p}}{j!\lambda^{j}}.$$

Что и требовалось доказать.

Приведем **доказательство теоремы 4.2.3.** Используем следующую модифицированную формулу Тейлора для $f\in L_{p}^{(m)}$ $m\in\mathbb{N}$:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^{j}+$$

$$\frac{(x-t)^{m}}{(m-1)!}\int_{0}^{1}(1-u)^{m-1}\left\{f^{(m)}\left(t+u(x-t)\right)-f^{(m)}(t)\right\}du$$

для фиксированного $t\in\mathbb{R}$ и всех $x\in\mathbb{R}$. Пользуясь свойством а) ядра запишем

$$f(x)=\lambda\int f(x)K\left(\lambda(t-x)\right)dt=$$

$$\lambda\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_{j=0}^{m}\frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^{j}K\left(\lambda(t-x)\right)dt+$$

$$\lambda\int\limits_{\mathbb{R}}K\left(\lambda(t-x)\right)\frac{(x-t)^{m}}{(m-1)!}\times$$

$$\left(\int\limits_{0}^{1}(1-u)^{m-1}\left\{f^{(m)}\left(t+u(x-t)\right)-f^{(m)}(t)\right\}du\right)dt=$$

$$F_{\lambda,m}(f;x)+\lambda\int\limits_{\mathbb{R}}K\left(\lambda(t-x)\right)\frac{(x-t)^{m}}{(m-1)!}\times$$

$$\left(\int\limits_{0}^{1}(1-u)^{m-1}\left\{f^{(m)}\left(t+u(x-t)\right)-f^{(m)}(t)\right\}du\right)dt.$$

Следовательно, с помощью свойства а) ядра $K(\cdot)$, находим

$$f(x)-F_{\lambda,m}(f;x)=$$

$$\lambda\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{(x-t)^{m}}{(m-1)!}\int\limits_{0}^{1}(1-u)^{m-1}\Delta_{u(x-t)}\left(f^{(m)};t\right)du\right)K\left(\lambda(t-x)\right)dt=$$

$$\lambda\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{t^{m}}{(m-1)!}\int\limits_{0}^{1}(1-u)^{m-1}\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x-t\right)du\right)K\left(\lambda(t-x)\right)dt. \tag{2.27}$$

Положим

$$\delta_{\lambda,m}(x)=\delta_{\lambda,m}(f;x):=f(x)-F_{\lambda,m}(f;x)$$

и

$$\delta_{\lambda,m}(x+h;x):=\delta_{\lambda,m}(x+h)-\delta_{\lambda,m}(x).$$

Пусть $p=\infty$. Тогда

$$\left|\delta_{\lambda,m}(x+h,x)\right|\le\lambda\int_{\mathbb{R}}\left|K(\lambda t)\right|\frac{|t|^m}{(m-1)!}\times$$

$$\left(\int_0^1(1-u)^{m-1}\left|\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x+h-t\right)-\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x-t\right)\right|du\right)dt.$$

Понятно, что

$$\left|\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x+h-t\right)-\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x-t\right)\right|\le2\omega\left(f^{(m)};|ut|\right)_\infty,$$

$$\left|\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x+h-t\right)-\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x-t\right)\right|\le2\omega\left(f^{(m)};|h|\right)_\infty.$$

В силу свойств модуля непрерывности для $f\in H_{\omega,p}^{(m)}$ будем иметь

$$\left|\delta_{\lambda,m}(x+h,x)\right|\le\lambda\left(\omega\left(f^{(m)};|h|\right)_\infty\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|t|^m}{(m-1)!}\left|K(\lambda t)\right|\times$$

$$\left(\int_0^1(1-u)^{m-1}\left(\omega\left(f^{(m)};|ut|\right)_\infty\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right)dt=$$

$$O(1)\lambda\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{|t|^m}{(m-1)!}\left|K(\lambda t)\right|\left(\omega\left(f^{(m)};|t|\right)_\infty\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\int_0^1(1-u)^{m-1}du\right)dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f^{(m)};\frac{1}{\lambda}\right)_\infty\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\lambda\int_{\mathbb{R}}\frac{|t|^m}{m!}\left|K(\lambda t)\right|\left(1+\lambda|t|\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt.$$

Используя свойство а) ядра $K(\cdot)$ и (2.6), находим

$$\left|\delta_{\lambda,m}(x+h,x)\right| = O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f^{(m)};\frac{1}{\lambda}\right)_{\infty}\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\frac{\lambda}{m!}\int_{0}^{\infty} t^{m}(1+\lambda t)\left|K(\lambda t)\right|dt =$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left(\lambda\int_{0}^{\infty} t^{m}\left|K(\lambda t)\right|dt+\lambda^{2}\int_{0}^{\infty} t^{m+1}\left|K(\lambda t)\right|dt\right)=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\frac{1}{\lambda^{m}}\left(\int_{0}^{\infty} u^{m}\left|K(u)\right|du+\int_{0}^{\infty} u^{m+1}\left|K(u)\right|du\right)=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{\lambda^{m}}. \tag{2.28}$$

Ясно, что

$$\left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot)\right\| = O(1)\frac{1}{\lambda^{m}}\omega\left(f^{(m)};\frac{1}{\lambda}\right)_{\infty} =$$

$$O(1)\frac{1}{\lambda^{m}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}. \tag{2.29}$$

Следовательно, при помощи (2.28) и (2.29) находим

$$\left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot)\right\|_{\omega^*,\infty}=\left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot)\right\|_\infty+\sup_{h\neq 0}\frac{\left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot+h,\cdot)\right\|_\infty}{\omega^*(|h|)}=$$

$$O(1)\sup_{h\neq 0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)}\frac{1}{\lambda^m}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Предположим теперь, что $1\le p<\infty$. Вследствие (2.27) и обобщённого неравенства Минковского будем иметь

$$\left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot+h,\cdot)\right\|_p=\frac{\lambda}{(m-1)!}\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}t^mK(\lambda t)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\int_0^1(1-u)^{m-1}\left(\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x+h-t\right)-\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x-t\right)\right)du\right)dt\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\frac{\lambda}{(m-1)!}\int_{\mathbb{R}}\left|t^mK(\lambda t)\right|\times$$

$$\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\int_0^1(1-u)^{m-1}\left(\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x+h-t\right)-\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x-t\right)\right)du\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}dt\le$$

$$\frac{\lambda}{(m-1)!}\int_{\mathbb{R}}\left|t^mK(\lambda t)\right|\times$$

$$\left(\int_0^1(1-u)^{m-1}\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x+h-t\right)-\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x-t\right)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}du\right)dt.$$

Заметим, что при $1\le p<\infty$

$$\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x+h-t\right)-\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x-t\right)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le 2\omega\left(f^{(m)};|ut|\right)_p,$$

$$\left\{\int_{\mathbb{R}}\left|\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x+h-t\right)-\Delta_{ut}\left(f^{(m)};x-t\right)\right|^{p}dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leq 2\omega\left(f^{(m)};|h|\right)_{p}.$$

Тогда на основании свойства а) ядра $K(\cdot)$, условия (2.6), а также свойств модуля непрерывности будем иметь

$$\left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot+h,\cdot)\right\|_{p}\leq\frac{\lambda}{(m-1)!}\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\int_{\mathbb{R}}\left(|t|^{m}\left|K(\lambda t)\right|\int_{0}^{1}(1-u)^{m-1}\left(\omega\left(f^{(m)};|ut|\right)_{p}\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\right)dt=$$

$$O(1)\frac{\lambda}{(m-1)!}\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\int_{\mathbb{R}}\left(|t|^{m}\left|K(\lambda t)\right|\left(\omega\left(f^{(m)};|t|\right)_{p}\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\int_{0}^{1}(1-u)^{m-1}du\right)dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(f^{(m)};\frac{1}{\lambda}\right)_{p}\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\lambda\int_{\mathbb{R}}\frac{|t|^{m}}{m!}\left|K(\lambda t)\right|\left(1+\lambda|t|\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}dt=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\left(\int_{0}^{\infty}u^{m}\left|K(u)\right|du+\int_{0}^{\infty}u^{m+1}\left|K(u)\right|du\right)=$$

$$O(1)\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{\lambda^{m}}.$$

Подобным образом находим, что

$$\left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot)\right\|_{p}=O(1)\frac{1}{\lambda^{m}}\omega\left(f^{(m)};\frac{1}{\lambda}\right)_{p}=O(1)\frac{1}{\lambda^{m}}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Отсюда окончательно получаем

$$\left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot)\right\|_{\omega^*,p} = \left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot)\right\|_p + \sup_{h\neq 0}\frac{\left\|\delta_{\lambda,m}(\cdot+h,\cdot)\right\|_p}{\omega^*(|h|)} =$$

$$O(1)\sup_{h\neq 0}\frac{\left(\omega(|h|)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|h|)}\left(\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}.$$

Теорема 4.2.3 полностью доказана.

§4.3. Одновременная аппроксимация функций операторами типа Фейера в модифицированных L_p-гёльдеровых пространствах

1. В данном параграфе рассматриваются вопросы одновременной аппроксимации функций операторами типа Фейера в пространствах L_p, $1\le p\le\infty$, а также в обобщённых L_p-гёльдеровых пространствах. Приводятся достаточные условия, обеспечивающие оптимальный порядок приближения операторами типа Фейера в этих пространствах.

Определение 4.3.1. *Пусть* $\lambda>0$ *и ограниченный линейный оператор* $F_\lambda : L_p(\mathbb{R})\to L_p(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$, *определяемый равенством*

$$F_\lambda(f) = F_\lambda(f;x) := \lambda\int_{\mathbb{R}} f(u)K(\lambda(x-u))du,$$

такой, что ядро $K(\cdot)$ *удовлетворяет условиям:*

a₁) $K(-x)=K(x)$

b₁) $K(x)$ *суммируемо на* $[0,1]$

c₁) $\sup\limits_{x\ge 1} x^2\left|K(x)\right|<\infty$

d₁) $\int_{\mathbb{R}} K(x)\,dx = 1.$

Заметим, что условия a₁) –c₁) означают, что $K \in L_1(\mathbb{R})$ и после применения обобщённого неравенства Минковского получим что

$$\left\|F_\lambda(f)\right\|_p \le \|K\|_1 \cdot \|f\|_p$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\lambda > 0$, $1 \le p \le \infty$.

Пусть $W_p^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, определяет пространство Соболева, т.е.

$$W_p^r(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}) : f \in AC^{r-1}, f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R}) \right\},$$

где AC^s, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, является пространством функций s-ые производные которых абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}$.

Везде в этом параграфе будем считать, что ядро $K(\cdot)$ оператора $F_\lambda(f)$ удовлетворяет условиям a₁) –d₁).

Модуль непрерывности порядка n определим с помощью n-й симметричной разности (см. (1.3.1')), а именно:

$$\omega_n(f;t)_p := \sup_{0<h\le t} \left\| \dot{\Delta}_h^n(f) \right\|_p,$$

где

$$\dot{\Delta}_h(f) = \dot{\Delta}_h(f;x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

и

$$\dot{\Delta}_h^n(f) = \dot{\Delta}_h^n(f;x) = \dot{\Delta}_h\left(\dot{\Delta}_h^{n-1}(f;\cdot);x\right),$$

в частности, $\dot{\Delta}_h^2(f;x) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$ и, соответственно,

$$\omega_2(f;t)=\sup_{0<h\le t}\left\|\dot{\Delta}_h^2(f)\right\|_p.$$

Ниже приводятся утверждения, содержащие аппроксимационные свойства k -х производных интегралов типа Фейера F_λ, ядра которых удовлетворяют условиям a1) –d1). Все формулируемые в настоящем параграфе утверждения установлены Б. Драгановым (B.R. Draganov [14]).

2. Прежде всего, приведём следующее утверждение.

Теорема 4.3.1. *Пусть* $W_p^r(\mathbb{R})$, $r\in\mathbb{N}_0$, $1\le p\le\infty$. *Тогда* $F_\lambda(f)\in W_p^r(\mathbb{R})$ *и для любого* $k=0,\dots,r$ *справедливо соотношение*

$$\left\|f^{(k)}-\left(F_\lambda f\right)^{(k)}\right\|_p\le C_1\left\{\frac{1}{\lambda-1}\int_1^\lambda\omega_2\left(f^{(k)};\frac{1}{u}\right)_p du+\frac{\left\|f^{(k)}\right\|_p}{\lambda}\right\},$$

где

$$C_1:=\int_0^1\left|K(x)\right|dx+4\sup_x\left|x^2K(x)\right|,\ \lambda>1.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что условия, накладываемые на ядро $K(\cdot)$ обеспечивают включение $F_\lambda(f)\in W_p^r(\mathbb{R})$ для любой функции $f\in W_p^r(\mathbb{R})$ и $\left(F_\lambda(f)\right)^{(k)}=F_\lambda\left(f^k\right)$.

Поэтому достаточно установить справедливость теоремы 4.3.1 только для $r=0$. Производя замену $y=\lambda(x-u)$ и используя свойство a1) и d1) ядра $K(\cdot)$, получаем представление

$$F_\lambda(f;x)-f(x)=\int_0^\infty\dot{\Delta}_{\frac{y}{\lambda}}^2(f;x)K(y)dy.$$

Следовательно, благодаря обобщённому неравенству Минковского, находим

$$\left\|f-F_{\lambda}(f)\right\|_{p} \leq \int_{0}^{\infty}|K(y)|\left\|\dot{\Delta}_{\frac{y}{\lambda}}^{2}(f)\right\|_{p} dy. \qquad (3.1)$$

Разобьём интеграл в правой части на три интеграла по промежуткам $[0,1]$, $[1,\lambda]$ и $[\lambda,\infty)$. Для первого интеграла, в виду того, что $\omega_2(f;t)_p$ не убывает, будем иметь

$$\int_{0}^{1}|K(y)|\left\|\dot{\Delta}_{\frac{y}{\lambda}}^{2}(f)\right\|_{p} dy \leq \int_{0}^{1}|K(y)|\omega_{2}\left(f;\frac{y}{\lambda}\right)dy \leq$$

$$\int_{0}^{1}|K(u)|du\,\omega_{2}\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_{p} \leq$$

$$\int_{0}^{1}|K(y)|dy\frac{1}{\lambda-1}\int_{1}^{\lambda}\omega_{2}\left(f;\frac{1}{u}\right)du. \qquad (3.2)$$

Далее, при помощи свойства c1) ядра $K(\cdot)$ получаем

$$\int_{1}^{\lambda}|K(y)|\left\|\dot{\Delta}_{\frac{y}{\lambda}}^{2}(f)\right\|_{p} dy \leq \sup_{y\geq 1}\left|y^{2}K(y)\right|\int_{1}^{\lambda}\frac{\omega_{2}\left(f;\frac{y}{\lambda}\right)_{p}}{y^{2}}dy =$$

$$\sup_{y\geq 1}\left|y^{2}K(y)\right|\frac{1}{\lambda}\int_{1}^{\lambda}\omega_{2}\left(f;\frac{1}{u}\right)du. \qquad (3.3)$$

Наконец, в силу свойства c1) ядра $K(\cdot)$ и неравенства $\left\|\dot{\Delta}_{h}^{2}(f)\right\|_{p} \leq 4\|f\|_{p}$, получаем

$$\int_{\lambda}^{\infty}|K(y)|\left\|\Delta_{\frac{y}{\lambda}}^{2}(f)\right\|_{p} dy \leq 4\|f\|_{p}\sup_{y\geq 1}\left|y^{2}K(y)\right|\int_{\lambda}^{\infty}\frac{1}{y^{2}}dy =$$

$$4\|f\|_{p}\sup_{y\geq 1}\left|y^{2}K(y)\right|\frac{1}{\lambda}. \qquad (3.4)$$

Объединяя соотношения (3.1)–(3.4), приходим к утверждению теоремы для $r=0$.

Теорема 4.3.1 доказана.

Следствие 4.3.1. *Пусть* $f\in L_p(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$, $\omega_2(f;t)_p=O(t^\alpha)$, $0<\alpha\le 2$. *Тогда*

$$\|f-F_\lambda(f)\|_p=\begin{cases}O(1)\lambda^{-\alpha}, & 0<\alpha<1,\\ O(1)\lambda^{-1}\ln\lambda, & \alpha=1,\\ O(1)\lambda^{-1}, & 1<\alpha\le 2.\end{cases}$$

где $\lambda>1$.

Известно ([3], [12], [13]), что оператор Фейера с ядром

$$K(x)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2,\quad x\in R,$$

имеет насыщение порядка $\frac{1}{\lambda}$. Класс и порядок насыщения средних Фейера был определен Г. Алексичем и М. Заманским в случае непрерывных 2π-периодических функций. Вопросы насыщения для B-пространств, включая гёльдеровы пространства 2π-периодических функций, изучались З. Дицианом и К. Ивановым(Z. Ditzian, K. Ivanov [13]).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3.2. *Пусть ядро* $K(\cdot)$ *оператора* F_λ *финитная функция с носителем* $[-\zeta,\zeta]$, *является суммируемой на* $\mathbb{R}$ *и удовлетворяет условиям a₁) и d₁). Пусть, далее,* $\lambda>0$ *и* $f\in W_p^r(\mathbb{R})$, $r\in\mathbb{N}_0$, $1\le p\le\infty$. *Тогда* $F_\lambda(f)\in W_p^r(\mathbb{R})$ *и для всех* $k=0,\dots,r$ *справедливо соотношение*

$$\left\| f^{(k)} - \left(F_\lambda(f)\right)^{(k)} \right\|_p \le C_2 \omega_2 \left(f^{(k)}; \frac{\zeta}{\lambda} \right)_p,$$

где

$$C_2 = \int_0^\zeta |K(x)|\,dx.$$

Доказательство. В силу условий теоремы находим

$$\left\| f - F_\lambda(f) \right\|_p \le \int_0^\zeta |K(y)| \left\| \Delta^2_{\frac{y}{\lambda}}(f) \right\|_p dy \le \int_0^\zeta |K(y)| dy\, \omega_2 \left(f; \frac{\zeta}{\lambda} \right)_p.$$

3. Перейдем к рассмотрению результатов об одновременной аппроксимации операторами типа Фейера в обобщенных модифицированных L_p-гёльдеровых пространствах.

Пусть, как обычно, $\omega(t)$ неубывающая и положительная при $t > 0$ функция. Рассмотрим пространство функций (см. Гл. I)

$$H_{\omega,p,n}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}) : |f|_{\omega,p,n} < \infty \right\},$$

где

$$|f|_{\omega,p,n} := \sup_{h>0} \frac{\left\| \Delta_h^n(f) \right\|_p}{\omega(h)}.$$

$H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})$ является B-пространством относительно обобщённой L_p-гёльдеровой нормы

$$\|f\|_{\omega,p,n} := \|f\|_p + |f|_{\omega,p,n},$$

при этом величина $|f|_{\omega,p,n}$ является полунормой в $H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})$.

Следующая теорема содержит утверждение, являющееся аналогом теоремы 4.1.1 для пространства $H_{\omega,p,2}(\mathbb{R})$, в которых достигается оптимальный порядок аппроксимации операторами типа Фейера..

Пусть $1 \le p \le \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$ и $\omega(t)$ неубывающая и положительная при $t > 0$ функция. Положим

$$W^r_{p,\omega,n}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in H_{\omega,p,n}(\mathbb{R}) : f \in AC^{r-1}, f^{(r)} \in H_{\omega,p,n}(\mathbb{R}) \right\}$$

и $W^0_{p,\omega,n}(\mathbb{R}) = H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})$. Заметим, что если $f \in W^r_{p,\omega,n}(\mathbb{R})$, то $f^{(k)} \in H_{\omega,p,n}(\mathbb{R})$, $k = 0, \ldots, r$.

Теорема 4.3.3. *Пусть* $f \in W^r_{p,\omega,2}(\mathbb{R}) \subset W^r_{p,\omega^*,2}(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lambda > 1$, $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда* $F_\lambda(f) \in W^r_{p,\omega,2}(\mathbb{R})$ *и для всех* $k = 0, \ldots, r$ *справедливо соотношение*

$$\left| f^{(k)} - \left(F_\lambda(f)\right)^{(k)} \right|_{\omega^*,p,2} \le 4C_1 \sup_{h>0} \frac{\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\mu}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{ \frac{\left| f^{(k)} \right|_{\omega,p,2}}{\lambda - 1} \int_1^\lambda \left(\omega\left(\frac{1}{u}\right) \right)^{1-\frac{\beta}{\eta}} du + \frac{\left| f^{(k)} \right|_{\omega,p,2}^{\frac{\beta}{\eta}} \left\| f^{(k)} \right\|_p^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{\lambda} \right\},$$

где постоянная C_1 *определена в теореме 4.3.1. Если также*

$$\inf_{0<h\le 1} \frac{\omega(h)}{h^2} > 0,$$

то для всякого $k = 0, \ldots, r$ *имеет место соотношение*

$$\left| f^{(k)} - \left(F_\lambda(f)\right)^{(k)} \right|_{\omega^*,p,2} \le 4C_1 \sup_{h>0} \frac{\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)} \times$$

$$\left\{1+\left(\inf_{0<h\le 1}\frac{\omega(h)}{h^2}\right)^{\frac{\beta}{\eta}-1}\right\}\left\|f^{(k)}\right\|_{\omega,p,2}\frac{1}{\lambda-1}\int_1^{\lambda}\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du.$$

Заметим, что если

$$\inf_{0<h\le 1}\frac{\omega(h)}{h^2}=0,$$

т.е. существует последовательность $\{h_i\}$ такая, что $\lim_{i\to\infty}h_i=0$ и $\lim_{i\to\infty}h_i^{-2}\omega(h_i)=0$, то $f=0$ для $p<\infty$ и $f=const$ для $p=\infty$ и утверждение теоремы в этом случае является тривиальным.

Доказательство теоремы 4.3.3. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $r=0$.

Принимая во внимание равенство

$$\dot{\Delta}_h^2(F_\lambda f-f)=F_\lambda\left(\dot{\Delta}_h^2(f)\right)-\dot{\Delta}_h^2(f),$$

из теоремы 4.3.1 с $r=0$ получаем, что для каждого $h>0$

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2(F_\lambda f-f)\right\|_p\le C_1\left\{\frac{1}{\lambda-1}\int_1^{\lambda}\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;\frac{1}{u}\right)_p du+\frac{\left\|\dot{\Delta}_h^2(f)\right\|_p}{\lambda}\right\}.$$

На основании соотношений

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p\le 4\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p,$$

$$\omega_2\left(\dot{\Delta}_h^2 f;t\right)_p\le 4\omega_2(f;t)_p,$$

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2 f\right\|_p\le 4\|f\|_p,$$

для всякого $h>0$

$$\left\|\dot{\Delta}_h^2(F_\lambda f-f)\right\|_p\le C_1\left\|\dot{\Delta}_h^2(f)\right\|_p^{\frac{\beta}{\eta}}\times$$

$$\left\{\frac{4}{\lambda-1}\int_1^\lambda\left(\omega_2\left(f;\frac{1}{u}\right)_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du+\frac{\left(4\|f\|_p\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{\lambda}\right\}\le$$

$$4C_1\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}|f|_{\omega,p,2}^{\frac{\beta}{\eta}}\left\{\frac{|f|_{\omega,p,2}^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{\lambda-1}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du+\frac{\|f\|_p^{1-\frac{\beta}{\eta}}}{\lambda}\right\}.$$

Отсюда вытекает первое утверждение теоремы.

Вторая часть теоремы следует из того, что для любого $\lambda>1$

$$\frac{1}{\lambda-1}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du\ge\left(\inf_{0<h\le1}\frac{\omega(h)}{h^2}\right)^{\frac{\beta}{\eta}-1}\frac{1}{\lambda-1}\int_1^\lambda u^{2\left(\frac{\beta}{\eta}-1\right)}du\ge$$

$$\left(\inf_{0<h\le1}\frac{\omega(h)}{h^2}\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}\frac{1}{\lambda}.$$

Сопоставляя теоремы 4.3.1 и 4.3.3 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.3.4. *Пусть* $\inf\limits_{0<h\le1}h^{-2}\omega(h)>0$, $f\in W^r_{p,\omega,2}(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$, $r\in\mathbb{N}_0$, $0\le\beta<\eta\le2$. *Тогда* $F_\lambda(f)\in W^r_{p,\omega,2}(\mathbb{R})$ *и для всякого* $k=0,\dots,r$ *справедливо соотношение*

$$\left\|f^{(k)}-\left(F_\lambda(f)\right)^{(k)}\right\|_{\omega^*,p,2}\le C_1\left\{1+4\sup_{h>0}\frac{\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\right\}\times$$

$$\left\{4^{\frac{\beta}{\eta}}+\left(\inf_{0<h\le1}\frac{\omega(h)}{h^2}\right)^{\frac{\beta}{\eta}-1}\right\}\frac{\left\|f^{(k)}\right\|_{\omega,p,2}}{\lambda-1}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du,$$

где C_1 *– постоянная, определенная в теореме 4.3.1.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4.3.3 из теоремы 4.3.1 получаем

$$\left\|\left(F_\lambda(f)\right)^{(k)} - f^{(k)}\right\|_p \le C_1\left\{4^{\frac{\beta}{\eta}} + \left(\inf_{0<h\le 1}\frac{\omega(h)}{h^2}\right)^{\frac{\beta}{\eta}-1}\right\}\times$$

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{p,\omega,2}\frac{1}{\lambda-1}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du, \quad k=0,\dots,r.$$

Теперь доказательство следует из утверждения теоремы 4.3.3.

Следствие 4.3.2. *Пусть* $\omega(t)=t^\alpha$ *и* $\omega^*(t)=t^\beta$, *где* $0<\beta<\alpha\le 2$. *Для любой функции* $f\in H^{(\mathbb{R})}_{\omega,p,2}$, $1\le p\le\infty$, *справедливо утверждение*

$$\left\|f - F_\lambda(f)\right\|_{\omega^*,p,2} = \begin{cases} O(1)\lambda^{\beta-\alpha}, & \alpha-\beta<1,\\ O(1)\lambda^{-1}\ln\lambda, & \alpha-\beta=1,\ \lambda>1,\\ O(1)\lambda^{-1}, & \alpha-\beta>1.\end{cases}$$

Приведем следующее замечание. Пусть

$$\inf_{0<h\le 1} h^{-1}\omega(h)>0,$$

$\lambda>1$ и $f\in W^r_{p,\omega,1}(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$, $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Следуя методу, использованному при доказательстве теорем 4.3.1 и 4.3.3, приходим к следующим неравенствам

$$\left\|f^{(k)} - \left(F_\lambda(f)\right)^{(k)}\right\|_p \le$$

$$C_3\left\{2^{\frac{\beta}{\eta}} + \left(\inf_{0<h\le 1}\frac{\omega(h)}{h}\right)^{\frac{\beta}{\eta}-1}\right\}\left\|f^{(k)}\right\|_{\omega,p,1}\frac{1}{\lambda-1}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du,$$

$$\left|f^{(k)}-\left(F_\lambda f\right)^{(k)}\right|_{\omega^*,p,1}\le 2C_3\sup_{h>0}\frac{\left(\omega(h)\right)^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(h)}\times$$

$$\left\{1+\left(\inf_{0<h\le 1}\frac{\omega(h)}{h}\right)^{\frac{\beta}{\eta}-1}\right\}\left\|f^{(k)}\right\|_{\omega,p,1}\frac{1}{\lambda-1}\int_1^\lambda\left(\omega\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{1-\frac{\beta}{\eta}}du,$$

где

$$C_3:=2\int_0^1\left|K(x)\right|dx+4\sup_{x\ge 1}\left|x^2K(x)\right|.$$

Объединяя эти соотношения, получаем аналог теоремы 4.3.3 для пространства $H_{\omega,p,1}(\mathbb{R})$.

В следующем утверждении содержится оптимальный порядок аппроксимации операторами типа Фейера в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах $H_{\omega^*,p,1}(\mathbb{R})$ на множестве функций $H_{\omega,p,2}(\mathbb{R})$.

Следствие 4.3.3. *Пусть* $\omega(t)=t^\alpha$ *и* $\omega^*(t)=t^\beta$, $0<\beta\le 1$ *и* $\beta<\alpha\le 2$. *Тогда для любой функции* $f\in H_{\omega,p,2}(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$, *имеют место соотношения*

$$\left\|f-F_\lambda(f)\right\|_{\omega^*,p,1}=\begin{cases}O(1)\lambda^{\beta-\alpha}, & \alpha-\beta<1,\\ O(1)\lambda^{-1}\ln\lambda, & \alpha-\beta=1,\quad \lambda>1,\\ O(1)\lambda^{-1}, & \alpha-\beta>1.\end{cases}$$

Доказательство. Для $0<\beta<1$ данный результат вытекает из предложения 1.6.2 (точнее следствия 1.6.1) главы I в котором $\omega(t)=\omega^*(t)$ и следствия 4.3.2.

Пусть $\beta = 1$. Поскольку $f \in H_{\omega,p,2}(\mathbb{R})$, то $\omega_2(f;h)_p = O(h^\alpha)$, $\alpha > 1$. Тогда, как известно ([12]), $f \in W_p^1(\mathbb{R})$ и $\omega(f';h)_p = \omega_1(f';h)_p = O(h^{\alpha-1})$. Следовательно, $\omega_2(f';h)_p = O(h^{\alpha-1})$ и при помощи следствия 4.3.1 находим, что

$$\left\| f' - F_\lambda(f') \right\|_{\omega^*,p,1} = \begin{cases} O(1)\lambda^{1-\alpha}, & \alpha < 2, \\ O(1)\lambda^{-1}\ln\lambda, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Таким образом, вследствие неравенства

$$\left\| \Delta_h\left(F_\lambda(f) - f\right) \right\|_p \le h \left\| \left(F_\lambda(f) - f\right)' \right\|_p = h \left\| F_\lambda(f') - f' \right\|_p,$$

получаем, что

$$\left| F_\lambda(f) - f \right|_{\omega^*,p,1} = \begin{cases} O(1)\lambda^{1-\alpha}, & \alpha < 2, \\ O(1)\lambda^{-1}\ln\lambda, & \alpha = 2,\ \lambda > 1. \end{cases}$$

С другой стороны, поскольку $\omega_2(f;h)_p = O(h^\alpha)$, $\alpha > 1$, благодаря следствию 4.3.1 будем иметь соотношение

$$\left\| F_\lambda(f) - f \right\|_p = O(1)\lambda^{-1},$$

которое вместе с предыдущим соотношением влечёт утверждение следствия для случая $\beta = 1$. Следствие 4.3.3 полностью доказано.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алексич Г.*
   Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963. 359 с.
2. *Auerbach H., Banach S.*
   Über die Hölderische Bedingung // Studia Math. 1931, №3. C. 180-184.
3. *Ахиезер Н.И.*
   Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
4. *Бари Н.К.*
   1) О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР (Сер. матем) 1955. Т. 19. №5. С. 285-302.
   2) Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
5. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.*
   Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Московского матем. об-ва. 1956, №5. С. 483-522.
6. *Бернштейн С.Н.*
   1) О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. (1912) М.: АН СССР. Собр. соч. 1952. Т. 1. С. 11-104.
   2) Конструктивная теория функций (1951-1953). М.: АН СССР. Собр. соч. 1954. Т. 2.
7. *Бутцер П.Л., Нессель Р.Д. (Butzer P.L., Nessel R.J.)*
   Fourier Analysis and Approximation. Basel – Birkhäusen – New-York. Acad. Press. 1971.
8. *Гоголадзе Л.Д.*
   1) О сильной суммируемости простых и кратных тригонометрических рядов // Некоторые вопросы теории функций. Тб. 1981. Т. 2. С. 5-50.
   2) О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функциях. Тб. Дис. … д-ра физ.-мат. наук. 1984. 256 с.
9. *Горзенска М., Лесиниевич М., Ремпульска Л. (Gorzenska M., Lesiniewicz M., Rempulska L.)*
   1) Strong approximation of functions in Hölder spaces // Acta Sci. Math. (Szeged) 1993. V. 58. P. 233-241.

2) Strong approximation in Hölder norms // Math. Nach. 1994. V. 170. P. 127-132.

10. *Гусейнов А.И, Мухтаров Х.Ш.*
Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 414 с.

11. *Дзядык В.К.*
Введение в теорию приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 672 с.

12. *Девор Р.А., Лоренц Г.Г. (DeVore R.A., Lorentz G.G.)*
Constructive Approximation. Springer – Verlag: Berlin. 1993.

13. *Дициан З., Иванов К. (Ditzian Z., Ivanov K.)*
Strong converse inequalities // J. Anal. Math. 1993. V. 61. P. 61-111.

14. *Драгонов Б.Р. (Draganov B.R.)*
Simultaneous approximation of functions by Fejer-type operators in a generalized Hölder norm // East J. Approx. 2008. V. 14. P. 439-449.

15. *Дэс Г., Гош Т., Рэй Б.К. (Das G., Ghosh T., Ray B.K.)*
Degree of approximation of functions in the Hölder metric by (e,c) means //Proc. Indian Acad. Sci (Math. Sci). 1995. V. 105. P. 315-327.

16. *Дэс Г., Рэй Б.К., Саданги П. (Das G., Ray B.K., Sadangi P.)*
1) Rate of convergence of a series associated with Hardy-Littlewood series // J. Orissa Math. Soc. 1998-2001. V. 17-20. P. 127-141.
2) Approximation by the K^{λ} means of Fourier series and conjugate series in the Hölder metric // J. Orissa Math. Soc. 2011. V 30, №2 P. 49-66.

17. *Дэс Г., Аша А.К., Рэй Б.К. (Das G., Ojha A.K., Ray B.K.)*
Degree of approximation of functions associated with Hardy-Littlewood series in the Hölder metric by Borel means // J. Math. Anal. Appl. 1998. 219. P. 279-293.

18. *Дэс Г., Нэт А., Рэй Б.К. (Das G., Nath A., Ray B.K.)*
An estimate of the Rate of convergence of Fourier Series in Generalized Hölder metric // Anal. and Appl. ujjain, 1999), Narosa, New-Delhi. 2002. P. 43-60.

19. *Дэс Г., Пэни Б., Рэй Б.К. (Das G., Pani B., Ray B.K.)*

Degree of approximation of functions in $H_p^{(\omega)}$ class associated with Hardy-Littlewood series in the generalised Hölder metric by Nevanlinna method // J. Orissa Math. Soc. 2011. V 30, №2 P. 93-108.

20. *Жук В.В.*
Приближение периодических функций в метриках типа Гёльдера суммами Фурье и средними Рисса // Зап. научн. сем ПОМИ. 2007. Т. 350. С. 70-87.

21. *Золь Б. (Szal B.)*
   1) On the strong approximation by Fourier series in Lipschitz norm // Proc. A Razmadze Math. Inst. 2000. 122. P. 159-170.
   2) On the strong approximation by matrix mean in the generalized Hölder metric // Rendiconti del Circ. Math. di Palermo. 2007. V. 56, №2. P. 287-304.
   3) On the rate of strong summability by matrix means in the generalized Hölder metric // J. of inequal in pure and appl. math. 2008. V. 9, №1. P. 1-27.
   4) On the degree of strong approximation of continuous functions by special matrix // J. of inequal in pure and appl. math. 2009. V. 10, №4. P. 1-17.

22. *Зигмунд А. (Zygmund A.)*
   1) Тригонометрические ряды. М.: МИР, 1965. Т. 2. 538 с.
   2) Sur le module de continuite de la somme de la serie conjuguee de la serie de Fourier // Prace Math. –Fizyc. 1924. V. 33. S. 125-132.

23. *Иофина Т.В.*
Приближение средними Нёрлунда-Вороного в метрике Гёльдера // Anal. Math. 2011. V. 37, №1. P. 1-13.

24. *Карамата Д. (Karamata J.)*
Theorems sur la sommabiliti exponentielle et d'autres sommabilitis s'yrattachant mathematica // Cluj. 1935. V. 9. P. 164-178.

25. *Квад Е. (Quade E.)*
Trigonometric approximation in the mean // Duke Math. Journ. 1937, №3. P. 529-543.

26. *Ласурия Р.А.*
   1) О приближении периодических функций линейными средними сумм Фурье в обобщённой гёльдеровой метрике // Докл. АМАН. 2000. Т. 5, №1. С. 24-39.

2) Приближение функций в обобщенной гёльдеровой метрике // Сухум: Изд-во АГУ. 2000. 65 с.
3) Оценки группы уклонений в обобщённой гёльдеровой метрике // Укр. матем. журн. 2001. Т. 53, № 9. С. 1210-1212.
4) О приближении функций, заданных на всей действительной оси, операторами типа Фейера в обобщенной гёльдеровой метрике // Мат. заметки. 2007. Т. 81, №4. С. 547-552.
5) Сильная суммируемость рядов Фурье и аппроксимация функций. С.: АГУ, 2010. 258 с.
6) Группы отклонений рядов Фурье в обобщенных L_p-гёльдеровых пространствах // VIII межд. симп. "Ряды Фурье и их приложения" Материалы (тез.). Фонд науки и обр. Ю.Ф.У. Р.-на-Д. 2014, С. 71.
7) Приближение периодических функций в обобщенных гёльдеровых пространствах // III межд. Росс.-Казах. симп. "Уравнения смешенного типа, родственные проблемы анализа и информатики" Тез., ФГБНУ " Ин-т прикл. матем. и авт." 2014. С. 121-122.
8) Оценки группы уклонений в обобщённых L_p-гёльдеровых пространствах // Вестник АНА. 2015. 5. С. 120-135.
9) Приближение функций в обобщенном гёльдеровом пространстве // IX межд. симп. "Ряды Фурье и их приложения" Материалы (тез.). Фонд науки и обр. ЮФУ. Р.н/Д. 2016, С. 17-18.
10) Группы отклонений рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах // Укр. матем. журн. 2016. Т. 68, №8. С. 1056-1067.
11) Аппроксимация и группы отклонений рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах // IX межд. симп. "Ряды Фурье и их приложения" Материалы. Фонд науки и обр. Ю.Ф.У. 2016. С.9-20.
12) Approximation of the Fourier linear average sums in the generalized Hölder space // Inter. Russ.-Chinese conf. Proceeding, Elb. 2015. P. 111-113.

27. *Ласурия Р.А., Голава М.Р.*

1) Сильная аппроксимация функций в обобщенных гёльдеровых пространствах // Межд. конф. "Актуальные пробле-

мы прикл. матем. и инф." Материалы (тез.). ФГБНУ "Ин-т прикл. матем. и авт." 2016. С. 178-180.

2) Средние Фейера в обобщенном гёльдеровом пространстве // Труды АГУ. РИО АГУ. 2015. С. 5-11.

28. *Лауд В.С. (Loud W.S.)*
Functions with prescribed Lipschitz condition // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. V. 2, №3. P. 358-360.

29. *Лендон Б.А. (Landon B.A.)*
Degree of approximation of Hölder continuous functions. A dissert. for the degree of D-r of Phil. in Math. in the Depart. of Math. at the Un-ty of Central Florida, Orlando (USA). 2008. 76 p.

30. *Лейндлер Л. (Leindler L.)*
1) On summability of Fourier series // Acta Sci. Math. (Szeged). 1968. V. 29. P. 147-162.
2) Generalizations of Prössdorf's theorems // Stud. Math. Hung. 1979. V. 14. P. 431-439.
3) Strong approximation bu Fourier series. Budapest. 1985. 210 p.
4) On the degree of approximation of continuous functions // Acta Math. 2004. 104. P. 105-113.
5) A relaxed estimate of the degree of approximation by Fourier series in generalized Hölder metric // Anal. Math. 2005. V. 35. P. 51-60.

31. *Лейндлер Л., Меир А., Тотик В. (Leindler L., Meir A., Totik V.)*
On approximations of continuous functions in Lipschitz norms // Acta Math. Hung. 1985, V. 45. 3-4. P. 441-443.

32. *Лозинский С.М.*
Обращение теоремы Джексона // ДАН СССР. 1952. Т. 83, №5. С. 645-647.

33. *Ленски В., Золь Б. (Lenski W., Szal B.)*
On the approximation of functions by matrix means in the generalized Hölder metric // Banach Cent. Publ. 2008. 79. P. 119-129.

34. *Маршо А. (Marschoud A.)*
Sur les derives et sur differences des fonction variab variables // J. Math. pures et appl. 1927. V 9, №6. P. 337-425.

35. *Мохапатра Р.Н., Чандра П. (Mohapatra R.N., Chandra P.)*
1) Hölber continuous functions and thein Eulen, Borel and Taylor means // Math. chronicle. 1982. V. 11. P. 81-96.
2) Degree of approximation of functions in the Hölder metric // Acta Math. Hung. 1983. V. 41. 1-2. P. 67-76.

36. *Мохапатра Р.Н., Голленд A.S.B., Сани Б.Н. (Mohapatra R.N., Holland A.S.B., Sahney B.N.)*

Functions of class $Lip(\alpha, p)$ and their Taylor means // J. Approx. Theor. 1985. V. 45. P. 363-374.

37. *Мохапатра Р.Н., Родригес Р.С. (Mohapatra R.N., Rodrigues R.S.)*

On the rate of convergence of singular integrals for Hölder continuous functions // Math. Nachr. 1990. 149. P. 117-124.

38. *Мохапатра Р.Н., Золь Б. (Mohapatra R.N., Szal B.)*

Degree of convergence of an Integral Operator // arXiv: 1205. 5870 V. 1 [math. CA] 2012 (26 may).

39. *Нэт А. (Nath A.)*

Degree of approximation by matrix mean in a generalized Hölder metric // J. Orissa Math. Soc. 2011. V. 30, №2. P. 81-92.

40. *Пачулиа Н.Л.*

1) О сильной суммируемости рядов Фурье // Вопр. суммир. простых и кратных рядов Фурье. К.: 1987. 59 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 87. 40). С. 9-50.

2) Оценки сильных средних уклонений рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. 1989. 134, №3. С. 497-496.

41. *Престин Дж. (Prestin J.)*

1) Best approximation in Lipshits space // Coll. Math. Soc. Bolyai. 1985. V. 49. P. 753-759.

2) Approximation in periodischen Lipschitzraeumen // Rostok. Math. Kollog. 1988. V. 35. P. 77-78.

3) Approximation in Hölder norms with higher order differences // Rostok. Math. Kollog. 1997. V. 51. P. 33-50.

42. *Престин Дж., Прёсдорф З. (Prestin J., Prössdorf S.)*

Error estimates in generalized trigonometric Hölder-Zygmund norms // Z. Anal. Anwendungen. 1990. V. 9. P. 343-349.

43. *Прёсдорф З. (Prössdorf S.)*

1) Zur Konvergens der Fourierreihen Hölder stetiger // Math. Nachr. 1975. V. 69. С. 7-14.

2) Некоторые классы сингулярных уравнений. М: МИР, 1979. 493 с.

44. *Привалов И.И.*

Интеграл Коши. Саратов: Сарат. ун-т., 1919.

45. *Родин В.А.*

BMO-сильные средние рядов Фурье // Функ. анализ и его прилож. 1989. 23. вып. 2. С. 73-74.
46. *Рубинштейн Л.И.*
Об ω-лакунарных рядах и о функциях класса H^{∞} // Мат. сб. 1964. Т. 65(107), №2. С. 239-271.
47. *Саданги П. (Sadangi P.)*
Degree of convergence of functions in the Hölder metric // Ph. D. Thesis. Utkal Un-ty. 2006.
48. *Салем Р. (Salem R.)*
Essais sup les series trigonometriques. Paris. 1940.
49. *Сан Се-Хуа (Sun Xie-Hua)*
Degree of approximation of functions in the generalized Hölder metric // Indian J. pure Appl. Math. 1996. V. 27. p. 407-417.
50. *Сингх Т. (Singh T.)*
   1) The approximation of continuous functions in the Hölder metric // Мат. весн. 1991. Т. 43. 3-4. С. 111-118.
   2) Degree of approximation of functions in a normed spaces // Publ. Math. Debrecen. 1992. V. 40. 3-4. P. 261-267.
   3) Approximation to function in the Hölder metric // Proc. Math. Acad. Sci. India. 1992. V. 62(A). P. 224-233.
51. *Сингх У., Сонкер С. (Singh U., Sonker S.)*
Degree of Approximation of Function $f \in H_p^{(\omega)}$ class in generalized Hölder metric by matrix means // Math. Modell. and Sci. Comp. 2012. V. 283. P. 1-10.
52. *Стапински З. (Stypinski Z.)*
On a generalization of the theorem of Prössdorf // Funct. Approx. Comment. Math. 1979. V. 7. P. 101-104.
53. *Степанец А.И.*
Методы теории приближений: В 2т. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Т. 1. 426 с.
54. *Стечкин С.Б.*
О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР (сер. матем). 1951. Т. 15. С. 219 – 242.
55. *Теляковский С.А.*
О скорости приближения функций в липшицевых нормах // Труды ин-та мат-и и мех-и УрО РАН. 2010 Т. 16. №4. С. 297-299.
56. *Тиман А.Ф.*

Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз. 1960. 624 с.
57. *Тиман М.Ф.*
Аппроксимация и свойства периодических функций. К.: Наук. думка, 2008. 375 с.
58. *Уэи Б., Ю Д. (Wei B., Yu D.)*
On the degree of approximation of continuous functions by means of Fourier series // Math. Commun. 2012. 17. P. 211-219.
59. *Фарли Б., Ремпульска Л. (Firlej B., Rempulska L.)*
On some singular integrals in Hölder spaces // Math. Nachr., 1994. 170. P. 93-100.
60. *Фириштейн С.Р.*
Об одном признаке компактности в банаховом пространстве $C_{[0,1]}^{\alpha+l}$ // Изв. ВУЗов (сер. матем.). 1969. С. 117-118.
61. *Харди Г. Литтлвуд Д., Полиа Г.*
Неравенства. М.: ИЛ. 1948. 456 с.
62. *Хсианг В.Г. (Hsiang W.H.)*
On the conjugate Abel sum // Funct. et Approxim. 1982. XII. P. 83-103.
63. *Чандра П. (Chandra P.)*
1) On the generalized Fejer means in the metric of the Hölder space // Math. Nachr. 1982. V. 109. S. 39-45.
2) Degree of approximation of functions in the Hölder metric by Borel's mean // J. Math. Analysis Appl. 1990. V. 149. P. 236-246.
64. *Чандра П., Такур С.С., Сингх Р. (Chandra P., Thakur S.S., Singh R)*
1) Functions of L_p-space and Taylor means // Мат. Vesnik. 2013. V. 65. P. 35-45.
2) Functions of class $H(\alpha, p)$ and Taylor means // Мат. весник. 2013. С 1-13.
65. *Чандра Прак. (Chandra Prak.)*
Degree of approximation of functions by their Fourier series by generalized matrix mean in generalized Hölder metric // J. Orissa Math. Soc. 2011. V. 30, №2. P. 121-139.

Научное издание

ЛАСУРИЯ Роберт Андреевич

АППРОКСИМАЦИЯ И ГРУППЫ ОТКЛОНЕНИЙ РЯДОВ ФУРЬЕ
В ОБОБЩЕННЫХ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Компьютерный набор: Чолокян С.Э.
Верстка: Чолокян С.Э.

Подписано в печать 20.08.2017
Заказ №
Формат
Печать офсетная. Тираж 200 экз.
Отпечатано с электронного носителя автора