Абхазский государственный университет

Кафедра математического анализа

Ласурия Р.А.

ДИФФЕРЕНЦЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

г. Сухум.
2019 г.

Ласурия Роберт Андреевич

Дифференциальные уравнения. – Сухум: АГУ, 2019 – 82 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов различных специальностей ВУЗов, изучающих разделы математического анализа. Целью данного пособия является приобретение студентами практических навыков по методам решений дифференциальных уравнений. Пособие может быть использовано для самостоятельной и для контрольных работ, для типовых расчетов по данному разделу математики. Пособие разбито на параграфы, в каждом из которых дается необходимая теоретическая справка и разбор типовых примеров.

Рецензент: академик Пачулиа Н.Л.

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом АГУ

2-ое издание

2019

ГЛАВА 1.

Дифференциальные уравнения первого порядка

§1. Общее положения.

Соотношение связывающее независимую переменную, искомую функцию и производную от искомой функции называется дифференциальным уравнением первого порядка. Математически это записывается в виде формулы

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

где F непрерывная функция своих аргументов. Разрешая относительно y', если это возможно, получим

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

где $f(x, y)$ – непрерывная функция.

Итак, дифференциальное уравнения первого порядка записывается либо в виде формулы (1), либо – (2).

Определим, что является решением дифференциального уравнения – это любая функция $y = \varphi(x)$ при подстановке которой в дифференциальное уравнение (1) или (2) обращает его в тождество.

Если при любом c, $y = \varphi(x, c)$ является решением уравнения (1) или (2), то такое решение называется общим.

Можно поставить и обратную задачу. Пусть – известно общее решение $y = \varphi(x, c)$ – некоторого дифференциального уравнения первого порядка. Найдем это дифференциальное уравнение.

Продифференцируем $y = \varphi(x, c)$ и исключим c из системы.

$$\begin{cases} y = \varphi(x, c), \\ y' = \varphi'(x, c). \end{cases}$$

Полученное соотношение будет искомым дифференциальным уравнением.

Контрольный пример.

Пусть известно общее решение $У = Ce^x$ некоторого дифференциального уравнения. Найдем это уравнение.

Вычислим $У' = Ce^x$ и исключим c из системы

$$\begin{cases} У' = Ce^ч \\ У = Ce^x \end{cases}$$

Получим $У' = У$ –это и есть искомое дифференциальное равнение.

Примеры: составить дифференциальные равнения.

1. $y^2 + cx = x^3$;
2. $y = \sin x + c$;
3. $Cy = \sin Cx$;
4. Составить дифференциальное уравнение парабол с осью параллельной оси Oy, и касающейся одновременно прямых $y=0$ и $y=x$.

§2. Поле направлений. Изоклины. Построение интегральных кривых.

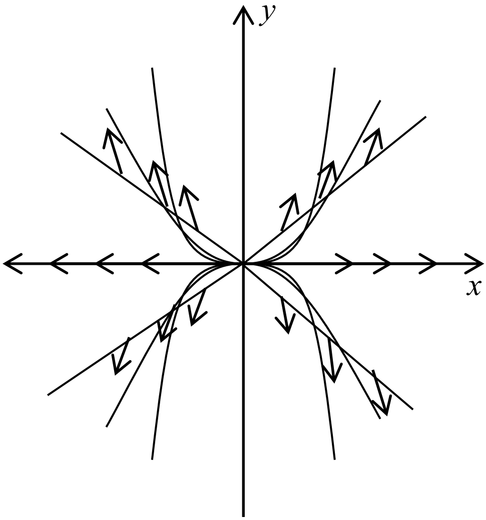
Уравнению $y' = F(x, y)$ (1) можно дать наглядную геометрическую интерпретацию на плоскости *x, y*. Пусть U множество точек *x, y*, где существует функция f и $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1). График решения этого уравнения называется интегральной кривой. Значение y' есть тангенс угла, образуемого касательной к $y = \varphi(x)$ и осью *Ox*. Таким образом каждой точке $x, y \in U$ ставим в соответствие единичный вектор направленный под углом $arctgy'$, вычисленный по формуле (1). Множество единичных векторов образует поле направлений. Геометрическое место точек, в которых касательные сохраняют постоянное направление, называется изоклином. С помощью изоклин легко построить интегральную кривую.

Контрольный пример: с помощью изоклин построить интегральную кривую, $Y' = 2\frac{y}{x}$;

Чтобы найти изоклины приравниваем $Y' = k$. Тогда

$$2\frac{Y}{x} = k; \quad y = \frac{1}{2}kx.$$

Построим графики функций при k=1, 2, 3, и т.д., получим различные изоклины. Строим интегральную кривую.



Примеры.

С помощью изоклин построить интегральные кривые.

1. $Y' = \frac{y}{x}$;

2. $Y' = -\frac{y}{x}; Y' = \frac{y}{x}$

3. $Y' = x^2 + y^2$;

4. $Y' + y = (x - y)^2$;

§3. Уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение с разделяющимися переменными записываются в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0. \quad (1)$$

Чтобы решить это уравнение предварительно разделим его на $N(y)P(x)$

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$$

Переменные разделились. Интегрируя это равенство, получим общий интеграл.

<u>Примечание:</u> при делении на $P(x)N(y)$ можно потерять не достающиеся решения уравнения (1), которые получаются при $P(x)=0\,(2)\,и\quad N(x)=0\,(3)$.

Решая уравнения (2) и (3), найдем корни $x=x_0$ и $y=y_0$. проверим, что эти значения являются решением дифференциального уравнения (1). Подставляя в (1) значения $x=x_0$ и $y=y_0$, получим тождество следовательно, эти значения нужно включить в решение уравнения (1).

Контрольный пример.

Проинтегрировать уравнение $\sqrt{y^2+1}dx=xydy$.

а) $x\neq 0$; разделим уравнение на $\sqrt{y^2+1}x$, получим дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$, переменные разделились. Интегрируя, получим общее решение $\ln|x|c=\sqrt{y^2+1}$

б) $x=0$, подставляя это значение в наш пример, получим тождество $0\equiv 0$, следовательно, $x=0$ является решением.

Ответ: $\ln|x|c=\sqrt{y^2+1}$ и $x=0$.

Примеры.

Решить уравнение методом разделения переменных

1. $2x^2yy' + y^2 = 2$.

2. $z' = 10^{x+z}$

§4. Однородные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения приводимые к однородным.

I. Уравнения вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1) называется однородным, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции m-го измерения.

Функции удовлетворяющие условию $M(tx,ty) = t^m M(x,y)$ (2) называются однородными функциями m-го измерения.

Примечание:

Если $m = 0$, то называются однородными функциями нулевого измерения.

При помощи подстановки $y = ux$, однородное уравнение (1) приводятся к уравнению с разделяющимися переменными, которые легко интегрируются.

Контрольный пример.

Решить дифференциальное уравнение.

1. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$.

Проверим на однородность функции $y + \sqrt{xy}$ и x.

$ty + \sqrt{txty} = t\left(y + \sqrt{xy}\right)$, $tx = t.x$ (здесь $m = 1$), согласно формуле (2) заключаем, что функции однородные первого измерения, следовательно, делаем подстановку $y = ux$ в наш пример, получим $\left(ux + \sqrt{ux^2}\right)dx = x(xdy + udx)$, сокращая на x и приведя подобные имеем $\sqrt{u}du = xdu$.

а) Пусть $u \neq 0,\ x \neq 0$; разделим на $x\sqrt{u}$, тогда $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{\sqrt{u}}$, интегрируя, находим $\ln c|x| = 2\sqrt{u}$, возвращаясь к старым переменным, получим $x\ln c|x| = 2\sqrt{xy}$.

б) $u = 0$; откуда $y' = 0$. Подставляя в наш пример получим тождество, т.е. $y = 0$ – есть решение.

в) $x = 0$; Подставляя в наш пример получим тождество, т.е. x=0 – тоже решение.

$x = 0$, $y = 0$, $x\ln c|x| = 2\sqrt{xy}$.

Ответ: $x\ln c|x| = 2\sqrt{xy}$; $y = 0$.

Примечание:

$x = 0$, мы не пишем в ответ т.к. это значение входит в решение $x\ln c|x| = 2\sqrt{xy}$.

II. Неоднородные дифференциальные уравнения.

Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка можно привести к однородным дифференциальным уравнениям при помощи подстановки $y = z^{\alpha}$, где α – постоянная, которую нужно найти.

Пример.

2. $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$

Это уравнение неоднородное. При помощи подстановки $y = z^{\alpha}$ можно добиться, чтобы уравнение стало однородным. Подставляя это значение получим $z^{\alpha-1}\dfrac{dz}{dx} = y = z^{2\alpha} - \dfrac{2}{x^2}$; чтобы уравнение было однородным, необходимо чтобы выполнялось равенство $\alpha - 1 = 2\alpha = -2$, отсюда $\alpha = -1$ и $y = z^{-1}$.

Подставляя $y = z^{-1}$ в наш пример, получим

$$-z^{-2}\frac{dz}{dx} = z^{-2} - \frac{2}{x^2}; \quad \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{2z^2}{x^2} \text{ (a)}$$

Выражение $1 - \dfrac{2z^2}{x^2}$ – однородная функция нулевого измерения, следовательно, уравнение (a) однородное, которое решается при помощи подстановки $z = ux$.

3. Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$, (3)

а) Пусть $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда (3) приводится к однородному уравнению, если введем новые переменные $x = \xi + x_1$, $y = \eta + y_1$, (4) где x_1 и y_1– корни уравнений

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

заменяя *x* и *y* по формулам (4) в уравнении (3) получим,

$\dfrac{d\eta}{d\xi}=\dfrac{a\xi+b\eta}{a_1\eta+b_1\eta}$ – однородное уравнение.

б) Пусть $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$, откуда $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda$, или $a_1=a\lambda$, $b_1=b\lambda$.

Подставляя эти значения в равнения (3) получим

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_1}\right) \tag{5}$$

Введя подстановку $z=ax+by$ в уравнение (5)

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}=f\left(\frac{z+c}{\lambda z+c}\right)+\frac{a}{b},$$

получим уравнение с разделяющимися переменными.

Примеры.

1. $(x+2y+1)\dfrac{dy}{dx}=2x+4y+3$

2. $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2$

3. $y'=\dfrac{y+2}{x+1}+tg\,\dfrac{y-2x}{x+1}$

4. $xy'=y-xe^{y/x}$

5. $2y+(x^2y+1)xy'=0$

6. $2x^2 y' = y^3 + xy$

7. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$

§5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Общий вид линейного уравнения первого порядка

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y + C(x) = 0 \qquad (1)$$

Чтобы решить уравнение (1), нужно сначала решить соответствующее ему однородное уравнение

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y = 0 \qquad (2)$$

Это уравнение решается методом разделения переменных. Общее решение однородного дифференциального уравнение имеет вид $y = C\varphi(x)$, где С – постоянная.

При решении неоднородного уравнения (1) применим метод вариации постоянных, т.е. считаем, что $C = C(x)$. Тогда решение уравнения (1) ищем в виде $y = C(x)\phi(x)$. (3)

Подставляя это выражение в уравнение (1), найдем $C(x)$. Подставляя найденное значение в формулу (3) найдем общее решение уравнения (1).

Контрольный пример.

$$\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x+\cos^2 x$$

Решаем однородное уравнение $\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x$, получим

$y=\frac{c}{\cos x}$, считая, что $c=c(x)$, т.е. $y=\frac{c(x)}{\cos x}$ (a)

Применяя метод вариации постоянных получим

$\frac{dc(x)}{dx}=\cos^2 x$, $c(x)=x/2+1/4\sin 2x+c_1$, подставляя $c(x)$ в формулу (a), получим общее решение

$$y=\frac{c_1}{\cos x}+\frac{x}{2\cos x}+\frac{1}{2}\sin x$$

Примеры.

1. $\frac{dy}{dx}+y\frac{d\varphi}{dx}=\varphi(x)\frac{dy}{dx}$, где φ – известная функция.
2. $2^{y'}=8^{y+3}$
3. $(xy'-1)\ln x=2y$
4. $(x+y^2)dy=ydx$
5. $(2x+1)y'=4x+2y$
6. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$

§6 Уравнение Бернулли и Риккати.

1. Уравнение Бернулли - $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ (1), где $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Подстановка $z = y^{1-n}$ приводит уравнение (1) к линейному уравнению, при $n > 0$, мы имеем ещё решение *y=0*.

2. Уравнение Риккати – $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ (2)

уравнение в общем виде в квадратурах не берётся. Если известно частое решение y_1 уравнения Реккати, тогда подстановка $y = z + y_1$, приводит к уравнению Бернулли.

Контрольный пример.

Решить уравнение Бернулли.

$xy' + y = xy^2 \ln x$

Разделим на $y^2 x$, получим $y^{-2}y' + 1/x\, y^{-1} = \ln x$, обозначим $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$, подставляя в последнее выражение, получим $z' - 1/x\, z = -\ln x$.

Решая линейное уравнение

$$z' - \frac{1}{xz} = 0,\ \frac{dz}{dx} = \frac{dx}{x},\ z = cx,\ z = c(x)x$$

$$z' = c'(x)x = c(x),\ \ c'(x) + c(x) - c(x) = -\ln x$$

$$c(x) = -\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$z(x) = c_1 x - \frac{x\ln^2 x}{2},\ \ \frac{1}{y} = \left(c_1 - 1/2\ln^2 x\right)x$$

т.к. $n=2>0$, то решением является $y=0$.

Ответ: $xy\left(c_1-1/2\ln^2 x\right)=1$, $y=0$.

Пример 2. Решить уравнение Риккати.

$x^2y'+xy+x^2y^2=4$.

$y'+1/x\,y+y^2=4/x^2$.

Частное решение ищем в виде многочлена первой степени

$y_1=a_0+a_1/x$

подставляя в уравнение Риккати, получим

$$-\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^4}+a_0^2+2a_0\frac{a_1}{x}+\frac{a_1^2}{x^2}=\frac{4}{x^2};$$

откуда $a_0^2=0$, т.е. $a_0=0$, $a_1^2=4$, $a_1=\pm 2$.

Возьмем $a_1=2$.

Значит частное решение $y_1=2/x$.

Подстановка $y=z+2/x$, дает

$$z'-\frac{2}{x^2}+\frac{z}{x}+\frac{2}{x^2}+z^2+4\frac{z}{x}+\frac{4}{x^2}=\frac{4}{x^2}$$

$z'+\dfrac{5z}{x}+z^2=0$, получили уравнение Бернулли,

$$-z^{-2}z'-\frac{5}{x}z^{-1}=1,\ u=z^{-1},$$

$$u'-\frac{5}{x}u=1,\ \frac{du}{u}=\frac{5}{x}dx,\ u=cx^5,\ \ c'x^5+5cx^4-5cx^4=1,$$

$c' = x^{-5}$, $c = \dfrac{x^{-4}}{-4} + c_1$.

$u = c_1 x^5 - \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{z}$, $c_1 x^5 - \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{y - 2/x}$

Ответ: $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{c_1 x^5 - x}$.

Примеры:

1. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$;
2. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$;
3. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$;
4. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.

§7. Уравнение в полных дифференциалах.

Для того, чтобы уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (1) было в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

Тогда существует такая функция $U(x, y)$, что $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU = 0$ и, следовательно $U(x, y) = c -$ является решением уравнения (1).

Контрольный пример.

Решить уравнение $(2x + 3y + 1)dx + 3xdy = 0$.

Здесь $M = 2x + 3y + 1$, а $N = 3x$. Условие (2) выполняется.

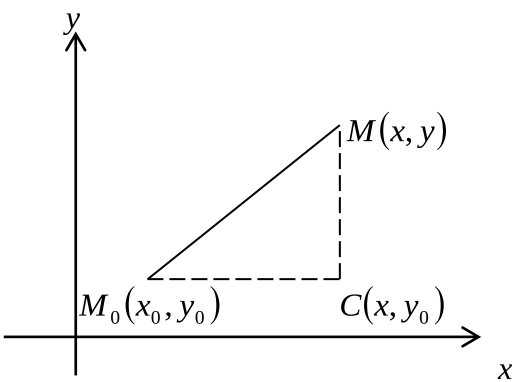
$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$, следовательно существует функция $U(x, y)$,

такая, что $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y + 1$, найдём

$$u(x, y) = \int (2x + 3y + 1)dx = x^2 + 3xy + x + \varphi(y),$$

дифференцируя по y, получим $3x + \varphi(y) = 3x$, $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = c$, подставляя $\varphi(y)$, получим $u(x, y) = x^2 + 3xy + x + c$, или $x^2 + 3xy + x = c$.

Этот пример можно решить с помощью криволинейного интеграла, т.к. этот интеграл не зависит от пути интегрирования, а только от начальной $M_0(x_0, y_0)$ и конечной точки $M(x, y)$, поэтому за путь интегрирования возьмем ломанные $MC+CM$ параллельные осям координат.



$$\int_{M_0}^{M}(2x+3y+1)dx+3xdy=\int_{M_0}^{C}(2x+3y+1)dx+\int_{C}^{M_0}3xdy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}2x+3y+1dx+\int_{y_0}^{y}3xdy==x^2+3xy_0+x\Big|_{x_0}^{x}+3xy\Big|_{y_0}^{y}=$$

$$=x^2+3xy_0+x-x_0^2-3x_0y_0-x_0+3xy-3xy_0$$

$x^2+3xy+x=c$, члены содержащие индекс 0 внесли в постоянное C.

Примеры.

Проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах и решить их двумя способами.

1. $2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0$
2. $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0$
3. $3x^2(1+\ln x)dx=\left(2y-x^3/y\right)dy$
4. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y}dy=0$

Примечание.

Если уравнение не в полных дифференциалах, то можно найти такую функцию $\mu(x,y)$, что умножая её на уравнение (1) превращает это уравнение, в уравнение в полных дифференциалах, т.е.

$$\mu(x,y)\cdot[M(x,y)dx+N(x,y)dy]=$$
$$=\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

μ находится из уравнения

$$N(x,y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (3)$$

Решение этого уравнения не проще, чем исходное уравнение (1). Если $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$ или $\mu(xy)$, $\mu(x^2 \pm y^2)$, т.е. μ зависит от одного аргумента, но в любых комбинациях x и y, то уравнение (3) можно решить.

Контрольный пример.

Найти интегрирующий множитель $\mu(x)$ если известно, что μ зависит только от x и решить уравнение $(x^2 + y)dx - xdy = 0$.

Из формулы (3) найдем $\mu(x)$.

$-x\dfrac{d\ln\mu}{dx} = 2$, $\mu = \dfrac{1}{x^2}$; умножая наше уравнение на $\dfrac{1}{x^2}$,

получим $\left(1 + \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \dfrac{1}{x}dy = 0$.

Это уравнение в полных дифференциалах, решаем его

$$\int_{x_0}^{x} 1 + \frac{y}{x^2}\Big|_{y=y_0} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{x}\Big|_{x=x_0} dy = x - \frac{y_0}{x}\Big|_{x_0}^{x} \frac{y}{x}\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= x - \frac{y_0}{x} - x_0 + \frac{y_0}{x_0} - \frac{y}{x} + \frac{y_0}{x};$$

Ответ: $x - \dfrac{y}{x} = c$.

Примеры.

Найти интегралы следующих уравнений.

5. $\left(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3\right)dx+\left(y^2+xy^2+2xy-x^3\right)dy=0$,

если известно, что $\mu=\mu(x+y)$ или $\mu=\mu(xy)$.

6. $\left(x^2+y^2+1\right)dx+2xydy=0$

если известно, что $\mu=\mu\left(x^2\pm y^2\right)$.

§8. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\ (1),$$

где

1. Функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике

$$x_0-a\le x\le x_0+h,$$

$$y_0-b\le y\le y_0+b,$$

следовательно, функция $f(x,y)$ ограничена $|f(x,y)|\le M$.

2. Функция $f(x,y)$ удовлетворяет относительно y условию Липшица: т.е существует такое постоянное N, что для любого значения x, $|x-x_0|\le a$, и любых значениях y' и y'' принадлежащих интервалам $y_0-b\le y'\le y_0+b$ и $y_0-b\le y''\le y_0+b$ выполняется неравенство

$$|f(x,y'')-f(x,y')|\le N|y''-y'|.$$

При этих предположениях существует единственное решение дифференциального уравнения (1) $y = \varphi(x)$, определенное и непрерывное по x в интервале $(x_0 - h,\ x_0 + h)$, принимающие при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0)$. (Задача Коши).

Теорема доказывается методом последовательного приближения (метод Пикара). Для доказательства в начале дифференциальное уравнение (1) приводят к интегральному уравнению $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)dy$, затем за нулевое приближение принимают $y = y_0$, за n –ое приближение

$$y_n = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx .$$

Контрольный пример.

С помощью метода последовательных приближений решить дифференциальное уравнение $y' = x^2 + y^2$, при $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le y$.

§9. Особые точки дифференциального уравнения.

Если функция $f(x,y)$ неограниченна в окрестности точки $x_0 y_0$, а предел функции в этой точке при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ может быть равным любому числу, то такая точка называется особой.

Например, для функции $f(x,y)=\dfrac{ax+by}{cx+dy}$, где $\begin{vmatrix} a & b \\ c & \mathrm{d} \end{vmatrix} \neq 0$

Свойство единственности в точке *x=0, y=0* нарушено.

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} c-\lambda, & a \\ d, & \mathrm{b}-\lambda \end{vmatrix} = 0$, (2)

и исследуем решение уравнения (1) при различных значениях корней характеристического уравнения (2).

1. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Тогда поведение интегральных кривых вблизи точки 0,0 имеет вид см. рис. 1.

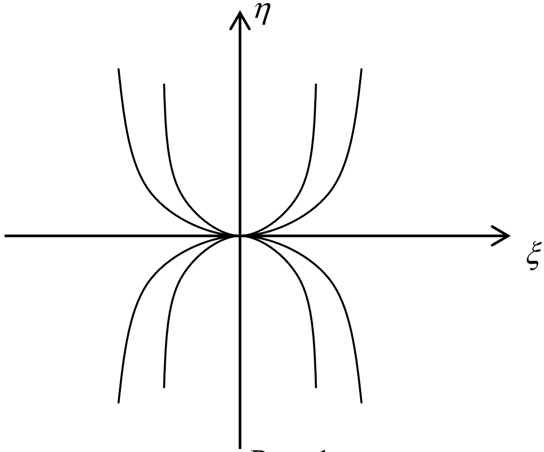


Рис. 1.

2. Корни характеристического уравнения (1) удовлетворяют неравенству $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. В этом случае см. рис. 2. особая точка называется седлом.

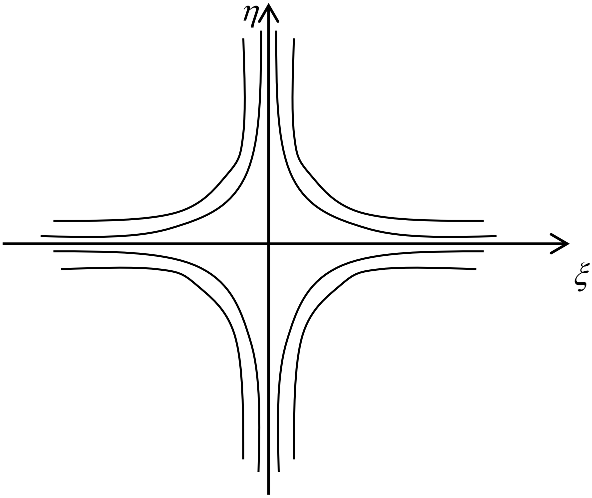


Рис.2.

3. Корни характеристического уравнения комплексные $\lambda_{1,2} = p + qi$. В этом случае см. рис. 3 особая точка называется фокусом.

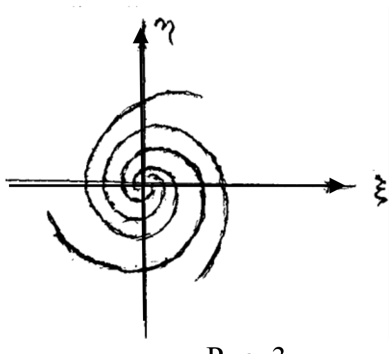


Рис. 3.

4. Корни характеристического уравнения мнимые $\lambda_{1,2} = \pm qi$.

В этом случае см. рис. 4 особая точка называется центром.

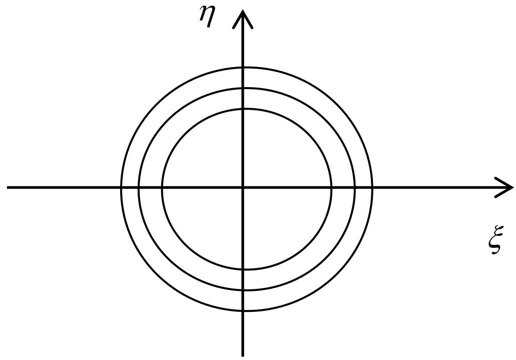


Рис.4.

5. $\lambda_1 = \lambda_2$ и $(b-c) \vee a \vee d \neq 0$

В этом случае см. рис. 5 особая точка называется вырожденным узлом.

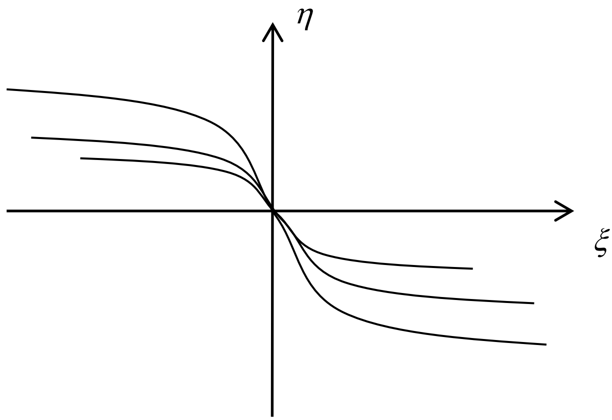
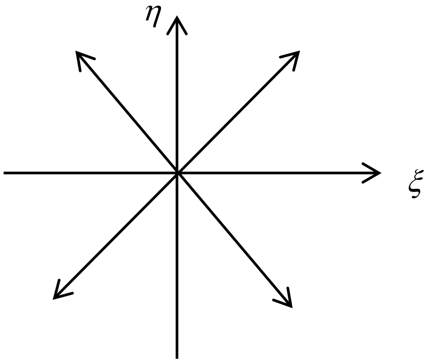


Рис.5.

6. $\lambda_1 = \lambda_2$, $a = b = 0$ и $a = b \neq 0$.

В этом случае см. рис.6 особая точка называется дикритическим узлом.



Эти результаты запишем в таблицу.

Дано $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$, где $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Таблица.

Δ – дискриминант характеристического уравнения (2).

дискриминант	корни	условие	наименование особых точек
$\Delta > 0$	$\lambda_1,\ \lambda_2$	$sign(\lambda_1, \lambda_2) = 1$	узел
	$\lambda_1,\ \lambda_2$	$sign(\lambda_1, \lambda_2) = -1$	седло
$\Delta < 0$	$p \pm qi$	$p \neq 0$	фокус
	$\pm qi$	$p \neq 0$	центр
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$(b-c) \vee a \vee d \neq 0$	вырожденный узел
		$b=a,\ c=d=0$	дикритический узел

Пример.

1. Исследовать особую точку x=0, y=0. $y' = \dfrac{2x+y}{3x+4y}$.

Запишем характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix} 3-\lambda, & 2 \\ 4, & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $-5-4\lambda+\lambda^2=0$, $(\lambda-5)(\lambda+1)=0$

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$;

Согласно таблице – это седло.

Примечание:

Для исследования особых точек в более общем случае

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad (3)$$

Необходимо перенести начало координат в исследуемую особую точку и разложить функции P и Q в окрестность этой точки в ряд Тейлора, ограничиваясь линейными членами, т.е. сводим к уравнению (1).

2. Найти и исследовать поведение кривых в особых точках

$$y' = \frac{2y}{x^2+y^2-1} \qquad (2)$$

Составим систему $\begin{cases} 2y = 0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$

решая её, получим x=1, y=0; x=–1, y=0.

1) Исследуем поведение интегральных кривых в точке x=–1, y=0;

Разложив в ряд Тейлора функцию $Q(x,y) = x^2 - y^2 - 1$ по степеням $x+1$, получим $x^2 - y^2 - 1 = -2(x+1) + (x+1)^2 + y^2$;

Подставим полученное выражение в (2)

$$y' = \frac{2y}{-2(x+1) + (x+1)^2 + y^2}$$

т.к. исследуем в точке (-1, 0), то квадратными членами можно пренебречь в результате чего получим $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{-x-1}$, заменяя x на $x-1$, получим $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{-x}$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Корни которого $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Согласно таблице – это седло.

2) Исследуем точку (1, 0). Разложим в ряд Тейлора $x^2 - y^2 - 1$

$x^2 - y^2 - 1 = -2(x+1) + (x+1)^2 + y^2$; Тогда уравнение (2) можно записать

$$y' = \frac{2y}{-2(x+1) + (x+1)^2 + y^2}.$$

Исследования проводим в точке (1,0), то квадратами членов можно пренебречь.

Получим $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-1}$. Произведя замену $x=x+1$, получим $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, так как $b=c$, $a=d=0$, согласно таблице – дикритический узел.

Ответ: точка (1,0) – дикритический узел, а точка (-1,0) – седло.

Примеры.

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-e^y}{\ln\left(2-y^2\right)}$;
2. $y'=\frac{x-4y}{2y-3x}$;
3. $y'=\frac{4x-y}{3x-2y}$;
4. $y'=\frac{2y-x}{3x+6}$;
5. $\frac{dy}{dx}=\frac{arctg\left(x^2+xy\right)}{\sqrt{x^2-y+2}-2}$;
6. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy-2}{(2x-y)(x-2)}$;
7. $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln\left(1-x+x^2\right)-\ln 3}{x^2-y}$;
8. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{y^{2-x}}-e}{\sqrt{(x-y)^2+3}-2}$;

§10. Задача о траекториях.

1. Пусть дано семейство кривых $F(x,y,\alpha)=0$ (1) заданных на плоскости, зависящее от одного параметра. Кривая в каждой своей точке пересекает кривую под постоянным углом α семейства (1) называется изогональной траекторией этого семейства. (Если $\alpha=\pi/2$, то кривая называется ортогональной траекторией).

Считаем, что заданно семейство кривых (1) и нужно построить изогональные траектории (см. рис.1.)

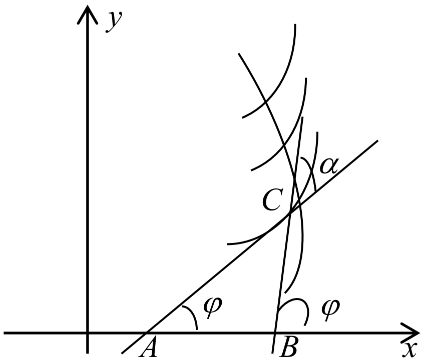


рис.1.

Из треугольника *ABC* следует $\varphi_1 - \varphi = \alpha$. Координаты траектории обозначим $x_1 y_1$, и $\alpha \le \pi/2$. Тогда $tg(\varphi_1 - \varphi) = tg\alpha$.

$$\frac{tg\varphi_1 - tg\varphi}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi} = k,$$

$$\frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy}{dx}} = k \qquad (2)$$

Возьмем производную по *x* в формуле (1) $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$,

найдем $\frac{dy}{dx}$ и подставим в формулу (2).

$$\frac{\frac{dy_1}{dx_1} \frac{\partial F(x_1 y_1 a)}{\partial y_1} + \frac{\partial F(x_1 y_1 a)}{\partial x_1}}{\frac{\partial F(x_1 y_1 a)}{\partial y_1} - \frac{\partial F(x_1 y_1 a)}{\partial x_1} \frac{dy_1}{dx_1}} = k \qquad (3)$$

Исключая a из двух уравнений, получим дифференциальное уравнение изогональной траекторий.

2. Семейство кривых заданно дифференциальным уравнением $\psi\left(x_1 y_1, \frac{dy_1}{dx_1}\right)=0$ (б), то исключая $\frac{dy}{dx}$ из уравнений (б) и (2), поучим дифференциальное уравнение изогональных траекторий.

$$\psi\left(x, y, \frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{k\frac{dy_1}{dx_1+1}}\right)=0 \qquad (7)$$

В случае ортогональности траектории, $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dx_1}=-1$, получим

$$\psi\left(x, y, \frac{1}{-\frac{dy_1}{dx_1}}\right)=0 \qquad (8)$$

Контрольный пример.

Найти силовые линии поля, создаваемого силами, имеющими потенциал.

$$U=\frac{y}{x^2}$$

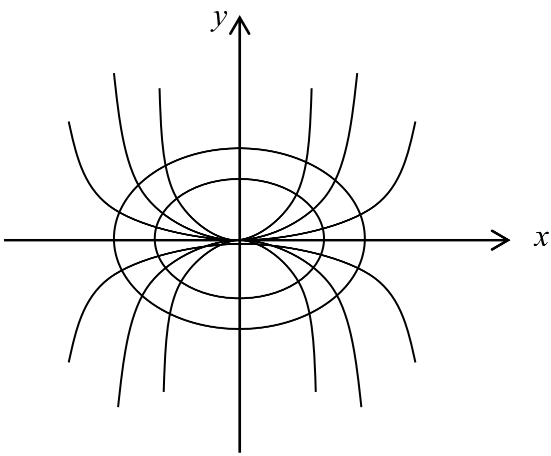
Известно, что силовые линии поля и потенциальные силы ортогональны.

Найдем уравнение силовых линий поля, согласно формуле (4) и нашего примера.

$$F(x,y,U) = y - Ux^2 = 0, \qquad 1 - 2xU \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad U = \frac{y}{x^2}.$$

$1 + 2\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий. Решая это уравнение, получим $2ydy = -xdx \quad y^2 + \frac{x^2}{2}c$. Построим графики этих двух силовых полей.



Примеры.

1. Найти изогональные (под углом α; $tg\alpha = k$) траектории семейства кругов.

2. Составить дифференциальные уравнения траекторий, пересекающих линии данного семейства под данным углом φ:

а) $x^2 = y + Cx$, $\varphi = 90^0$;

б) $y = kx$, $\varphi = 60^0$;

в) $3x^2 + y^2 = C$, $\varphi = 30^0$.

§11. Уравнение, не содержащие явно одного переменного.

Рассмотрим различные варианты дифференциального уравнения $F(x, y, p) = 0$, где $p = y'$.

1. Уравнения (1) имеет вид $F(p) = 0$ (2).

Пусть $p = k$ – есть корень уравнения (2), тогда $p = \dfrac{dy}{dx} = k$, $y = kx + c$, найдем $k = \dfrac{y - c}{x}$ и подставим в уравнение (2), получим решение этого уравнения в виде $F\left(\dfrac{y - c}{x}\right) = 0$.

2. $F(x, p) = 0$ (3), если в уравнении (3) $F_p(P) \neq 0$, то в окрестности точки x_0 можно разрешить это уравнение относительно p.

$p = f(x)$. Интегрируя, получим $y = \int f_1(x)dx + C$, $y = \int f_2(x)dx + C$, и дт.

а) Пусть $x = f(p)$, тогда $y = \int pdx = \int pf(p)dp + c$ и решение уравнения (3) примет вид

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int pf(p)dp + c \end{cases}$$

т.е x и y – выражены через параметр p.

б) Пусть $x = \varphi(t)$, $p = \chi(t)$ т.е. мы можем x и p выразить только через параметр t.

3. $F(y, p) = 0$, решается аналогично пункту 2.

Контрольный пример.

Решить уравнение. $x^3 + p^3 - 3xp = 0$.

Чтобы получить параметрические выражения для p и x, положим $p = tx$, тогда

$$x = \frac{3t}{1+t^2}, \quad p = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

найдем

$$dx = \frac{3\left[\left(1+t^3\right) - 3t^3\right]}{\left(1+t^3\right)^2}dt = \frac{3\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}dt.$$

Известно, что

$$y = \int pdx = \int \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{3\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}dt = 3\int \frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^3}dt^3 + C.$$

Вводя переменные $u = 1 + t^3$; и

$$y = -\frac{9}{2\left(1+t^3\right)^2} + \frac{6}{\left(1-t^3\right)} + C,$$

Ответ:

$$x = \frac{3t}{1+t^3}$$

$$y = -\frac{9}{2\left(1+t^3\right)^2} + \frac{6}{1+t^3} + C.$$

4. Пусть данное уравнение $F(x, y, p) = 0$, (1) если рассматривать *x*, *y*, *p* – как декартовы координаты, то уравнение (1) определяет некоторую поверхность. Поверхность можно выразить как функцию двух параметров *u* и *v*, т.е $x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ p = \chi(u,v)$; (4) тогда уравнение (1) эквивалентно системе (4), и

$$dy = pdx = \chi(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial\psi}{du}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv$$

принимая u и v за независимые переменные, это уравнение запишем в виде

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial u} - \chi(u,v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}dv}{\chi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial\psi}{\partial v}} \qquad (5)$$

решением уравнения (5) будет функция $v = \omega(u,c)$. Подставляя эту функцию в формулу (4), получим решение уравнения (1) в параметрической форме

$$x = \varphi(u, \omega(u,c)), \quad y = \psi(u, \omega(u,c)).$$

Рассмотрим уравнение $y = f(x, p)$, (6). Дифференцируя его, получим

$$dy = pdx = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{dp}dp, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = p.$$

Найдем $p = \varphi(x, c)$. Внося это выражение в формулу (6), получим общее решение уравнения (6).

$$y = f\left[x, \varphi(x, c)\right].$$

5. Частный вид уравнения (1) являет уравнения Лагранжа.

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \tag{7}$$

решение выражается через параметр *p*.

дифференцируя уравнение (7) по *x*, получим

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}, \tag{2}$$

это уравнение линейное, если за параметр *p* примем независимое переменное, а *x*, как функцию от *p*.

$$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} - x\varphi'(p) = \psi'(p) \tag{8}$$

а) Пусть $\varphi(p) \neq p$, тогда

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

Решая это уравнение, получим $x = C\omega(p) + \chi(p)$.

Тогда общее решение уравнения (7) запишется в виде системы функции *x* и *y* от *p*.

$$\begin{cases} x = C\omega(p) + \chi(p) \\ y = [C\omega(p) + \chi(p)]\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

б) $\varphi(p) - p = 0$. Пусть это равенство выполняется для некоторого значения $p = p_0$. Это значение тоже является решением уравнения (8).

Подставляя $p = p_0$ в формулу (7) получаем другое решение уравнения Лагранжа

$$y = \varphi(p_0)x + \psi(p_0).$$

в) $\varphi(p) \equiv 0$. Тогда уравнение (7) переходит в уравнение Клеро.

$$y = px + \varphi(p) \tag{9}$$

Уравнение Клеро имеет общее решение $y = cx + \varphi(p)$ – это семейство прямых линий и особое решение $y = x\omega(x) + \varphi[\omega(x)]$, которое является огибающей семейства прямых.

Примеры.

Решить следующие дифференциальные уравнения методом введения параметра.

1. $x = y'^3 + y'$;
2. $y'^4 - y'^2 = y^2$;
3. $y' = e^{xy'/y}$;
4. $x^{y'} = y'^x$;
5. $y = xy' - y^2$;
6. $yy' = 2xy'^2 + 1$.
7. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной между осями равна a.

Глава II. Дифференциальные уравнения высших порядков.

§1. Общее положение

Определение: Соотношение связывающее независимое переменное, искомую функцию, производную от искомой функции, вторую производную от искомой функции и т.д. производную n-го порядка от искомой функции называется дифференциальным уравнением высших порядков. Математическая запись дифференциального уравнения n-го порядка

$$F\left(x, y, y' \ldots y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

где F – является непрерывной функцией относительно всех переменных.

Или разрешенное относительно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right), \tag{2}$$

Определение:

Любая функция $y = \varphi(x)$, которая непрерывна и имеет непрерывные производные до n порядка и обращающая уравнение (1) и (2) в тождество называется решением дифференциального уравнения. Общее решение уравнения содержит в себе n произвольных постоянных.

Общее решение дифференциального уравнения (1) часто называют общим интегралом уравнения (1).

Пусть мы имеем соотношение:

$$\psi\left(x, y, y', \ldots, y^{(k)}, c_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots c_n\right) = 0 \qquad (3)$$

в которое входит производная k-го порядка включительно и n-k произвольных постоянных.

Дифференцируя это уравнение n-k раз по k, считая y функцией от x, получим систему.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y} y' + \ldots + \dfrac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^{(n-k)}\psi}{\partial x^{(n-k)}} + \dfrac{\partial^{n-k}\psi}{\partial y} y' + \ldots + \dfrac{\partial^{n-k}\psi}{\partial y^{(k)}} y^{(n)} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Если в результате исключения n-k+1уравнений (4) и (3) n-k постоянных $c_{K+1}, c_{k+2}, c_{k+3}, c_n$ мы получим уравнение (1), то соотношение (3) называется промежуточным интегралом уравнения (1).

<u>Примечание:</u>

1)Если уравнение (3) имеет вид

$$\psi\left(x, y, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n\right) = 0 \qquad (5),$$

то оно называется общим интегралом уравнения (1);

2) Если уравнение (3) имеет вид

$$\psi\left(x, y, y', \ldots, y^{n-1}, c\right) = 0 \qquad (6),$$

то его называют первым интегралом уравнения (1);

3) Промежуточный интеграл, если в нем считать y – искомой функцией, сам является дифференциальным уравнением k-го порядка.

§2. Типы дифференциальных уравнений n-го порядка

Пусть дано уравнение $F\left(x, y, y' \ldots y^{(n)}\right) = 0$, (1) рассмотрим различные варианты этого уравнения.

1. $y^{(n)} = f(x)$

Общее решение представляется формулой

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x) dx + c_1 (x - x_0)^{n-1} + c_2 (x - x_0)^{n-2} + \ldots + c_n$$

или

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int d(x - z)^{n-1} f(z) dz + c_1 (x - x_0)^{n-1} + \ldots + c_n$$

2. $F\left(y^{(n)}, x\right) = 0$

Пусть это уравнение разрешается параметрически $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$, тогда $y^{n-1} = \int y^n dx + c_1 = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1$ и можем последовательно дойти до y, которое дает нам решение.

3. $F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}\right) = 0$.

а) обозначим $y^{(n-1)} = z$, тогда получим $F(z', z) = 0$ дифференциальное уравнение первого порядка, которое легко решается, после этого нужно перейти к старым переменным и мы приходим к пункту 1.

б) Пусть $y^{(n)} = \varphi(t)$, $y^{(n-1)} = \psi(t)$, тогда $dy^{(n)-1} = y^{(n)}dx$

$$x = \int \frac{dy^{n-1}}{y^{(n)}} + c_1 = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt + c_1 ,$$

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int \psi(t) \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt + c_2$$

и т.д. получим общее решение.

4. $F\left(y^{(n)}, y^{(n-2)}\right) = 0$.

а) $y^{(n-2)} = z$, $F(z'', z) = 0$. Пусть $z'' = f(z)$, умножая на z' последнее выражение получим $z'z'' = z'f(z)$, $dz'^2 = 2f(z)dz$, $z' = \sqrt{\int 2f(z)dz + c_1}$, а это дифференциальное уравнение первого порядка.

§ 3. Уравнения допускающие понижение порядка.

Дано уравнение $F(x, y.y', ..., y^{(n)}) = 0$, (1)

1. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (2)$$

полагая $z = y^{(k)}$, заменим уравнение (2) на уравнение $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0$, т.е. понизили порядок на k единиц.

2. $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$**,** (3) в уравнение не входит явно x.

Делаем подстановку $p = \frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)p=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$

и т.д. подставляя эти выражения в уравнение (3)

$\varPhi\left(y,p,\frac{dp}{dy},...,\frac{d^{n-1}p}{dy^{k-1}}\right)=0$. Порядок уравнения понизился на единицу.

3. Уравнение имеет вид $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$, где F - однородная функция относительно переменных $y,y',...,y^{(n)}$.

Подстановкой $y=e^{\int zdx}$, можно понизить порядок уравнения на единицу.

4. Пусть $F(x,y,dx,dy,...,d^ny)=0$, (4) есть однородная функция относительно всех аргументов, тогда подстановка $x=e^x$, $y=ue^x$ приводит к уравнению

$\varPhi(1,u,dx,du+udx,d^2u+dudx,...,d^nu+...)=0$, в которое x явно не входит.

Этот тип уравнений рассматривался в п.2.

5. Пусть в уравнении (4) функция F - есть однородная функция относительно всех аргументов, если считать что x и dx первого измерения, а $y,dy,d^2y,...,d^ny$ - m-го измерения, тогда постановка $x=e^{x}, y=ue^{m_x}$ приводит к уравнению рассмотренном в п.4.

6. Если левая часть уравнения (1) является полной производной по x, т.е. выполняется равенство

$F(x,y,y',...,y^{(n)})=\dfrac{d}{dx}\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)})=0$, то сразу получаем первый интеграл $\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)})=c$, и порядок уравнения понизился на единицу.

Контрольный пример.

Решить дифференциальное уравнение

$$5y'''^{2}-3y''y'^{v}=0.$$

Обозначим $y''=z$, получим $5z^{2}-3zz''=0$. В этом уравнении отсутствует независимое переменное, поэтому делаем подстановку $z'=p$, тогда

$z''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dz}\dfrac{dz}{dx}=p\dfrac{dp}{dz}$, подставляя эти значения в уравнение, получим

$$5p-3zp\frac{dp}{dz}=0.$$

1) $p\neq 0$, сокращаем на p, получаем линейное дифференциальное уравнение

$$5p^{2}-3z\frac{dp}{dz}=0.$$

Решаем уравнение методом разделения переменных, считая $z \neq 0, 3\dfrac{dp}{p} = 5\dfrac{dz}{z}$, $p^3 = c_1 z^5 = z^{13}$, получили уравнение первого порядка, откуда $z' = c_1 z^{\frac{5}{3}}$, разделяя переменные, получим

$$\frac{dz}{z^{\frac{5}{3}}} = c_1 dx; -\frac{3}{2} z^{-2/3} = c_1 x + c_2; z = \frac{1}{(c_1 x + c_2)^{3/2}} = y''$$

$$y' = \int \frac{dx}{(c_1 x + c_2)^{3/2}} + c_3 = \frac{1}{2c_1\sqrt{c_1 x + c_2}} + c_3 = \frac{1}{\sqrt{(c_1 x + c_2)}} + c_3$$

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{(c_1 x + c_2)}} + c_3 x + c_4 = \sqrt{c_1 x + c_2} + c_3 x + c_4 . \qquad (8)$$

2) $p = 0$, тогда $z = y'' = 0$; откуда решение $y = c_1 x + c_2$ – входит в (8).

Ответ:

$$y = \sqrt{c_1 x + c_2} + c_3 x + c_4 .$$

Примеры:

Решить дифференциальные уравнения.

1. $y''' = y''^2$;
2. $yy''' + 3y'y'' = 0$;
3. $y''^3 + xy'' = 2y'$;
4. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$;
5. $yy' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$;
6. $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$;
7. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$;
8. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}$;

Найти решения, удовлетворяющие начальным условиям.

9. $yy'' = 2xy'^2;\ y(2) = 2,\ y'(2) = 0{,}5;$

10. $2y''' - 3y'^2 = 0;\ y(0) = -3,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1;$

11. $y''' = 3yy';\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 4{,}5;$

12. $y''\cos y + y'^2 \sin y = y';\ y(-1) = \dfrac{\pi}{6},\ y'(-1) = 2.$

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения n – го порядка.

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения n – го порядка.

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение n – го порядка

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0; \qquad (1)$$

где $L[y]$-линейный дифференциальный оператор, $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$-непрерывные функции в промежутке $x[a,b]$.

Свойства линейного оператора:

1) Если $L[y]$ и $L[z]$ – два линейных оператора, то $L[y+z] = L[y] + L[z]$ (а)

2) $L[cy] = cL[y]$ (б), где c – постоянная.

На основании этих свойств оператора заключаем, что если известны частные решения уравнения (1)

$y_1(x)б, y_2(x),..., y_n(x)$, то и

$$y = c_1 y_1(x), c_2 y_2(x),..., c_n y_n(x), \qquad (3)$$

тоже является решением этого же уравнения, где $c_1, c_2,..., c_n$ - постоянные.

<u>Определение:</u>

Если частные решения уравнения (1) $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейно независимы, то они образуют фундаментальную систему решений, а решение выраженное формулой (3) называется общим решением.

Определитель составленный из любых функций $y_1, y_2,..., y_n$ и их производных

$$W[y_1, y_2,..., y_n] = W[x] = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, \dots, & y_n \\ y_1', & y_2', \dots, & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)},..., & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского.

Теорема 1.

Если решения уравнения (1) $y_1, y_2,..., y_n$ линейно независимы в промежутке $[a, b]$. То определитель Вронского W[$y_1, y_2,..., y_n$] не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого промежутка.

Теорема 2.

Определитель Вронского, для системы n решений уравнения (1) или тождественно равен нулю или не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $[a, b]$.

Поставим такую задачу:

Пусть даны линейно-независимые частные решения $y_1, y_2, ..., y_n$ некоторого линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка; построим соответствующее ему дифференциальное уравнение. Составим определитель и приравняем его нулю.

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, \dots, & y_n, y \\ y_1', & y_2', \dots, & y_n', y' \\ y_1'', & y_2'', \dots, & y_n'', y'' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, \dots, & y_n^{(n)}, y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Полученное выражение является линейным однородным дифференциальным уравнением n – го порядка.

2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n – го порядка.

Такое уравнение имеет вид:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x); \qquad (6)$$

Пусть правая часть уравнения (6) имеет вид:

$$L[y] = U(x) + V(x)$$

и известно, что частное решение y_1 удовлетворяет уравнению $L[y_1]=U(x)$, а y_2 - уравнению $L[y_2]=V(x)$, тогда $y=Y_1+Y_2$ удовлетворяет уравнению $L[y_1+y_2]=U(x)+V(x)$.

Частное решение неоднородного уравнения находят методом вариации постоянных.

Для этого, вначале находим общее решение соответствующему линейному однородному уравнению и считаем, что $c_1, c_2, ..., c_n$ - являются функциями от x. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1 \dfrac{dc_1}{dx} + y_2 \dfrac{dc_2}{dx} + ... + y_n \dfrac{dc_n}{dx} = 0, \\ y_1' \dfrac{dc_1}{dx} + y_2' \dfrac{dc_2}{dx} + ... + y_n' \dfrac{dc_n}{dx} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-2)} \dfrac{dc_1}{dx} + y_2^{(n-2)} \dfrac{dc_2}{dx} + ... + y_n^{(n-2)} \dfrac{dc_n}{dx} = 0, \\ y_1^{(n-1)} \dfrac{dc_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \dfrac{dc_2}{dx} + ... + y_n^{(n-1)} \dfrac{dc_n}{dx} = f(x). \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет единственное решение

$$\frac{dc_1}{dx} = \varphi_1(x); \frac{dc_2}{dx} = \varphi_2(x); ..., \frac{dc_n}{dx} = \varphi_n(x);$$

интегрируя, получим

$$c_1 = \int \varphi_1(x)dx + \bar{c}_1; c_2 = \int \varphi_2(x)dx + \bar{c}_2; ... c_n = \int \varphi_n(x)dx + \bar{c}_n;$$

где $\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n$ - постоянные числа.

Подставляя эти значения в общее решение однородного уравнения, получим общее решение неоднородного уравнения (6).

Пример 1. Пусть дана фундаментальная система решений $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка. Найти это уравнение.

Составим определитель и приравняем его к нулю

$$\begin{vmatrix} e^x, e^{-x}, y \\ e^x, -e^{-x}, y' \\ y^x, e^{-x}, y'' \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель получаем – дифференциальное уравнение второго порядка $y'' - y = 0$.

Пример 2.

Зная фундаментальную систему решений e^x, e^{-x} линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - y = e^{2x}$. Найти общее решение.

Запишем общее решение однородного уравнения

$$y'' - y = 0, y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} e^x \dfrac{dc_1}{dx} + e^{-x} \dfrac{dc_2}{dx} = 0 \\ e^x \dfrac{dc_1}{dx} + e^{-x} \dfrac{dc_2}{dx} = e^{2x} \end{cases}$$

решая систему, получим

$$2e^{x}\frac{dc_1}{dx}=e^{2x},\ \frac{dc_1}{dx}=\frac{1}{2}e^{x},\ c_1=\frac{1}{2}e^{x}+\bar{c}_1;$$

$$2e^{-x}\frac{dc_2}{dx}=-e^{2x},\ \frac{dc_2}{dx}=\frac{1}{2}e^{3x},\ c_2=\frac{1}{2}e^{3x}+\bar{c}_2;$$

подставляя c_1 и c_2 в общее решение однородного уравнения, получим общее решение нашего неоднородного уравнения

$$y=\bar{c}_1e^{x}+\bar{c}_2e^{-x}+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{6}e^{2x}=\bar{c}_1e^{x}+\bar{c}_2e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}.$$

Примеры:

Решить уравнение методом вариации постоянных.

1. $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}$;
2. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$;
3. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$;
4. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^{x}+1}$;
5. $y''+4y=2tgx$;
6. $y''+y'=2\sec^{3}x$

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами n – го порядка.

1. Линейные однородные дифференциальное уравнения с постоянными коэффициентами n – го порядка.

Однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=0; \qquad (1)$$

Для решения этого уравнения составим характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0\,; \qquad (2)$$

и найдём его корни:

а) Пусть все корни характеристического уравнения разные, тогда частные решения уравнения (1) будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x};\, y_2 = e^{k_2 x};\, y_n = e^{k_n x};$$

где k_n - корни характеристического уравнения (2).

Общее решение однородного уравнения (1) примет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}; \qquad (3)$$

б) Среди корней характеристического уравнения есть кратные. Пусть корни $k = k_i$ соответствует кратность m, тогда частные решения при этом значении корня будут функции

$$y_1 = e^{k,x}, y_2 = xe^{k,x}, y_3 = x^2 e^{k,x}; \ldots; y_m = x^{m-1} e^{k,x};$$

в) Среди корней есть комплексные.

Пусть корню $k = k_i$ соответствует комплексное и комплексно-сопряжённые числа

$$k = k_i = \alpha + \beta\, i\,,$$

тогда каждому комплексному числу соответствуют частные решения уравнения (1)

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Контрольный пример.

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y^{v} + 3y^{iv} + 6y''' + 2y'' - 7y' - 5 = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$k^5 + 3k^4 + 6k^3 + 2k^2 - 7k - 5 = 0.$$

Находим корни

$$k_1 = 1,\ k_2 = k_3 = -1,\ k_{3,4} = -1 \pm 2i.$$

Этим характеристическим числам соответствуют частные решения

$$y_1 = e^{x};\ y_2 = e^{-x};\ y_3 = e^{-x};\ y_4 = e^{-x}\cos 2x;\ y_5 = e^{-x}\sin 2x;$$

и следовательно, общим решением будет

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x} + c_4e^{-x}\cos 2x + c_5e^{-x}\sin 2x.$$

2. Линейные неоднородные дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = P_m(x)e^{\alpha x}; \qquad (4)$$

где $P_m(x) = p_mx^m + p_{m-1}x^{m-1} + \ldots + p_0$ - многочлен $m -$ ой степени α - постоянная.

Найдём частное решение этого уравнения.

а) Пусть α не является корнем характеристического уравнения (2), тогда частное решение будем искать в виде

$$y = Q_m(x)e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x) = q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + ... + q_0$ - многочлен той же степени, что и $P_m(x)$ с неизвестными пока коэффициентами. Чтобы найти эти коэффициенты подставим это решение в уравнение (4) и приравнивая при этом коэффициенты при одинаковых степенях x с правой частью мы найдём, последовательно все эти q_m коэффициенты.

б) Пусть α является корнем характеристического уравнения (2) кратности s, тогда частное решение уравнения (4) ищем в виде

$$y = x^s Q_m(x)e^{\alpha x}, \text{ где } Q_m(x) = q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + ... + q_0$$

коэффициенты q_m ищем таким же способом, как искали их в пункте а).

После того как найдено частное решение уравнения (4) запишем общее его решение

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n + \bar{y},$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ - частные линейно независимые решения однородного уравнения (1), $c_1, c_2, ..., c_n$ - постоянные и $\bar{y}$ - частное решение неоднородного уравнения (4).

Контрольный пример.

Найти общее решение уравнения.

$$y''' + y'' + y' + y = xe^x;$$

Запишем характеристическое уравнение

$$k^2 + k^3 + k + 1 = 0,$$

найдём корни $k_1 = -1, k_2 = \pm i$.

Общее решение однородного уравнения

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x;$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_1 = (q_1 x + q_0)e^x$, т.к. в этом случае, $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения.

Подставляя y_1 в наше уравнение получим

$$(q_1 x + q_0)e^x + 3q_1 e^x + (q_1 x + q_0)e^x + 2q_1 e^x +$$
$$+ (q_1 x + q_0)e^x + q_1 e^x + (q_1 x + q_0)e^x = xe^x;$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x

$$4q_1 = 1, q_1 = 1/4, 4q_0 + 6q_1 = 0, q_0 = -3/2\, q_1 = -3/8 .$$

Теперь запишем частное решение

$$y_1 = (1/4\, x - 3/8)e^x,$$

и общим решением будет

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + (1/4 - 3/8)e^x .$$

Примеры.

Найти общее решение уравнений:

1. $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = (x+1)e^{x}$;
2. $y'' + y' + y = e^{-x/2} \sin x\sqrt{3/2}$;
3. $y'' - 6y' + 8y = e^{x} + e^{2x}$;
4. $y^{iv} + 64y = 0$;
5. $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$;
6. $y'' - 5y' + 4y + 4x^{2}e^{2x}$;
7. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$;

Найти решения уравнений, удовлетворяющих начальным условиям

8. $y''' - y' = 0;\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$;
9. $y^{iv} + y'' = 2\cos x;\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = y'''(0) = 0$;
10. $y''' - 3y' - 2y = 9x^{2x};\ y(0) = 0,\ y'(0) = -3,\ y'(0) = 3$.

Глава III. Системы дифференциальных уравнений

§ 1. Система *n* уравнений первого порядка.

Эта система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{1}$$

и называется системой имеющей нормальную форму Коши.

Путём исключения неизвестных систему, вообще говоря, можно свести к уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией, для этого выпишем первое уравнение

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \qquad (2)$$

и продифференцируем его

$$\frac{d^2 y_1}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{df_1}{dy_2}\frac{dy_2}{dx} + ... + \frac{df_1}{dy_n}\frac{dy_n}{dx}$$ и подставим

вместо

$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, ..., \frac{dy_1}{dx}$ из системы (1) получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy_1} f_1 + \frac{df_1}{dy_2} f_2 + ... + \frac{df_1}{dy_n} f_n = F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \; (2_1)$$

Повторяя эту процедуру $n-1$ раз, получим

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, ..., y_n) \;\; (2_{n-1})$$

выписывая уравнения (2), (2_1), (2_2)…(2_{n-1}) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Мы имеем $n-1$ уравнений и $n-1$ - неизвестных функций $y_2, y_3, ..., y_n$, поэтому мы можем найти функции $y_2, y_3, ..., y_n$. Найдя их из последней системы и подставим в выражение (2_{n-1}), получим дифференциальное уравнение n – го порядка.

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}) = 0.$$

Решив это уравнение, мы сможем найти и остальные неизвестные функции $y_2, y_3, ..., y_n$.

Контрольный пример.

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение.

$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}$, используя второе уравнение запишем

$\frac{d^2x}{dt^2}=z$, продифференцируем ещё раз и используем третье уравнение

$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{dz}{dt}$, или $\frac{d^3x}{dt^3}=x$ получим одно дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3x}{dt^3}-x=0.$$

Для его решения составим характеристическое уравнение $k^3-1=0$, найдём корни $k_1=1, k_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Общее решение

$$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

y найдём из первого уравнения системы

$$y=\frac{dx}{dt}=c_1e^t-\frac{1}{2}c_2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-$$

$$-\frac{1}{2}c_3e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}c_3e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t=c_1e^t+\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{2}[(-c_2+$$

$$+c_3\sqrt{3})\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}+(-c_3-c_2\sqrt{3})\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}].$$

Z найдём из второго уравнения системы

$$z=\frac{dy}{dt}=c_1e^t+\frac{e^{-1/2t}}{2}[(-c_2-c_3\sqrt{3})\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}+$$
$$+(c_2\sqrt{3}-c_3)\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}].$$

Примеры.

Решить системы:

1. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=y+z;\\ \frac{dz}{dx}=y+z+x.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{z};\\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}y.\end{cases}$ 3. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{z};\\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-x}.\end{cases}$

§ 2. Система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

1. Система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+...+a_{1n}y_n,\\ \frac{dy_2}{dx}=a_{21}y_1+a_{21}y_2+...+a_{1n}y_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_n}{dx}=a_{n1}y_1,a_{n1}y_2+...+a_{nn}y_n.\end{cases} \qquad (1)$$

где $y_1,y_2,...,y_n$ - неизвестные функции, а a_{ij} - постоянные числа и $i, j = 1,2,3,\dots,n$.

Используя векторное исчисление систему уравнений (1) можно записать короче

$$\frac{dY}{dX} = A^{*}Y, \qquad (2)$$

где А квадратная матрица и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn} \end{pmatrix},$$ Y и $\frac{dY}{dX}$ - вектора с компонентами

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{dY}{dX} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ . \quad . \\ . \\ . \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$$

Частное решение уравнения (2) ищем в виде вектора

$Y = ae^{\lambda x}$, (3) где

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ..... \\ a_n \end{pmatrix}$$ - неизвестные компоненты вектора $\bar{a}$. Подставляя

(3) в уравнение (2), получим

$\bar{a}\lambda e^{\lambda} = A\bar{a}e^{\lambda x}$, откуда $A\bar{a} = \lambda\bar{a}$ (4).

В уравнении (4) вектор $\overline{a}$ - называют собственным вектором и соответствующее число λ - собственным числом матрицы А.

Уравнение (4) запишем в виде $(A-\lambda E)\overline{a}=0$, (5) где

$$E=\begin{pmatrix} 10....0 \\ 01....0 \\ .... \\ 00....1 \end{pmatrix}$$ - единичная матрица.

Определитель матрицы $(A-\lambda E)$ называется характеристическим (вековым) многочленом.

Известно, что для нахождения нулевого вектора $\overline{a}$ из выражения необходимо и достаточно, чтобы характеристический (вековой) многочлен матрицы А был равен нулю, т.е

$$|A-\lambda E|=0. \qquad (6)$$

Равенство (6) называют характеристическим (вековым) уравнением.

Рассмотрим различные случаи, которые могут возникнуть при решении характеристического уравнения (6).

а) Пусть корни характеристического уравнения (6) действительные и различные, тогда каждому корню $\lambda=\lambda_i$ соответствует собственный вектор a. Частное решение дифференциального уравнения (2) ищем в виде вектора $Y = ae_i^{\lambda x}$.

б)Среди корней характеристического уравнения (6) есть кратные и пусть корню $\lambda = \lambda_i$ кратности s соответствует $I \le s$ линейно независимых векторов уравнения (5) и тогда частное решение дифференциального уравнения (2) ищем в виде

$$Y = (\overline{a}_0 + \overline{a}_1 x + \ldots + \overline{a}_{s-1} e^{x^{s-1}}) e^{\lambda i x}.$$

в) В уравнении (6) есть комплексные корни, тогда каждому комплексному корню соответствуют частные решения в виде

$$\mathrm{Re}(\overline{a} e^{\lambda i X}) \text{ и } \mathrm{Im}(\overline{a} e^{\lambda i X}).$$

Пример.

Решить систему уравнений записанную в матричной форме.

$$\frac{dz}{dx} = Az \text{, где } A = \begin{pmatrix} 2, 1, & 1 \\ -2, 0, & -1 \\ 2, 1, & 2 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} u \\ \gamma \\ \omega \end{pmatrix},$$

$$\frac{dz}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{d\gamma}{dx} \\ \frac{d\omega}{dx} \end{pmatrix}$$

Составляем вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda, & 1, & 1 \\ -2, & -\lambda, & -1 \\ 2, & 1, & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

решая его, получим $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

а) Находим собственный вектор при $\lambda_1 = 2$ по формуле (5)

$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 1 \\ -2, & -2, & -1 \\ 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, что соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 0 \\ -2a_1 - 2a_2 - a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases}.$$

Пусть $a_1 = 1$, тогда $a_2 = -2$, $a_3 = 2$. Итак при $\gamma_1 = 2$, собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

б) для корня $\lambda = 1$, кратности $s = 2$, имеем по формуле матрицу

$$A - E = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ -2, & -1, & -1 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь порядок матрицы $n = 3$, ранг $r = 2$, $I = n - r = 1$, число линейно независимых векторов, степень многочлена $s - I = 1$. Следовательно, частное решение ищем в виде

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ \gamma \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ a_2 + b_2 x \\ a_3 + b_3 x \end{pmatrix},$$

подставляя это решение в формулу (2), получим

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 1, \ \ 1 \\ -2, 0, -1 \\ 2, 1, \ \ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ a_2 + b_2 x \\ a_3 + b_3 x \end{pmatrix}.$$

Что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 0; \\ b_1 = a_1 + a_2 + a_3; \end{cases} \begin{cases} -2b_1 - b_2 - b_3 = 0; \\ b_3 = -2a_1 - a_2 - a_3; \end{cases} \begin{cases} 2b_1 + b_2 + b_3 = 0; \\ b_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0; \end{cases}$$

решая эти системы, получим

$$b_1 = 0; b_2 = -b_3; \ \ a_1 = -b_2; \ \ a_3 = -a_1 - a_2;$$

полагая $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$ получим

$$b_1 = -c_1; \ \ b_3 = c_1; \ \ b_1 = 0; \ \ a_3 = -c_1 - c_2;$$

при $\lambda = 1$, частными решениями будут

$$u = c_1 e^x; \ \ \gamma = (c_2 - c_1 x) e^x; \ \ \omega = (-c_1 - c_2 - c_1 x) e^x$$

и окончательно общее решение запишется

$$u = c_0 e + c_1 e^x,$$

$$\gamma = 2c_0 e^{2x} + (c_2 - c_1 x) e^x,$$

$$\omega = 2c_0 e^{2x} + (-c_1 - c_2 - c_1 x)e^x .$$

2. Частное решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 +,\dots, a_{ii}y_n + f_i(x), \quad (6) \quad i = 1,2,3,\dots,n$$

а) Пусть $f_i = P_m(x)e^{er}$, где $P_m(x)$ - многочлен степени m_i, то частное решение системы (6) ищем в виде $y_i = Q^i_{m+s}(x)e^{\gamma x}$, где $Q^i_{m+s}(x)$ - многочлен степени $m+s$, с неизвестными коэффициентами. $m = \max(m_1, m_2, \dots, m_n)$, γ - корень характеристического уравнения кратности s, если γ не является корнем, то $s = 0$.

б) При других значениях $f_i(x)$ - частное решение ищем методом вариации постоянных.

Примечание.

Общее решение неоднородного уравнения (6) складывается из общего решения однородного уравнения плюс частное решение неоднородного уравнения (6).

Примеры.

Решить системы.

$$1.\begin{cases}\dot{x}=4y-2z-3x,\\ \dot{y}=z+x,\\ \dot{z}=6x-6y+5z.\end{cases}\qquad 4.\begin{cases}\dot{x}=3x-y+z,\\ \dot{y}=x+y+z,\\ \dot{z}=4x-y+4z.\end{cases}$$

$$2.\begin{cases}\dot{x}=2x-y-z,\\ \dot{y}=3x-2y-3z,\\ \dot{z}=2z-x+y.\end{cases}\qquad 5.\begin{cases}\dot{x}=3x+2y+4e^{5t},\\ \dot{y}=x+2y.\end{cases}$$

$$3.\begin{cases}\dot{x}=2x+2z-y,\\ \dot{y}=x+2z,\\ \dot{z}=y-2x-z.\end{cases}\qquad 6.\begin{cases}\dot{x}=x-y^{8t},\\ \dot{y}=5x-y.\end{cases}$$

$$7.\ \dot{x}=Ax,\ \ A=\begin{pmatrix}-3, & 2, 2\\ -3, & -1, 1\\ -1, & 2, 0\end{pmatrix}$$

§ 3. Симметрическая форма системы дифференциальных уравнений

Этот тип уравнений имеет вид:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n)}\qquad(1)$$

С помощью интегрирующих комбинаций находим $n-1$ первых интегралов.

Контрольный пример.

С помощью интегрирующих комбинаций решить систему.

$\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{x+z}=\dfrac{dz}{x+y}$, сделаем такие комбинации

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=\frac{d(y-z)}{x-y}=\frac{d(z-y)}{y-z}$$, тогда

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=\frac{d(y-z)}{x-z},\ (x+y+z)(x-y)^2=c_1$$

и $\dfrac{d(y-z)}{x-y}=\dfrac{d(z-y)}{y-z}$, $y-x=c_1(z-y)$.

Ответ.

$(x+y+z)(x-y)^2=c_1$.

$y-x=c_1(z-y)$.

Примеры.

Решить системы.

1. $\dfrac{dx}{y-u}=\dfrac{dy}{z-x}=\dfrac{dz}{u-y}=\dfrac{du}{x-z}$

2. $\dfrac{dx}{z}=\dfrac{dy}{xz}=\dfrac{dz}{y}$

3. $\dfrac{dx}{x(z-y)}=\dfrac{dy}{y(y-x)}=\dfrac{dz}{y^2-xz}$

4. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=\dfrac{dy}{y(z^2+x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$

Глава IV. Уравнения с частными производными. Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

§ 1. Определения, общие положения.

Пусть z функция от нескольких независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$.

Соотношение, связывающее независимое переменное, искомую функцию и частные производные от искомой функции, называется дифференциальным уравнением с частными производными.

Это соотношение записывается в виде формулы

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial' z}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^k z}{\partial x_{1\ 1}^L, \partial x_{2\ 2}^L, ..., \partial x_{k\ k}^L}\right) = 0, \quad (1)$$

где F – непрерывная функция своих аргументов и $I_1 + I_2 + ... + I_k = k$.

Порядок старшей производной входящей в уравнение (1) называется порядком уравнения.

Решением уравнения (1) назовём любую непрерывную функцию $Z(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая обращает формулу (1) в тождество.

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные уравнения в частных производных первого порядка.

§ 2. Линейные уравнения в частных производных первого порядка

1. Уравнение вида

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \qquad (1)$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - непрерывные функции от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка.

Чтобы решить уравнение (1) запишем эквивалентное ему, систему обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в симметрической форме.

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \qquad (2)$$

Найдём первые интегралы этой системы.

Произвольная функция от $n-1$ первых независимых интегралов даст общее решение уравнения (1).

Контрольный пример.

Найти общее решение уравнения.

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Согласно формуле (2), составим систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Найдём первые интегралы этой системы

$$\frac{y}{x} = c_1, \frac{z}{x} = c_2.$$

Общее решение запишется в виде

$$F\left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right) = 0.$$

2. Неоднородное линейное уравнение с частными производными имеет вид

$$P_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = R, \qquad (3)$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и R - функции непрерывные и непрерывно дифференцируемы от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$.

Будем искать решение в виде неявной функции

$$V(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad (4)$$

где V непрерывная функция и имеющая непрерывные частные производные первого порядка по всем аргументам.

Подставляя (4) в формулу (3), получим

$$P_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial v}{\partial x_n} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \qquad (5)$$

Мы пришли к однородному уравнению рассмотренному в пункте 1 настоящего параграфа

Примеры.

Найти общее решение линейных уравнений.

1. $(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

2. $e^x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=ye^x$.

3. $(x+2y)\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. $(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$.

5. $(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=u$.

6. $\sin^2 x\dfrac{\partial z}{\partial x}+tgz\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos^2 z$.

7. $(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-z\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y$.

8. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x}$.

§ 3. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными первого порядка с n независимыми переменными.

Задача Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка:

Найти решение уравнения

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=F\,, \qquad (1)$$

такое, чтобы $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\Big|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, (2)

где x_n^0 - заданное число, а $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ - заданная (дифференцируемая) функция своих аргументов.

Чтобы решить данное уравнение нужно найти первые интегралы из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = ... = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{F} \tag{3}$$

и подставить в первые интегралы значения $x_n = x_n^0$ и выразить $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ через постоянные $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$.

Подставив значения $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ в начальные условия, получим функциональную зависимость между $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$.

Подставляя вместо этих постоянных первые интегралы, получим решение задачи Коши.

Примечание.

Для трёхмерного пространства задача Коши формулируется как нахождение поверхности удовлетворяющее уравнению (1), и проходящую через данную кривую.

Контрольный пример.

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy \dfrac{\partial z}{\partial y} = x$ и проходящую через линию $x = 0,\ z = y^2$.

Решение.

Составим систему уравнений

$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}$ и находим первые интегралы.

$y^2 - x^2 = c_1$ и $z - \ln|y| = c_2$.

Подставим $x = 0$ в первые интегралы и используя начальные данные (т.е. линию), получим $y^2 = c_1$, $z = c_1$ и $c_1 - \ln\sqrt{c_1} = c_2$.

Значения c_1 и c_2 подставляем в первые интегралы.

Ответ.

$$y^2 - x^2 - \ln\sqrt{y^2 - x^2} = z - \ln|y|.$$

Примеры.

Найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям.

1. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = 2x$ при $y = 1$.

2. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y^2 + x^2$, при $z = 0$.

Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию.

3. $x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 + x^2$, $y = 1$, $z = x^2$.

4. $tgx\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, $y=x$, $z=x^3$.

5. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$, $x=a$, $y^2+z^2=a^2$.

6. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, $x+y=2z$, $xz=1$.

7. $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$, $x-y=2$, $z+2x=1$.

8. $xy^3\dfrac{\partial z}{\partial x}+x^2z^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^3z$, $x=-z^3$, $y=z^2$.

Ответы.

Глава I.

1.1. $2xyy' - y^2 = 2x^3$.

1.2. $y' = \cos x$.

1.3. $y' = \cos x\sqrt{1 - y^2 / y}$.

1.4. $xy^2 = y(2y' - 1)$.

3.1. $y^2 - 2 = ce^{1/x}$.

3.2. $z = -\lg(c - 10^x)$.

4.1. $e^{10y-20x} = c(5x + 10y + 7)^2$.

4.2. $x = -y + atg(y + c)/a$.

4.3. $\sin(y - 2x)/(x + 1)$.

4.4. $y = -x\ln\ln Cx$.

4.5. $x^2 y\ln Cy + 1$; $y = 0$.

4.6. $x = -y^2 \ln cx$; $y = 0$.

4.7. $(y - x + 2)^2 + 2x = c$.

5.1. $y = ce^{-\varphi(x)} + \varphi(x) - 1$.

5.2. $y = ce^{3x} - 3$.

5.3. $y = c\ln^2 x - \ln x$.

5.4. $x = y^2 + cy$; $y = 0$.

5.5. $y = (2x + 1)(c + \ln|2x + 1|) + 1$.

5.6. $xy + (x^3 + c)e^{-x}$.

6.1. $y = x^4 \ln^2 Cx$; $y = 0$.

6.2. $y = x + 2 + 4\big/(ce^{4x} - 1)$; $y = x + 2$ .6

6.3. $x^2(c - \cos y) = y$; $y = 0$.

6.4. $y = e^x - 1\big/(x + c)$; $y = e^x$.

7.1. $3x^2 y - y^3 = c$.

7.2. $xe^{-y} - y^2 = c$.

7.3. $x^3 + x^3 \ln y - y^2 = c$.

7.4. $x^2 + 1 = 2(c - 2x)\sin y$.

7.5. $xy + x + y = c(x + y)(x + y + 2)$.

7.6. $x^2 - y^2 - 1 = cx$.

8.1. (1,1) – фокус; (-1, -1) – седло.

8.2. узел.

8.3. фокус.

8.4. (-2, -1) – узел.

8.5. (1,-1) – фокус; (0,-2) – седло; (-2,2) – узел.

8.6. (2,1) – узел; (1,2) – седло; (-1, -2) – фокус.

8.7. (2, 4) – узел; (-1, 1) – седло.

8.8. (0,1) и (0,1) – седло; (-1,0) – фокус; (3,2) – узел.

10.1. $r = ce^{k\varphi}$.

10.2. а) $(x^2 + y)y' = -x$.

b) $(x \pm y\sqrt{3})y' = y \pm x\sqrt{3}$.

c) $(3x \pm y\sqrt{3})y' = y \pm 3x\sqrt{3}$.

11.1. $x = p^3 + p$, $4y = 3p^4 + 2p^2 + c$.

11.2. $x = \pm(2p\sqrt{p^2-1} + \arcsin 1/p) + c$; $y = \pm p\sqrt{p^2-1}$; $y = 0$.

11.3. $Cx = \ln Cy$, $y = ex$.

11.4. $x = t^4$, $t = 1 + 1/u$; $y + c = \int t^{2u}(t\ln u - 1/u)du$.

11.5. $x = 3p^2 + Cp^{-2}$, $y = 2p^3 + 2cp^{-1}$; $y = 0$.

11.6. $t^2 x + c + \ln t$, $ty = 2xt^2 + 1$.

11.7. Дифференциальное уравнение - $y' = px + ap\big/\sqrt{1+p^2}$, это астроида $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$.

Глава II.

2.1. $y = sh(x + c_1) + c_2 + c_3$.

2.2. $x = \sin\varphi$, $y = -1/8\varphi\cos 2\varphi + 3/16\varphi + c_2\sin\varphi + 7/48\sin 2\varphi -$

$$-c_1/4\cos 2\varphi - 1/192\sin 4\varphi + c_3.$$

3.1. $y = c_3 - (x + c_1)\ln c_2(x + c_1)$; $y = c_1 x + c_2$.

3.2. $c_2 y^2 - c_1 = c_2^2(x + c_3)^2$; $y = c$.

3.3. $x = c_1 p + 3p^2$; $y = 12/5p^3 + 5/4c_1 p^4 + c_1^2 p^3/6 + c_2$; $y = c$.

3.4. $y^2 = c_1 x^3 + c_2$.

3.5. $y = c_2 x e_1^{-c/x}$.

3.6. $4c_1 y^2 = 4x + x(c_1 \ln c_2 x)^2$, $y = -x\ln(c_1 \ln c_2 x)$; $y = cx$.

3.7. $2c_1 c_2 н = c_2^2 |x|_1^{2+c} + |x|_1^{2-c}$.

3.8. $y = c_2 |x|_1^{c-(1/2)\ln|x|}$.

3.9. $(3-x)y^5 = 8(x+2)$.

3.10. $y(x+2) = -x-6$.

3.11. $y = 3th^2 x\sqrt{3}/2-2$.

3.12. $\ln \lg(y/2+\pi/6) = 2x+2$.

4.1. $y = e^x(x\ln|x| + c_1 x + c_2 x)$.

4.2. $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^{-x}+1) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$.

4.3. $y = e^{-x}(4/5(x+1)^{5/2} + c_1 + c_2 x)$.

4.4. $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^{x}+1) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$.

4.5. $y = \sin 2x \ln|\cos x| - x\cos 2x + c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$.

4.6. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos 2x/\cos x$.

5.1. $y = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + 1/24x^4 = +1/120x^5)$.

5.2. $y = e^{-x/2}\left[(c_1 - 1/\sqrt{3}x)\cos x\sqrt{3}/2 + c_2 \sin x\sqrt{3}/2\right]$.

5.3. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} + 1/3e^x - x/2e^{2x}$.

5.4. $y = c_1 e^{x\sqrt{3}}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x +$

$+ e^{-x\sqrt{3}}(c_5 \cos x + c_6 \sin x)$.

5.5. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$.

5.6. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$.

5.7. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + e^{3x}(6/37 \sin x - 1/37 \cos x)$.

5.8. $y = 2 + c_1 e^{-x}$.

5.9. $y = x - x \sin x - 2 \cos x$.

5.10. $y = (x-1)(e^{2x} - e^{-x})$.

Глава III.

1.1. $y = c_1 + c_2 e^{2x} - x^2/4 - x/4$; $z = -c_1 + c_2 e^{2x} + x^2/4 - x/4 - 1$.

1.2. $y = 1/(c_1 x + c_2)^2$; $z = -1/2c_1(c_1 x + c_2)$.

1.3. $y = x + c_2 e_1^{Cx}$; $z = -1/c_1 c_2 e_2^{-Cx}$.

2.1. $x = c_1 e^{t} + c_3 e^{-t}$, $y = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$, $z = 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t}$.

2.2. $x = c_1 + c_2 e^{-t}$, $y = 3c_1 + c_3 e^{t}$, $z = c_1 + (c_2 - c_3)e^{-t}$.

2.3. $x = c_2 \cos t + (c_2 + 2c_3)\sin t$, $y = 2c_1 e^{t} - 2c_2 e^{2t} + (c_2 + 2c_3)\sin t$,

$z = c_1 e^{t} + c_3 \cos t - (c_2 + c_3)\sin t$.

2.4. $x = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}$, $y = c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}$,

$z = -c_1 e^{t} - 3c_2 e^{2t} + 3c_3 e^{5t}$.

2.5. $x = c_1 e^{t} + 2c_2 e^{4t} + 3e^{5t}$, $y = -c_1 e^{t} + c_2 e^{4t} + e^{5t}$.

2.6. $x = c_1 \cos 2t - c_2 \sin 2t + 2t + 2$, $y = (c_1 + 2c_2)\cos 2t + (2c_1 - c_2)\sin 2t + 10t$.

2.7. $x = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$.

3.1. $x + z = c_1,\ y + u + c_2,\ (x - z)^2 + (y - u)^2 = c_3$.

3.2. $x^2 - 2y = c_1,\ 6xy - 2x^3 - 3x^2 = c_2$.

3.3. $x + z - y = c_1,\ \ln|x| + z / y = c_2$.

3.4. $x^2 + y^2 + z^2 = c_1,\ yz = c_2 x$.

Глава IV.

2.1. $u = f((x - y)/z, (x + y + 2z)^2 / z)$.

2.2. $F(e^{-x} - y^{-1}, z + (x - \ln|y| / e^{-x} - y^{-1})) = 0$ .2

2.3. $z = f(xy + y^2)$.

2.4. $F(1/(x + y) + 1/z, 1/(x - y) + 1/z) = 0$.

2.5. $F(u(x - y), u(y - z), (x + y + z)/u^2) = 0$.

2.6. $F(tgz + ctgz, 2y + 2tgzctgx + ctg^2 x) = 0$.

2.7. $F((x - y)/z, (2u + x + y)z, (u - x - y)/z^2) = 0$.

2.8. $F(z - \ln|x|, 2x(z - 1) - y^2) = 0$.

3.1. $z = 2xy$.

3.2. $u = (xy - 2z)(x / y + t / x)$.

3.3. $2x^2(y + 1) = y^2 + 4z - 1$.

3.4. $\sqrt{z / y^3}\sin x = \sin\sqrt{z / y}$.

3.5. $2x^2 - y^2 - z^2 = a^2$.

3.6. $xz = (xz - y - x + 2z)^2$.

3.7. $(x - y)(3x + y + 4z) = 4z$.

3.8. $xz + y^2 = 0$.

Содержание

Учебно-методическое пособие

ДИФФЕРЕНЦЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ласурия Р.А.

Набор, компьютерная верстка: Пачулиа Н.Н.