Р. А. ЛАСУРИЯ

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ И АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

СУХУМ – 2010

УДК 517.5
ББК. 22.161.5
Л26

Ласурия Р.А. **Сильная суммируемость рядов Фурье и аппроксимация функций.** – Сухум: АГУ, 2010 – 260с.

Результаты, представленные в монографии, относятся главным образом к исследованию вопросов обобщённой сильной суммируемости разложений Фурье и Фабера. Исследуются экстремальные задачи сильной аппроксимации функций действительного и комплексного переменных соответствующих этим разложениям на различных классах функций. В книге также рассматривается круг вопросов, связанных сильной аппроксимацией функций многих действительных и комплексных переменных и интегралов типа Коши.

Для специалистов в области математического анализа, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов математических факультетов университетов. Книга будет полезна научным работникам в области приложений теории аппроксимации функций.

Научный редактор: *д-р физ.-мат. наук* А. С. Сердюк
(Ин-т математики НАН Украины)
Рецензент: *д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. АНА* Н. Л. Пачулиа

Утверждено к печати Ученым советом
Абхазского государственного университета

ОГЛАВЛЕНИЕ

Моему учителю
Александру Ивановичу Степанцу
посвящаю

ПРЕДИСЛОВИЕ

Результаты, представленные в монографии, относятся главным образом к исследованию вопросов обобщенной сильной суммируемости разложений Фурье и Фабера. Исследуются экстремальные задачи сильной аппроксимации функций действительного и комплексного переменных соответствующих этим разложениям на различных классах функций. В книге также рассматривается круг вопросов, связанных с сильной аппроксимацией функций многих действительных и комплексных переменных и интегралов типа Коши.

В последнее время наблюдается заметная активность в изучении многих вопросов теории сильной аппроксимации и суммируемости рядов Фурье по различным ортонормированным системам функций. Данная тематика берет свое начало в известных работах профессоров Кембриджского университета Г. Харди и Дж. Литтлвуда [150-154] и вот уже более века находится в центре внимания ведущих математиков всего мира. Часть ранних исследований изложена в книгах Н.К. Бари [5], А. Зигмунда [35], Г. Алексича [1]. Некоторые более поздние результаты отражены в книгах Л. Лейндлера [67], Б.С. Кашина и А.А. Саакяна [36], С.Б. Топурия [134], А.И. Степанца [106, 112] и др. В эту книгу включены только те результаты, к получению которых автор имеет самое непосредственное отношение, в том числе результаты, полученные в совместных работах с А.И. Степанцом. Исключение составляет последний параграф книги.

В первой главе монографии содержатся результаты о метрических свойствах интегрируемых по Лебегу функций и точечных множеств действительной оси. Вводится определение ортогональных систем функций, обладающих так называемым В-свойством и приводятся достаточные условия для того, чтобы та или иная система функций обладала B-свойством. На основе полученных результатов охарактеризованы множества точек полной меры на отрезке, в которых имеет место сильная суммируемость рядов Фурье интегрируемых с весом функций по равномерно ограниченным системам функций полиномиального вида.

Вторая глава начинается с исследования аппроксимационных характеристик α-средних последовательности отклонений сумм Фурье в метрике обобщенного пространства Гёльдера. Далее устанавливаются аппроксимационные свойства величин α-средних последовательности φ-отклонений сумм Фурье на классах функций, введенных и исследованных в 80- 90 годах XX столетия А.И. Степанцом и его учениками, а также доказываются некоторые обратные теоремы сильной аппроксимации на этих классах функций. В конце главы устанавливаются необходимые или достаточные условия принадлежности величин, характеризующих сильную суммируемость рядов Фурье, к лебеговым классам функций в терминах коэффициентов Фурье.

Третья глава посвящена установлению многомерных аналогов неравенств типа Лебега, а также неравенств для средних Валле-Пуссена последовательности φ-отклонений на классах $\bar{\psi}$-дифференцируемых (в смысле А.И. Степанца) функций многих переменных в равномерной и интегральной метриках. В этой же главе находится асимптотика приближения функций линейными средними их кратных рядов Фурье на таких классах функций.

Некоторые вопросы скорости сильной аппроксимации аналитических функций и интегралов типа Коши частичными суммами их рядов Фабера в областях с кусочно-гладкой границей и областях Фабера комплексной плоскости изучаются в четвертой главе.

В эту книгу не включены результаты автора и других математиков, посвященных исследованию аналогичных и других вопросов сильной суммируемости рядов Фурье-Лапласа функций, заданных на многомерной сфере.

Необходимые сведения из теории рядов Фурье и аппроксимации функций приводятся в тексте по мере их использования.

Результаты, вошедшие в книгу, обсуждались на научных семинарах в Институте математики НАН Украины, в Абхазском государственном университете, в Киевском и Днепропетровском национальных университетах, в Московском государственном университете. Приношу глубокую благодарность руководителям этих семинаров А.И. Степанцу, А.С. Романюку, Ю.С. Самойленко, А.А. Гварамия, Н.Л. Пачулиа, И.А. Шевчуку, В.П. Моторному, В.Ф. Бабенко, М.Ф. Тиману, Б.С. Кашину, М.И. Дьяченко, С.В. Конягину, Б.И. Голубову, а также коллегам принимавшим участие в обсуждении.

В заключение хочется выразить искреннюю благодарность и признательность моему учителю Александру Ивановичу Степанцу, ныне покойному, который поставил передо мною ряд очень важных и интересных задач и во время наших бесед и обсуждений получаемых результатов своими советами, замечаниями и пожеланиями оказал мне неоценимую помощь.

Р. Ласурия

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

df – по определению;
Ø – пустое множество;
$x \in A\left(x \notin A\right)$ – элемент x принадлежит (не принадлежит) множеству A;
$A \cup B\left(A \cap B\right)$ – объединение (пересечение) множеств A и B;
$A \setminus B$ – разность множеств A и B;
$A \subset B$ – множество A содержится в множестве B;
$\sup A$ – точная верхняя грань множества A;
$\forall$ – квантор общности: “для любого”, “для каждого”;
$\exists$ – квантор существования: “существует”, “найдется”;
N – множество натуральных чисел;
Z – множество целых чисел;
Z_+ – множество целых неотрицательных чисел;
R – множество действительных чисел;
R^m – m-мерное евклидово пространство;
Z^m – целочисленная решетка в R^m;
T^m – куб периодов;
$\mathfrak{M}$ – множество выпуклых убывающих к нулю последовательностей чисел;

$$signa = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 0, & a \neq 0, \\ -1, & a < 0; \end{cases}$$

$$\ln^+ t = \max\{0; \ln t\};$$

$\|x\|_X$ – норма элемента x в линейном нормированном пространстве X;

$\{x : P_x\}$ – совокупность элементов x, обладающих свойством P_x;

$|E|$ – лебегова мера множества E;

$C(T^m), L_p(T^m)$, $\left(C(T^1) = C(0,2\pi) = C, L_p(T^1) = L_p(0,2\pi) = L_p\right)$ – пространства периодических функций с соответствующей метрикой;

$L_p^{(\omega)}(E)$ – пространство функций, заданных на множестве E, суммируемых в p-й степени с весом $\omega(\cdot)$ с соотвествующей метрикой;

$H_{\omega^*} = H_{\omega^*}(0,2\pi)$ – обобщенное пространство Гёльдера;

$B(R^m)$ – алгебра преобразований Фурье конечных борелевых мер на R^m;

$\operatorname*{ess\,sup}_{a \le t \le b} |f(t)|$ – существенная верхняя грань функции $|f(t)|$ на $[a,b]$, т.е. наименьшее из чисел $N \in R$, для которых неравенство $|f(t)| > N$ выполняется на множестве меры нуль;

$C_\beta^\psi \mathfrak{N}, L^{\bar{\psi}} \mathfrak{N}$ – классы $\overline{\psi}$-дифференцируемых перодических функций (классы $\overline{\psi}$-интегралов);

$S[f]$ – ряд Фурье функции $f(x)$;

$S[f]_\mu$ – частный ряд Фурье функции $f \in L(T^m)$;

$E_n(f)_X$ – наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами в пространстве X;

$\omega_k(f;t)_X$ – модуль непрерывности k-го порядка функции f в пространстве X, $\omega_k(f;t)_C = \omega_k(f;t)$, $\omega_1(f;t)_C = \omega(f;t)$;

$C(\Gamma)$, $L_p(\Gamma)$ – соответственно, пространства непрерывных и суммируемых в p-й степени функций комплексного переменного, определённых на кривой Г;

$Kf(z)$ – интеграл типа Коши;

$T(f)(z) = T_\Omega(f)(z)$ – оператор Фабера.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $L = L(0,2\pi)$ – пространство суммируемых на $(0,2\pi)$ 2π-периодических функций, $C = C(0,2\pi)$ – пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_C = \max_x |f(x)|,$$

$L_p = L_p(0,2\pi)$, $1 \le p < \infty$, – пространство 2π-периодических суммируемых на $(0,2\pi)$ в *p*-й степени функций $f(x)$, в котором норма определяется равенством

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \ L_1 \overset{df}{=} L,$$

$L_\infty = M$ – пространство 2π-периодических существенно ограниченных функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_M = ess \sup_x |f(x)|.$$

Если $1 < p < p' < \infty$, то справедливы включения

$$C \subset M \subset L_{p'} \subset L_p \subset L.$$

Пусть $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \overset{df}{=} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \tag{B.1}$$

– её ряд Фурье, $a_k = a_k(f)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $b_k = b_k(f)$, $k = 1,2,\ldots$, – её коэффициенты Фурье

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \tag{B.2}$$

– частичная сумма Фурье порядка $n-1$ ряда (В.1).

$$E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1}} \left\| f(x) - t_{n-1}(x) \right\|_C \tag{B.3}$$

– наилучшее приближение $f \in C$ посредством тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$.

Как аппарат приближения непрерывных функций суммы Фурье (В.2) заняли достойное место ещё в период становления теории приближения, в особенности после того, как в 1909 году А. Лебегом [63] было показано, что $\forall f \in C$ и $\forall x \in R$

$$\left| f(x) - S_n(f;x) \right| \le (\ln n + 3) E_n(f)_C .$$

В сочетании с известными теоремами Д. Джексона об оценках величин $E_n(f)_C$ это неравенство не теряет своего значения и в настоящее время. На всем классе C оно является точным по порядку и удобно в приложениях, в том числе в теории сильной аппроксимации.

Столь хорошие аппроксимационные свойства сумм Фурье (В.2) – традиционного предмета исследований теории рядов Фурье – поставили их в ряд важнейших объектов теории приближения и сильной аппроксимации функций.

Ещё в 1876 году Дюбуа Реймонд [29] показал, что существуют непрерывные функции, ряды Фурье которые расходятся в некоторых точках. Позже А.Н. Колмогоровым [37, 38] (см., также, [141]) было установлено существование суммируемых функций, ряды Фурье которых расходятся всюду. В связи с этим естественно встает вопрос о способе восстановления функции $f(x)$ по её ряду Фурье (В.1). Первый результат в этом направлении принадлежит Л. Фейеру [144], который показал, что $\forall f \in C$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f;x) = f(x) \tag{В.4}$$

равномерно по x на сегменте $[-\pi, \pi]$, где

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x),\ n = 1, 2, \ldots$$

– средние арифметические сумм Фурье, получившие название сумм Фейера или $(C,1)$ – средние ряда $S[f]$.

Соотношение (В.4) может быть записано в виде

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x) - S_k(f;x)\right] = o(1), \tag{В.5}$$

где под $o(1)$ понимается величина, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$.

В 1905 году А.Лебег [62] при исследовании $(C,1)$ – средних ряда $S[f]$ показал, что *соотношение (В.5) выполняется для любой функции* $f \in L$ *в каждой точке x, в которой*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left|f(t) - f(x)\right|^p dt = 0, \tag{В.6}$$

при p=1, т.е. почти всюду. Впоследствии эти точки получили название p-точек Лебега.

Более общую ситуацию, а именно, случай (C,α)-средних $(\alpha > 0)$, рассматривали Г. Харди [154] и М. Рисс [88].

Г. Харди и Дж. Литтлвуд [150] поставили следующий вопрос: будет ли для всякой функции $f \in L$ выполнятся более сильное, чем (В.5) соотношение

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x) - S_k(f;x)\right| = o(1), \tag{В.7}$$

или ещё более общее соотношение

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x)-S_k(f;x)\right|^q=o(1), \tag{B.8}$$

где q – некоторое положительное число?

Если выполнено соотношение (B.8), то говорят, что ряд Фурье (B.1) сильно суммируем с показателем q или (H,q) – суммируем в точке x к значению $f(x)$.

Из известного неравенства для средних ([153, с. 41])

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}c_k^{q_1}\right\}^{1/q_1}\le\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}c_k^{q_2}\right\}^{1/q_2}, \tag{B.9}$$

где $c_k>0$, $0<q_1<q_2$, следует, что (H,q_2) – суммируемость влечет (H,q_1) – суммируемость и поэтому соотношение (B.8) дает тем более сильный результат, чем больше q. Ясно также, что из $(H, 1)$ – суммируемости вытекает $(C, 1)$ – суммируемость. $(H, 1)$ – суммируемость показывает, что среднее значение для $\rho_k(f;x)=f(x)-S_k(f;x)$ стремится к нулю не за счет взаимного уничтожения положительных и отрицательных членов, а за счет того, что индексы k, для которых величина $\left|\rho_k(f;x)\right|$ велика, достаточно редки.

Сначала Г. Харди и Дж. Литтлвуд [150-152] показали, что если $f(x)$ суммируема в p-й степени, $f\in L_p$ и $p>1$, то (B.8) имеет место в каждой её p-точке Лебега, т.е. почти всюду, при любом $q>0$. Ими же было установлено, что при $p=1$ это утверждение теряет силу, точнее они показали, что существует функция $f\in L\setminus L_p$, $p>1$, для которой соотношение (B.8) может не выполнятся в её точках Лебега ни при каком $q>0$. Тем не менее в

1939 году Й. Марцинкевичем [72] в случае $q=2$, а в 1941 году А. Зигмундом [33] $\forall q>0$ было доказано, что соотношение (В.8) имеет место почти всюду для любой функции $f\in L$, причем последним была показана справедливость (В.8) почти всюду и для сопряженного ряда. Таким образом, множество $e_q(f)$ точек, в которых выполняется (В.8) и множество точек Лебега данной функции в общем случае не совпадают, хотя их меры одинаковы. Поэтому, естественно возникает задача о характеризации точек множества $e_q(f)$. Существенные результаты в этом направлении получил О.Д. Габисония [14]. Он впервые охарактеризовал множество точек полной меры, входящих в $e_q(f)$, $q\in(0,2]$, $f\in L$, и ввёл в рассмотрение величину

$$\Gamma_{n,s}(f;x)=\left(\sum_{k=1}^{[2\pi n]}\left(\frac{n}{k}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}h_x(t)dt\right)^s\right)^{\frac{1}{s}},\quad s>1,\tag{В.10}$$

где $h_x(t)=|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|$, и показал, во-первых, что для любой $f\in L$ почти всюду

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_{n,s}(f;x)=0,\quad s>1,\tag{В.11}$$

и во-вторых справедливость (В.8) при $q\in(0,2]$ в каждой точке x, в которой выполняется (В.11) при $s=2$, т.е. почти всюду. Им же в [14] установлено, что если $f\in L_p$, $p>1$, то равенство (В.11), при $s=p$, выполняется во всех p-точках Лебега. Затем И.Я. Новиков и В.А. Родин [77] распространили результат О.Д. Габисония на случай

(H,q) – суммируемости: *если* $f \in L$ *и* $q \geq 2$*, то (В.8) имеет место в каждой точке x, в которой выполняется (В.11) при* $s = \dfrac{q}{q-1}$.

Впоследствии постановка задачи расширилась в различных направлениях, в частности, в том направлении, что вместо выражений (В.8) рассматривались функционалы вида

$$H_{\nu,\varphi}^{(m)}(f;x;a) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k(\nu)\varphi(|\rho_k(f;x)|),\ m \in N = \{1,2,\ldots\}, \qquad (\text{В.12})$$

характеризующие φ-сильную суммируемость рядов Фурье, где $\alpha = \alpha_k(\nu)$ – произвольная последовательность неотрицательных функций, зависящих от какого-либо параметра $\nu \in V$, V – множество чисел действительной оси, $V \subset R$, имеющее хотя бы одну предельную точку ν_0, $\varphi = \varphi(u)$ – произвольная неотрицательная функция, заданная на множестве действительных неотрицательных чисел. Величины (В.12) называются α-средними последовательности φ-отклонений функции $f \in L$ суммами Фурье или φ-сильными средними α-методов суммирования рядов. Если $\varphi(u) = u^q$, $q > 0$, то будем говорить о сильных средних с показателем q. В случае $V \equiv N$, $m = 1$,

$$\alpha_k(\nu) = \alpha_k(n) = \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} 1/n, & 1 \leq k \leq n; \\ 0, & k > n, n \in N, \end{cases}$$

величины (В.12) ввёл в рассмотрение В. Тотик [137].

Приведем следующее определение, обобщающее определение (H,q) – суммируемости. *Будем говорить, что ряд Фурье (В.1)* φ-*сильно суммируем методом* α *в точке x к значению* $f(x)$*, если*

$$\lim_{v\to v_0}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(v)\varphi(\|\rho_k(f;x)\|)=0\cdot \tag{В.13}$$

В. Тотиком [81] была сформулирована гипотеза о φ-сильной суммируемости почти всюду методом средних арифметических ряда (В.1), где $\varphi(u)=\exp u-1$: *если* $f\in L$*, то почти всюду*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\|\rho_k(f;x)\|)=0, \tag{В.14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\|\widetilde{\rho}_k(f;x)\|)=0, \tag{В.15}$$

где $\widetilde{\rho}_k(f;x)=\widetilde{f}(x)-\widetilde{S}_k(f;x)$, $\widetilde{f}(x)$ *– функция, сопряженная с* $f(x)$, $\widetilde{S}_k(f;x)$ *–сопряженная частная сумма.*

В работе [81] К.И. Осколков установил φ-сильную суммируемость почти всюду ряда Фурье и сопряженного ряда суммируемой функции, когда $\varphi(u)$ является *N*-функцией с главным членом $\exp(u/\ln\ln u)$.

Положительный ответ на гипотезу В. Тотика дали Л.Д. Гоголадзе [20], В.А. Родин [89, 91]: *если непрерывная возрастающая функция* $\varphi(u)$ *с* $\varphi(0)=0$ *такова, что*

$$\ln\varphi(u)=O(u),\ u\to+\infty, \tag{В.16}$$

то почти всюду имеют место равенства (В.14) и (В.15).

В.А. Родиным эти факты установлены на основании того, что операторы, являющиеся мажорантами сильных средних рядов Фурье по тригонометрической системе, имеют слабый тип (1.1). Более того, им показано, что, если $L_\varphi([0,1])$ пространство Орлича с М-функцией $\exp u-1$, то $L_\varphi([0,1])$ обладает экстремальным свойством в классе симметричных пространств.

Г.А. Карагулян показал, что условие (В.16) необходимо для того, чтобы (В.14) и (В.15) выполнялись почти всюду, точнее: *если непрерывная возрастающая функция* $\varphi(u)$ *с* $\varphi(0)=0$ *такова, что*

$$\varlimsup_{u\to+\infty}\frac{\ln\varphi(u)}{u}=+\infty,$$

то существует $f\in L$ *для которой*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\left|S_k(f,x)\right|\right)=+\infty$$

почти всюду.

Здесь же отметим, что аналогичные результаты по некоторым другим ортонормированными системами функций, в частности, по системе Уолша были получены Ф. Шиппом [101] $\left(\varphi(u)=u^q,\ \mathrm{q}>0\right)$, В.А. Родиным [89, 93] $\left(\varphi(u)=\exp u-1\right)$.

φ-сильная суммируемость тригонометрических рядов Фурье функций $f\in L_p$, $p>1$, в их точках Лебега изучалась в работе Н.Л. Пачулиа [84, 86].

В случае кратных тригонометрических рядов Фурье Й. Марцинкевич [73] показал, что: *если* $f\left(\ln^+|f|\right)^{m+1}$ *суммируема на кубе периодов* $T^m=\left\{x\in R^m:-\pi\le x_i\le\pi,\ i=1,\dots,m\right\}$, $f\left(\ln^+|f|\right)^{m+1}\in L\left(T^m\right)$, *то* $\forall q>0$ *почти всюду справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}n_i}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x)-S_k(f;x)\right|^q=0, \tag{В.17}$$

$n-1=(n_1-1,\dots,n_m-1)$, $k=(k_1,\dots,k_m)$, $\ln^+ x=\max\{\ln x,0\}$, в котором предел понимается по Прингсхейму (по прямоугольникам).

В 1977 году Л.Д. Гоголадзе [17], а затем О.Д. Габисония [15] и В.А. Родин [90, 93] различными методами усилили теорему Марцинкевича, которые показали, что: *если* $f\left(\ln^+|f|\right)^{m-1}$ *суммируема на* T^m*, то (B.17) выполняется почти всюду* $\forall q>0$. При этом О.Д. Габисония и В.А. Родин показали, что многомерный аналог соотношения (B.11) имеет место почти всюду, когда функция $f\left(\ln^+|f|\right)^{m-1}$ интегрируема (условие неусиляемо), тем самым охарактеризовали точки (H,q) – суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье. Условие интегрируемости $f\left(\ln^+|f|\right)^{m-1}$ для выполнения (B.17) также является точным [17]. М.И. Дьяченко установил отсутствие сильной суммируемости даже по кубам в классе $L\left(T^2\right)$. Точность условия $f\left(\ln^+|f|\right)\in L\left(T^2\right)$ имеет место и для ограниченной сильной суммируемости ([90, 93]).

Интересным также является тот факт, что вводя ограничения на поведение целых чисел n_i при их стремлении к ∞ условие интегрируемости $f\ln^+|f|$ в двумерном аналоге (B.11) нельзя заменить на требование интегрируемости функции $f(x)$, а именно, имеет место следующее утверждение, принадлежащее С.В. Конягину [39]: *существует интегрируемая функция и множество положительной меры* $E\subset T^2$ *такие, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\max_{i,j}\frac{n^2}{ij}\int_{i/n}^{(i+1)/n}\int_{j/n}^{(j+1)/n}\left|f(x+t)-f(x)\right|dt=\infty$$

для любого $x\in E$.

В то время как вопросы поточечного представления суммируемых периодических функций в смысле соотношений (В.8) или (В.14) на множестве полной меры изучены довольно глубоко, аналогичные вопросы в отношении ортогональных разложений суммируемых функций по системам общих алгебраических полиномов или более общо по так называемым системам полиномиального вида ([1, с. 183]) изучены недостаточно.

Более того, при исследовании вопроса представления произвольной суммируемой с весом функции на множестве полной меры $(C,1)$ -средними её ряда Фурье по общей системе алгебраических полиномов (аналог теоремы А.Лебега) обнаружились определённые трудности (проблема Г. Алексича[1, с. 289]). В этом направлении первые результаты для определенного класса систем ортогональных алгебраических полиномов получены Б.П. Осиленкером [79]. В качестве следствия основных результатов главы I данной книги приводится вполне исчерпывающее решение проблемы Г. Алексича (см., также [44],[114, 115], [117]).

Отметим, что к системам функций полиномиального вида, кроме алгебраической, относятся тригонометрическая система, системы Хаара и Уолша [3] и др.

Как показывает пример тригонометрической системы, в общем случае нельзя надеяться, что соотношение (В.8) для системы функций полиномиального вида имеет место в каждой точке Лебега функции $f(x)$. По-видимому, первый результат в отношении характеризации точек (H,q) – суммируемости рядов Фурье функций $f \in L \setminus L_p$, $p>1$, был получен К. Тандори [128]. Однако множество точек, удовлетворяющих его условию не имеет полной меры ([129]). Аналог теоремы Харди и Литтлвуда относительно (H,q) – суммируемости для $f \in L_p$, $p>1$, в случае ортогональных алгебраических полиномиальных разложений установлен К. Тандори в работе [127].

Величины вида (В.12) могут выступать в качестве аппроксимационной характеристики функции f и являться в известном смысле мерой скорости сходимости её ряда Фурье $S[f]$. Вопросам скорости сходимости этих величин на различных классах как периодических так и непериодических функций посвящены работы Г.Алексича [1], Г.Алексича и Д. Кралика [2, 3], Л. Лейндлера [64, 66, 67], В. Тотика [137, 138], Л.Д. Гоголадзе [18, 19], А.И. Степанца и Н.Л. Пачулиа [118, 119], Н.Л. Пачулиа [82, 83, 85], А.И. Степанца[106, 111, 112] и др.

Так, в частности, В. Тотиком [137] установлено, что для φ – сильных средних Валле-Пуссена справедливо неравенство

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \varphi\left(\left|\rho_k(f;x)\right|\right) \right\|_C \le K\varphi\left(E_n(f)_C\right), \tag{В.18}$$

где $K = K(\varphi)$ – величина, равномерно ограниченная по $n \in N$ и $f \in C$, $\varphi = \varphi(u) \in \Phi$, Φ – множество неотрицательных непрерывных и неубывающих на $[0,+\infty)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(u) \le A\exp(bu) \ \ \forall u \in [0,+\infty), \ A \equiv const > 0,$$
$$\varphi(2u) \le a\varphi(u) \ \ \forall u \in [0,1],$$

$a = a(\varphi)$ и b – положительные постоянные, независящие от u, $E_n(f)_C$ – величина наилучшего приближения, определяемая равенством (В.3).

Неравенство (В.18) в случае $\varphi(u) = u$ показывает, что сильные средние типа Валле-Пуссена имеют порядок наилучших приближений. Л.Д. Гоголадзе [18] $\left(\varphi(u) = u^q, q > 0\right)$, затем и Н.Л. Пачулиа [83] $(\varphi \in \Phi)$ показали, что $\forall f \in C$ и $\forall v \in V$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi\left(\left|\rho_k(f;x)\right|\right) \right\|_C \le K\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi\left(E_k(f)_C\right), \ K = K(\varphi). \tag{В.19}$$

Из неравенства (В.19) при соответствующем выборе последовательности $\alpha_k(v)$ и функции $\varphi(u)$ очевидным образом приходим к неравенству С.Б. Стечкина [122]:

$$\left\| f(x) - \sigma_n(f;x) \right\|_C \leq \frac{K}{n} \sum_{k=1}^{n} E_k(f)_C , \tag{В.20}$$

где $\sigma_n(f;x)$ – суммы Фейера ряда Фурье (В.1).

Неравенство (В.19) гласит о том, что α-средние последовательности φ-отклонений $\varphi(|\rho_k(f;x)|)$ с точностью до постоянного множителя $K = K(\varphi)$ не превышают α-средних последовательности φ-наилучших приближений $\varphi(E_k(f)_C)$.

Новый подход к исследованию вопросов скорости сильной аппроксимации периодических функций был предложен А.И. Степанцом [106, 108, 111, 112] (см., также, [118, 119]). Им было предложено рассматривать задачи сильной аппроксимации функций на классах $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$, $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L$, которые определяются на основе преобразований их рядов Фурье с помощью мультипликаторов и сдвигов по аргументу, охватывающих широкий спектр функций, включая функции с расходящимися рядами Фурье, гладкие, бесконечно дифференцируемые, в том числе аналитические и целые. Упомянутые классы функций введены А.И. Степанцом[104-111] в связи с исследованиями экстремальных задач теории приближения функций. А.И. Степанцом и Н.Л. Пачулиа [118, 119], Н.Л. Пачулиа [82, 85] получен ряд результатов в отношении поведения величин вида (В.12) на классах функций $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$, $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ в терминах наилучших приближений их так называемых (ψ, β)-производных. Эти результаты дают возможность обнаружить новые эффекты, которые в шкале ранее известных классов не представлялось возможным отразить. Впоследствии некоторые аналогичные задачи рассматривались А.И. Степанцом [111, 112] на так называемых классах $\overline{\psi}$ -интегралов, охватывающих классы C_β^ψ

$\mathfrak{N}$, $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ и представляющих собой большие объединения периодических функций, включая классы Вейля-Надя и Соболева, а также классы функций, определяющиеся свертками с произвольными суммируемыми ядрами.

Аппроксимационные свойства интегральных аналогов функционалов (В.12) изучались в работах [85], [113].

В 1969 году G. Freud [148] обнаружил связь между структурными свойствами периодических функций и их сильной аппроксимации на основе которой, им были сформулированы некоторые обратные теоремы сильной аппроксимации функций. Дальнейшее свое развитие это направление получило в работах Л. Лейндлера и Е.М. Никишина [65], Л.Лейндлера [67], В.Г. Кротова и Л. Лейндлера [41], В.Г. Кротова [40], К.И. Осколкова [80], J. Szabados'a [125], В. Тотика [135, 136], Х.-Ю. Шмайсера и В. Зикеля [156] Н.Л. Пачулиа [85] и др.

Задача "лакунарной" сильной суммируемости рядов Фурье об определении свойств последовательности чисел $\{n_k\}$ для того, чтобы

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|f(x)-S_{n_k}(f;x)\right|\to 0$$

равномерно $\forall f \in C$ изучалась в работах [6], [11], [71], [98], [126], [139] и др.

Двойственность между сильной суммируемостью ряда Фурье и неравенствами типа Сидона [100] установлена в [149]. В работе [43] исследовалась связь между кратной сильной суммируемостью рядов Фурье по кругам и полиэдрам и неравенствами типа Сидона.

Некоторые аспекты теории сильной суммируемости в пространствах Харди H_p $(p>0)$ рассматривались в работах [102], [7-9], [142], [96] и др.

ГЛАВА I
СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Данная глава содержит результаты о метрических свойствах интегрируемых по Лебегу функций и точечных множеств действительной оси. Дается определение ортогональных систем функций, обладающих так называемым B-свойством и приводятся достаточные условия для того, чтобы та или иная система функций обладала B-свойством. На этой основе охарактеризованы множества точек полной меры на отрезке, в которых имеет место сильная суммируемость рядов Фурье интегрируемых с весом функций по равномерно ограниченным ортогональным системам функций полиномиального вида.

§1.1. Метрические свойства суммируемых функций и точечных множеств.

Пусть $f(x)$ – функция, суммируемая на конечном интервале (a,b) с весом $\omega(x)\left(f \in L^{(\omega)}(a,b)\right)$. Всюду далее $\omega(x)$ суммируема на (a,b) и почти всюду $\omega(x) > 0$. Если $\omega(x) \equiv 1$, то вместо $L^{(\omega)}(a,b)$ будем писать $L(a,b)$.

Введём в рассмотрение величину $h_{n,s}^{(\omega)}(f;x)$, характеризующую локальные метрические свойства функции $f(x)$ в точке x, которая эквивалентна величине $\Gamma_{n,s}(f;x)$ (см. B.10) в том смысле, что соотношения (B.11) и

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,s}^{(\omega)}(f,x) = 0 \text{ при } \omega(x) \equiv 1 \tag{1.1}$$

могут выполняться только одновременно.

Ниже показывается, что для любого $f \in L^{(\omega)}(a,b)$ множество точек x, в которых выполняется (1.1), имеет полную меру на $[a,b]$.

Определение 1.1. *Пусть* $f(x)$ *– суммируемая весом* $\omega(x)$ *на интервале* (a,b) *функция,* $x\in(a,b)$ *и* $u_\delta(x)$ *– окрестность точки x, целиком лежащая на* (a,b). *При каждом натуральном n разобьем* $u_\delta(x)$ *на 2n равных частей* $\Delta_k^{(n)}=\Delta_k^{(n)}(\delta)$, *k=-n,…,-1,1,…,n, точками* $x_k = x+\delta k/n$, $|k|=0,1,\ldots,n$, *и при некотором* $p>1$ *рассмотрим величину*

$$h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)=\sum_{1\le|k|\le n}\left(\frac{n}{|k|}\int_{\Delta_k^{(n)}}|f(t)-f(x)|\omega(t)dt\right)^p . \tag{1.2}$$

Точку x назовем $h_{p,\omega}$ *– точкой функции* $f(x)$, *если*

$$\lim_{n\to\infty}h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)=0 . \tag{1.3}$$

Множество всех $h_{p,\omega}$ – точек функции $f(x)$ на промежутке (a,b) обозначим через $H_p^{(\omega)}$, $H_p^{(\omega)}=\left\{x\in(a,b):\lim\limits_{n\to\infty}h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)=0\right\}$. Множество отрезков $\Delta_k^{(n)}$, $|k|=1,2,\ldots,n$, входящих в это определение, будем обозначать через $D_n(\delta)$.

Определение $h_{p,\omega}$ – точки данной функции $f(x)$ не зависит от радиуса окрестности δ, т.е. справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть* $x\in(a,b)$, $0<\delta<\delta_1$, *и окрестности* $u_\delta(x)$ *и* $u_{\delta_1}(x)$ *лежат на* (a,b). *Тогда для любой функции* $f\in L^{(\omega)}(a,b)$ *соотношения*

$$\lim_{n\to\infty}h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1)=0 \tag{1.4}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} h_{m,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)=0 \tag{1.5}$$

могут выполняться только одновременно.

Для доказательства этого предложения используется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть E – измеримое по Лебегу ограниченное множество и при каждом натуральном n* $e_k^{(n)}$, $k=1,2,...,m_n$ *– совокупность непересекающихся измеримых подмножеств E, для которых*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k\le m_n} mes e_k^{(n)}=0\,. \tag{1.6}$$

Тогда для любой суммируемой с весом $\omega(x)$ *функции* $f(x)$ *и любого p>1*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\int_{e_k^{(n)}}|f(t)|\omega(t)dt\right)^p=0\,.$$

Доказательство. Пусть

$$\int_{e_k^{(n)}}|f(t)|\omega(t)dt=i_k^{(n)}\,,\ i_{k_n}=\max_{k\le m_n} i_k^{(n)}\,.$$

Тогда при каждом фиксированном n имеем

$$\sum_{k=1}^{m_n}\left(i_k^{(n)}\right)^p=\sum_{k=1}^{m_n}\left(i_k^{(n)}\right)^{p-1}i_k^{(n)}\le\left(i_{k_n}\right)^{p-1}\sum_{k=1}^{m_n}i_k^{(n)}\le\left(i_{k_n}\right)^{p-1}\int_E|f(t)|\omega(t)dt\,.$$

Остается заметить, что в силу абсолютной непрерывности интеграла и условия (1.6)

$$\lim_{n\to\infty} i_{k_n}=0\,.$$

Доказательство предложения 1.1. Пусть при достаточно больших n и m $\Delta_k^{(n)}(\delta_1)$ и $\Delta_k^{(m)}(\delta)$ – отрезки, входящие в определение величин соответственно $h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1)$ и $h_{m,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)$. Обозначим через

m_n номер отрезка $\Delta_k^{(n)}(\delta_1)$, который содержит точку $x+\delta$ (если таких отрезков окажется два, пусть m_n обозначает номер отрезка, для которого точка $x+\delta$ совпадает с его левым концом). Разобьем окрестность $u_\delta(x)$ на $2m_n$ равных частей $\widetilde{\Delta}_k^{(m_n)} = \widetilde{\Delta}_k^{(m_n)}(\delta)$, $|k| = 1,2,\ldots,m_n$, рассмотрим величину $h_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)$ и прежде всего убедимся, что соотношения (1.5) и равенство

$$\lim_{n\to\infty} h_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta) = 0, \tag{1.7}$$

могут выполнятся только одновременно.

В рассматриваемом случае

$$\frac{\delta_1}{n}(m_n - 1) \le \delta < \frac{\delta_1 m_n}{n}$$

или

$$\frac{\delta}{\delta_1} n < m_n \le \frac{\delta}{\delta_1} n + 1, \tag{1.8}$$

откуда следует, что при достаточно больших n

$$m_{n+1} - m_n < \frac{\delta}{\delta_1} + 1 < 2,$$

т.е. при увеличении значения n на единицу значения m_n может увеличиваться только на единицу; в то же время ясно, что последовательность (m_n) не убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$. Отсюда заключаем, что последовательность (m_n), монотонно не убывая, начиная с некоторого номера n_0 пробегает все значения натурального ряда, возможно принимая некоторые из них подряд конечное число раз. Остается заметить, что при $m = m_n$ величины $h_{m,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)$ и $h_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)$ совпадают. Таким образом, равенства (1.5) и (1.7) могут выполняться только одновременно.

Покажем теперь, что соотношения (1.4) и (1.7) могут выполнятся только одновременно, откуда и будет следовать предложение 1.1.

Имеем

$$h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1)=\sum_{1\le|k|\le m_n}\left(\frac{n}{|k|}\int_{\Delta_k^{(n)}}|f(t)-f(x)|\omega(t)dt\right)^p+$$

$$+\sum_{m_n<|k|\le n}\left(\frac{n}{|k|}\int_{\Delta_k^{(n)}}|f(t)-f(x)|\omega(t)dt\right)^p\overset{df}{=}\widetilde{h}_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1)+\widetilde{r}_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1),\qquad(1.9)$$

причем в силу (1.8) при достаточно больших n найдется постоянная M такая, что при $m_n\le|k|\le n$ будет $\frac{n}{|k|}\le M$ и тогда

$$r_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1)\le M^p\sum_{m_n\le|k|\le n}\left(\frac{n}{|k|}\int_{\Delta_k^{(n)}}|f(t)-f(x)|\omega(t)dt\right)^p.$$

Так как значение $f(x)$ конечно, то функция $\overline{\varphi}_x(t)=f(t)-f(x)$ суммируема с весом $\omega(t)$ на (a,b); $mes\Delta_k^{(n)}=\frac{\delta_1}{n}$, т.е. выполнены все условия леммы 1.1, применяя которую, заключаем, что в рассматриваемом случае

$$\lim_{n\to\infty}r_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1)=0\qquad(1.10)$$

и остается показать, что равенства (1.7) и

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{h}_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1)=0\qquad(1.11)$$

могут выполнятся только одновременно.

Промежутки $\widetilde{\Delta}_k^{(m_n)}$ короче промежутков $\Delta_k^{(n)}$, поэтому

$$\int\limits_{\widetilde{\Delta}_1^{(m_n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt \le \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt$$

и при $k > 1$

$$\left(\frac{n}{|k|}\int\limits_{\widetilde{\Delta}_k^{(m_n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt\right)^p \le \left(\frac{n}{|k|}\int\limits_{\Delta_{k-1}^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt + \frac{n}{|k|}\int\limits_{\Delta_n^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt\right)^p \le$$

$$\le 2^p\left(\left(\frac{n}{|k-1|}\int\limits_{\Delta_{k-1}^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt\right)^p + \left(\frac{n}{|k|}\int\limits_{\Delta_n^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt\right)^p\right).$$

Ясно, что аналогичная оценка справедлива и при $k < -1$. Поэтому, обозначая через $K_p = K(p)$ величину, которая может зависеть только от *p*, и учитывая, что согласно (1.8)

$$\frac{\delta}{\delta_1} < \frac{m_n}{n} \le \frac{\delta}{\delta_1} + \frac{1}{n},$$

получаем

$$h_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta) \le K_p \widetilde{h}_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1). \tag{1.12}$$

Отсюда заключаем, что из равенства (1.11) следует (1.7).

Чтобы показать, что из (1.7) вытекает (1.11), заметим, что при $k \ge 1$

$$\widetilde{\Delta}_k^{(m_n)} = \left[x + \frac{\delta}{m_n}(k-1), x + \frac{\delta}{m_n}k\right],\ \widetilde{\Delta}_k^{(n)} = \left[x + \frac{\delta_1}{n}(k-1), x + \frac{\delta_1}{n}k\right],$$

откуда с учетом (1.8) легко заключаем, что

$$\Delta_1^{(n)} \subset \widetilde{\Delta}_1^{(m_n)} \cup \widetilde{\Delta}_2^{(m_n)},\ \Delta_1^{(n)} \subset \widetilde{\Delta}_{k-1}^{(m_n)} \cup \widetilde{\Delta}_{k+1}^{(m_n)},\ k = 2,3,\ldots,m_n - 1$$

(1.13)

Поэтому с учётом (1.8)

$$\left(m_n \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt \right)^p \le \left(n \int\limits_{\widetilde{\Delta}_1^{(m_n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt + n \int\limits_{\widetilde{\Delta}_2^{(m_n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt \right)^p \le$$

$$\le K_p \left(\left(n \int\limits_{\widetilde{\Delta}_1^{(m_n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt \right)^p + \left(\frac{n}{2} \int\limits_{\widetilde{\Delta}_2^{(m_n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt \right)^p \right). \qquad (1.14)$$

Аналогично, в силу (1.13) и (1.8) при $k = 2,3,...,m_n - 1$,

$$\left(\frac{m_n}{k} \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt \right)^p \le$$

$$\le K_p \left(\left(\frac{n}{k-1} \int\limits_{\widetilde{\Delta}_{k-1}^{(m_n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt \right)^p + \left(\frac{n}{k} \int\limits_{\widetilde{\Delta}_k^{(m_n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt \right)^p + \left(\frac{n}{k+1} \int\limits_{\widetilde{\Delta}_k^{(m_n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt \right)^p \right)$$

(1.15)

Ясно, что оценки, аналогичные неравенствам (1.14), (1.15), справедливы и при $k = -1,-2,...,-m_n$. Поэтому

$$\widetilde{h}_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta_1) \le K_p \left(h_{m_n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta) + \left(\int\limits_{\Delta_{m_n}^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\right| \omega(t)dt \right)^p \right). \qquad (1.16)$$

Отсюда, с учетом леммы 1.1 вытекает, что если выполняется равенство (1.7), то выполняется и (1.11), что и завершает доказательство предложения 1.1.

Замечание. *В принятых обозначениях положим*

$$h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;x;\delta) \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta_k^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p ,$$

$$h_{n,p}^{(\omega)_-}(f;x;\delta) \le \sum_{k=-n}^{-1} \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta_k^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p$$

и заметим, что равенство (1.3) возможно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;x;\delta) = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)_-}(f;x;\delta) = 0 . \qquad (1.17)$$

При доказательстве предложения 1.1 фактически установлено, что соотношения

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;x;\delta_1) = 0 \qquad (1.18)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} h_{m,p}^{(\omega)_+}(f;x;\delta) = 0 , \qquad (1.18')$$

а также соотношения

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)_-}(f;x;\delta_1) = 0 \qquad (1.19)$$

и

$$\lim_{m\to\infty} h_{m,p}^{(\omega)_-}(f;x;\delta) = 0 \qquad (1.19')$$

могут выполняться только одновременно.

Значит, если x есть h_{p,ω^-} точка функции $f(x)$, то необходимо выполняются все равенства (1.17) – (1.19’). С другой стороны, справедливость одной из пар равенств (1.18) и (1.19), (1.18) и (1.19’), (1.18’) и (1.19), а также (1.18’) и (1.19’) влечет справедливость остальных пар, а следовательно, и тот факт, что $x \in H_p^{(\omega)}$. Отсюда с учетом предложения 1.1 заключаем, что в определении h_{p,ω^-} – точки окрестность $u_\delta(x)$можно заменить любым интервалом, содержащим точку *x* и лежащим на (a,b). Таким образом, приходим к следующему эквивалентному определению h_{p,ω^-} – точки функции $f(x)$.

Определение 1.2. *Пусть* $f \in L^{(\omega)}(a,b)$, $x \in (a,b)$ *и* (c,d)*– любой интервал такой, что* $x \in (c,d)$ *и* $a \le c < d \le b$. *При каждых натуральных n и m разобьем промежутки* $[c,x]$ *и* $[x,d]$*соответственно на n и m равных частей* $\Delta_k^{(n)}$, $k=-n,...,-1$, *и* $\Delta_i^{(m)}$ $i=1,2,...,m$, *и при некотором* $p>1$ *рассмотрим величину*

$$h_{n,m,p}^{(\omega)}(f;x)=\sum_{k=-n}^{-1}\left(\frac{n}{|k|}\int_{\Delta_k^{(n)}}|f(t)-f(x)|\omega(t)dt\right)^p+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{m}{i}\int_{\Delta_i^{(m)}}|f(t)-f(x)|\omega(t)dt\right)^p. \qquad (1.20)$$

Точку x назовем $h_{p,\omega}$ *– точкой функции* $f(x)$, *если*

$$\lim_{n,m\to\infty} h_{n,m,p}^{(\omega)}(f;x)=0. \qquad (1.21)$$

Лемма 1.2. *Для любой функции* $f \in L^{(\omega)}(a,b)$, *при любых* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *и* $\delta>0$ *почти всюду на [a,b] справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)=0, \qquad (1.22)$$

где $h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)$ *– величина, определяемая соотношением (1.2).*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда почти всюду на *[a,b]*

$$0 < \alpha \leq \omega(x) \leq K < \infty, \; K \equiv const. \qquad (1.23)$$

В этом случае условие $f \in L^{(\omega)}(a,b)$ равносильно условию $f \in L(a,b)$ и при каждом $n \in N$

$$\sum_{1 \leq |k| \leq n} \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta_k^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t) dt \right)^p \leq K^p \sum_{1 \leq |k| \leq n} \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta_k^{(n)}} |f(t) - f(x)| dt \right)^p .$$

Поэтому достаточно показать, что для любой функции $f \in L(a,b)$ при любых p>1 и $\delta > 0$ почти всюду на *[a,b]*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta_k^{(n)}} |f(t) - f(x)| dt \right)^p = 0. \qquad (1.24)$$

Этот факт следует из упомянутого в введении результата О.Д. Габисония (В.11) и предложения 1.1.

Действительно, пусть для определенности $a = 0$ и $b = 2\pi$. Ясно, что общий случай сводится к этому путем линейной замены переменной и, следовательно, такое допущение не умоляет общности.

Пусть $F(x) - 2\pi$ – периодическое продолжение функции $f(x)$ и x – произвольная точка из (a,b). Тогда величины $h_{n,p}^{(\omega)}(F;x;\pi)$ при $\omega(x) \equiv 1$ и $\Gamma_{n,p}(F;x)$совпадают. Поэтому, если выполняется равенство (В.11) для функции $F(x)$, то в данной точке

$$\lim_{n \to \infty} h_{n,p}^{(\omega)}(F;x;\pi) = 0. \qquad (1.25)$$

Но в таком случае в силу предложения 1.1 для достаточно малых δ будет выполнятся и равенство (1.22). Согласно (В.11), множество точек, в которых

$$\lim_{n \to \infty} \Gamma_{n,p}(F;x;\pi) = 0$$

имеет полную меру на $(0,2\pi)$. Стало быть, и множество точек в которых выполняется (1.22), также имеет полную меру. Итак, если выполнено условие (1.23) лемма доказана.

Заметим, что из только что приведенных рассуждений вытекает, что условие (В.11) имеет локальный характер в том смысле, что его выполнение зависит только от поведения функции $f(x)$ в произвольно малой окрестности рассматриваемой точки *x*.

При доказательстве леммы в общем случае будем придерживаться схемы рассуждений из [14].

Пусть сначала Т – подмножество точек из *[a,b]*, в которых выполняется равенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left|f(t)-f(x)\right|\omega(t)dt=0\,, \tag{1.26}$$

и, кроме того, при достаточно малых δ и $\gamma(x)\equiv 1$ почти всюду

$$\lim_{n\to\infty}h_{n,p}^{(\gamma)}(f;x;\delta)=0\,. \tag{1.27}$$

В силу упомянутого результата О.Д. Габисония и справедливости леммы в случае выполнения условия (1.23) заключаем, что $|\mathrm{T}|\overset{df}{=}mes\mathrm{T}=b-a$.

Далее, пользуясь теоремой Егорова, из множества T при каждом натуральном *k* выделим множества T_k, $|\mathrm{T}_k|>b-a-1/k$, на которых равенства (1.26) и (1.27)выполняются равномерно по *x*.

Ясно, что

$$\left|\bigcup_k \mathrm{T}_k\right|=b-a\,. \tag{1.28}$$

Из каждого множества T_k, пользуясь С – свойством Лузина, выделим совершенное множество P_k, $|\mathrm{P}_k|>|\mathrm{T}_k|-1/k$, на котором

$$\sup_{x\in \mathrm{P}_k}\left|f(x)\right| < A_k \tag{1.29}$$

и

$$\sup_{x\in \mathrm{P}_k}\left|\omega(x)\right| < B_k \tag{1.29'}$$

где A_k и B_k – некоторые константы.

Наконец, из каждого множества P_k выделим множество E_k, имеющее то свойство, что для каждого $x \in E_k$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}}{\rho\left(x;\alpha_j^{(k)},\beta_j^{(k)}\right)}\right)^p < \infty, \ p>1, \tag{1.30}$$

где $\alpha_j^{(k)}$ и $\beta_j^{(k)}$ – концы смежных интервалов множества P_k, а $\rho(x;\alpha,\beta)$ – расстояние от точки *x* до интервала (α,β).

В силу известного утверждения Марцинкевича (см., например, [5, с. 213]) $\left|E_k\right| = \left|P_k\right|$. И, значит, с учетом (1.28) будем иметь

$$\left|\bigcup_k E_k\right| = b-a.$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно убедиться, что равенство (1.22) выполняется для каждого $x \in \bigcup_k E_k$ при произвольном достаточно малом $\delta > 0$.

Покажем, что для каждого $x \in \bigcup_k E_k$ при любом $\delta > 0$ величина

$$h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;x;\delta) = \sum_{i=1}\left(\frac{n}{i}\int_{\Delta_i^{(n)}}\left|f(t)-f(x)\right|\omega(t)dt\right)^p \tag{1.32}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$.

Пусть k_0 такое, что $x \in E_{k_0}$ и $u_\delta(x)$ – окрестность точки x, целиком лежащая на (a,b), $\{\Delta_i^{(n)}\}$, $i=-n,\ldots,-1,1,\ldots,n$ – равномерное разбиение этой окрестности на $2n$ частей такое, что

$$\Delta_i^{(n)} = \begin{cases} \left[x+\frac{i-1}{n}\delta, x+\frac{i\delta}{n}\right], i=1,2,\ldots n; \\ \left[x+\frac{i\delta}{n}, x+\frac{i+1}{n}\delta\right], i=-n,\ldots,-1. \end{cases} \tag{1.33}$$

Пусть, далее,

$$I_1 = \left\{i : \Delta_i^{(n)} \bigcap P_{k_0} \neq \emptyset\right\},\ I_2 = \left\{i : \Delta_i^{(n)} \bigcap P_{k_0} = \emptyset\right\}. \tag{1.34}$$

Тогда величина (1.32) представится в виде

$$h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;x;\delta) = \sum\nolimits_1 (f;n;x) + \sum\nolimits_2 (f;n;x), \tag{1.35}$$

где

$$\sum\nolimits_1 (f;n;x) = \sum_{i\in I_1} \left(\frac{n}{i} \int_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t) dt \right)^p,$$

$$\sum\nolimits_2 (f;n;x) = \sum_{i\in I_2} \left(\frac{n}{i} \int_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t) dt \right)^p.$$

Рассмотрим сначала величину $\sum_1 (f;n;x)$. Если $i \in I_1$, то согласно (1.34) на промежутке $\Delta_i^{(n)}$ имеется точка из P_{k_0}, которую обозначим через y. Тогда, полагая $t = u + y$ и $\tau = x + \frac{i\delta}{n} - y$, будем иметь

$$n\int\limits_{\Delta_i^{(n)}}\left|f(t)-f(x)\right|\omega(t)dt=n\int\limits_{\tau-\frac{\delta}{n}}^{\tau}\left|f(u+y)-f(x)\right|\omega(u+y)du\le$$

$$\le n\int\limits_{-2\frac{\delta}{n}}^{2\frac{\delta}{n}}\left|f(t+y)-f(y)\right|\omega(t+y)dt+n\int\limits_{-2\frac{\delta}{n}}^{2\frac{\delta}{n}}\left|f(y)-f(x)\right|\omega(t+y)dt. \qquad (1.36)$$

По построению имеем $E_k\subseteq P_k\subseteq T_k\subseteq T$. В силу определений этих множеств, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\gamma>0$ (возможно, зависящее от k, ε) такое, что при $|h|<\gamma$ будет выполняться неравенство

$$\sup_{x\in T_k}\frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h}\left|f(x+t)-f(x)\right|\omega(x+t)dt<\varepsilon \qquad (1.37)$$

и найдется натуральное n_0 (возможно зависящее от ε, k и δ) такое, что при $n\ge n_0$

$$\sup_{x\in T_k}\sum_{1\le i\le n}\left(\frac{n}{|i|}\int\limits_{\Delta_i^{(n)}}\left|\omega(t)-\omega(x)\right|dt\right)^p<\varepsilon. \qquad (1.38)$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $x\in E_{k_0}$, а $y\in P_{k_0}$ на основании (1.37) и (1.38), (1.29) и (1.29’) заключаем, что правая часть (1.35) не превышает некоторой постоянной C_{k_0}, которая возможно, зависит от числа k_0. Таким образом,

$$n\int\limits_{\Delta_i^{(n)}}\left|f(t)-f(x)\right|\omega(t)dt\le C_{k_0}\quad \forall i\in I_1 \qquad (1.39)$$

Пусть $\varepsilon>0$ – произвольно малое число. Обозначим через N_ε натуральное число, для которого

$$\sum_{i \geq N_\varepsilon} \frac{1}{i^p} \leq \varepsilon \tag{1.40}$$

и положим

$$I_1 = I_1' \cup I_1'',\ I_1' = \{i \in I_1, i \leq N_\varepsilon\},\ I_1'' = \{i \in I_1, i \leq N_\varepsilon\}.$$

Тогда в силу (1.39)

$$\sum\nolimits_1 (f;n;x) = \sum_{i \in I_1'} \left(\frac{n}{i} \int_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t) dt \right)^p + C_{k_0} \cdot \varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{i \in I_1'} \left(n \int_{(i-1)\delta/n}^{i\delta/n} |f(x+t) - f(x)| \omega(x+t) dt \right)^p + C_{k_0} \varepsilon \leq$$

$$\leq \left(n \int_0^{N_\varepsilon \delta/n} |f(x+t) - f(x)| \omega(x+t) dt \right)^p + C_{k_0} \varepsilon . \tag{1.41}$$

Так как $x \in E_{k_0}$, то в силу (1.37) при достаточно больших значениях n первое слагаемое правой части (1.41) будет меньше ε. Таким образом, справедлива оценка

$$\sum\nolimits_1 (f;n;x) \leq (C_{k_0} + 1)\varepsilon$$

для всех достаточно больших значений n. Отсюда в силу произвольности выбора ε имеем

$$\lim_{n \to \infty} \sum\nolimits_1 (f;n;x) = 0 \tag{1.42}$$

Покажем теперь, что и

$$\lim_{n \to \infty} \sum\nolimits_2 (f;n;x) = 0 . \tag{1.43}$$

Пусть опять $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число и N_ε выбрано из условия (1.40). Положим

$$I_2 = I_2' \cup I_2'',\ I_2' = \{i \in I_2,\ i \le N_\varepsilon\},\ I_2'' = \{i \in I_2,\ i > N_\varepsilon\}.$$

Тогда

$$\sum\nolimits_2 (f;n;x) \le \left(\sum_{i \in I_2'} + \sum_{i \in I_2''} \right) \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t) dt \right)^p \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} \sum\nolimits_2^{(1)} (f;n;x) + \sum\nolimits_2^{(2)} (f;n;x). \tag{1.44}$$

Поступая так же, как и при получении оценки (1.41), будем иметь

$$\sum\nolimits_2^{(1)} (f;n;x) \le \left(n \int\limits_0^{N_\varepsilon \delta/n} |f(x+t) - f(x)| \omega(x+t) dt \right)^p$$

и так как x является (p,ω) – точкой Лебега функции f, то в силу (1.26)

$$\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_2^{(1)} (f;n;x) = 0. \tag{1.45}$$

Пусть $\delta_j^{(k_0)} = \left(\alpha_j^{(k_0)}, \beta_j^{(k_0)}\right)$, $j = 1,2,...$, – смежные интервалы множества P_{k_0}. Тогда, опуская индексы k_0, находим

$$\sum\nolimits_2^{(2)} (f;n;x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_2''} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)} \subset \delta_j} |f(t) - f(x)| \omega(t) dt \right)^p \le$$

$$\le 2^p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_2''} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)} \subset \delta_j} |f(t) - f(\alpha_j)| \omega(t) dt \right)^p +$$

$$+ 2^p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_2''} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)} \subset \delta_j} |f(\alpha_j) - f(x)| \omega(t) dt \right)^p \overset{df}{=}$$

$$\stackrel{df}{=}\sum\nolimits_2^{(3)}(f;n;x)+\sum\nolimits_2^{(4)}(f;n;x). \qquad (1.46)$$

Так как $x\in E_{k_0}$ и $\alpha_j\in P_{k_0}$, то принимая во внимание (1.29), находим

$$\sum\nolimits_2^{(4)}(f;n;x)\le C_{p,k_0}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in I_2''}\left(\frac{n}{i}\int\limits_{\Delta_i^{(n)}\subset\delta_j}\omega(t)dt\right)^p\le$$

$$\le C_{p,k_0}\sum_{i\ge N_\varepsilon}\left(\frac{n}{i}\int\limits_{\Delta_i^{(n)}}\omega(t)dt\right)^p\le$$

$$\le C_{p,k_0}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{n}{i}\int\limits_{\Delta_i^{(n)}}\left|\omega(t)-(x)\right|dt\right)^p+C_{p,k_0}\sum_{i\ge N_\varepsilon}\left(\frac{\omega(x)}{i}\right)^p,$$

где C_{p,k_0} – величины, равномерно ограниченные по *n*.

Принимая во внимание соотношение (1.38), (1.29) и (1.40), заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum\nolimits_2^{(4)}(f;n;x)=0. \qquad (1.47)$$

На основании (1.30) для произвольного $\varepsilon>0$ найдется число N_ε такое, что

$$\sum_{j\ge N_\varepsilon}\left(\frac{\beta_j^{(k_0)}-\alpha_j^{(k_0)}}{\rho\left(x;\alpha_j^{k_0},\beta_j^{(k_0)}\right)}\right)^p<\varepsilon. \qquad (1.48)$$

Величину $\sum\nolimits_2^{(3)}(f;n;x)$ представим в виде

$$\sum\nolimits_2^{(3)}(f;n;x)=2^p\left(\sum_{j\le N_\varepsilon}+\sum_{j\ge N_\varepsilon}\right)\sum_{i\in I_2''}\left(\frac{n}{i}\int\limits_{\Delta_i^{(n)}\subset\delta}\left|f(t)-f(\alpha_j)\right|\omega(t)dt\right)^p=$$

$$\stackrel{df}{=} \sum\nolimits_2^{(5)}(f;n;x) + \sum\nolimits_2^{(6)}(f;n;x). \tag{1.49}$$

Если $\Delta_i \subset \delta_j$, понятно, что

$$\frac{n}{i} \le \frac{1}{\alpha_j - x}. \tag{1.50}$$

Поэтому применяя тот же прием, что и при доказательстве леммы 1.1, имеем

$$\sum\nolimits_2^{(5)}(f;n;x) = \sum_{j \le N_\varepsilon}^{\infty} \sum_{i \in I_2''} (\alpha_j - x)^{-1} \left(\int\limits_{\Delta_i^{(n)} \subset \delta_j} |f(t) - f(x)| \omega(t) dt \right)^p \le$$

$$\le 2^p \max_{1 \le j \le N_\varepsilon} (\alpha_j - x)^p \sup_{1 \le i \le n} \left(\int\limits_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(\alpha_j)| \omega(t) dt \right)^{p-1} \cdot J_n(f) \tag{1.51}$$

При этом в силу того, что $\alpha_j \in P_{k_0}$,

$$J_n(f) = \sum_{j \le N_\varepsilon} \sum_{i \in I_2''} \int\limits_{\Delta_i^{(n)} \subset \delta_j} |f(t) - f(\alpha_j)| \omega(t) dt =$$

$$= \sum_{j \le N_\varepsilon} \int\limits_{\delta_j} |f(t) - f(\alpha_j)| \omega(t) dt \le C, \tag{1.52}$$

где C – величина, равномерно ограниченная по n.

В силу абсолютной непрерывности интеграла

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{1 \le i < n} \left(\int\limits_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(\alpha_j)| \omega(t) dt \right)^{p-1} = 0. \tag{1.53}$$

Объединяя соотношения (1.51)–(1.53), заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum\nolimits_2^{(5)}(f;n;x)=0\,. \tag{1.54}$$

Наконец, рассмотрим величину $\sum\nolimits_2^{(6)}(f;n;x)$. Учитывая (1.50), имеем

$$\sum\nolimits_2^{(6)}(f;n;x)\le 2^p\sum_{j\ge N_\varepsilon}(\alpha_j-x)^{-p}\left(\sum_{i\in I_2''}\int_{\Delta_i^{(n)}\subset\delta_j}\left|f(t)-f(\alpha_j)\right|\omega(t)dt\right)^p\le$$

$$\le 2^p\sum_{j\ge N_\varepsilon}(\alpha_j-x)^{-p}\left(\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\left|f(t)-f(\alpha_j)\right|\omega(t)dt\right)^p\le$$

$$\le 2^p\sum_{j\ge N_\varepsilon}\left(\frac{\beta_j^{k_0}-\alpha_j^{(k_0)}}{\rho\left(x;_j^{(k_0)},\beta_j^{(k_0)}\right)}\right)^p\left(\frac{1}{\beta_j-\alpha_j}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\left|f(t)-f(\alpha_j)\right|\omega(t)dt\right)^p \tag{1.55}$$

Из (1.48) следует, что для любого $j\ge N_\varepsilon$

$$\beta_j-\alpha_j\le\rho(x;\alpha_j;\beta_j)\varepsilon\le(b-a)\varepsilon\,;$$

и так как $\alpha_j\in P_{k_0}$, в силу (1.37) величина

$$\frac{1}{\beta_j-\alpha_j}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\left|f(t)-f(\alpha_j)\right|\omega(t)dt$$

является равномерно ограниченной по j (и по *n*).

Поэтому, согласно (1.48) и (1.55), заключаем, что для произвольного n

$$\sum\nolimits_2^{(6)}(f;n;x)\le C\cdot\varepsilon\,,$$

где *C*– некоторая постоянная, откуда в силу произвольности ε следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_2^{(6)} (f;n;x) = 0\,, \tag{1.56}$$

Сопоставляя равенства (1.46), (1.47), (1.49), (1.54) и (1.56), находим

$$\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_2^{(2)} (f;n;x) = 0\,, \tag{1.57}$$

Из (1.57), (1.45) и (1.44) следует равенство (1.43), а из (1.35), (1.42) и (1.43) заключаем, что величина $h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;x;\delta)$ для любого $x \in \bigcup_k E_k$ действительно стремится к нулю при $n \to \infty$.

Понятно, что такое же заключение верно и для величины

$$h_{n,p}^{(\omega)_-}(f;x;\delta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_{-i}^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t) dt \right)^p ,$$

а значит, и для величины

$$h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta) = h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;x;\delta) + h_{n,p}^{(\omega)_-}(f;x;\delta).$$

Отсюда с учетом (1.31) убеждаемся в справедливости равенства (1.22) для почти всех $x \in [a,b]$, что и завершает доказательство леммы 1.2.

§1.2. В-свойство ортогональных систем

Приведем следующее определение.

Определение 1.3. *Пусть* $\{\varphi_k(t)\}$ *– произвольная последовательность функций, ограниченных на сегменте* $[a,b]$. *Будем говорить, что данная последовательность имеет свойство В (В-свойство) в точке* $x \in (a,b)$, *если существует* $\delta > 0$ *такое, что:*

1.) $u_\delta(x) \subset (a,b)$;

2.) для любого обобщенного полинома

$$T_u^{(\alpha)}(t)=\sum\nolimits_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(t)$$

с коэффициентами удовлетворяющими условию

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\alpha_k\right|^p\right\}^{1/p}\leq K\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{1.58}$$

справедливо неравенство

$$\sum_{1\leq|k|\leq n}\sup_{t\in\Delta_k^{(n)}}\left|T_n^{(\alpha)}(t)\right|^{p'}\leq K\,,\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right) \tag{1.59}$$

где $\Delta_k^{(n)}\in D_n(\delta)$, $|k|=1,2,\ldots,n$, *а K – постоянная, равномерно ограниченная по n.*

Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_k(t)\}$ *имеет свойство B на множестве* $e\subseteq(a,b)$, *если она имеет это свойство в каждой точке x множества e.*

Заметим, что это определение не зависит от величины δ в том смысле, что если для некоторого $\delta>0$ выполняется соотношение (1.59), то оно выполняется также и для всех $\delta_1<\delta$, в чём можно убедиться посредством простых рассуждений. В этом же смысле свойство *B* имеет локальный характер: его наличие в точке *x* зависит от поведения функций $\varphi_k(t)$ только в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Достаточные условия того, что система имеет свойство *B*, содержится в следующих утверждениях.

Лемма 1.3. *Пусть* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *– ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $\omega(t)$ *система функций и* $[c,d]$ *– некоторый отрезок, лежащий на* $[a,b]$, *т.е.* $[c,d]\subseteq[a,b]$, *на котором система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *равномерно ограничена:*

$$\sup_{\substack{t\in[c,d]\\ k\in N}}\left|\varphi_k(t)\right|\le K \tag{1.60}$$

и в каждой точке $t\in[c,d]$ $\omega(t)\ge\omega_0>0$. *Тогда, если для любого обобщенного полинома* $T_n^{(\alpha)}(t)$ *порядка n по системе* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *в точке* $x\in(c,d)$ *выполняется неравенство*

$$\left(\frac{\delta}{n}\sum_{1\le|k|\le}\sup_{t\in\Delta_k^{(n)}}\left|T_n^{(\alpha)}(t)\right|^{p'}\right)^{1/p'}\le K\left\|T_n\right\|_{p',(c,d)} \tag{1.61}$$

где δ *– некоторое положительное число такое, что* $u_\delta(x)\subset(c,d)$, $\Delta_k^{(n)}\in D_n(\delta)$ *и K – постоянная, равномерно ограниченная по n, то в данной точке x последовательность* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *удовлетворяют условию B.*

Доказательство данной леммы базируется на следующем утверждении, которое является обобщением известной теоремы Ф. Рисса (см., например, [35, с. 154]) на случай, когда отрезок ортогональности системы функций не совпадает с отрезком, на котором система равномерно ограничена.

Лемма 1.4. *Пусть* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *– ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $\omega(t)$ *система функций, которая равномерно ограничена на некотором сегменте* $[c,d]\subseteq[a,b]$.

Тогда:

1) если $f\in L_p^{(\omega)}(c,d)$, $1<p\le2$, *и* $f(x)\equiv0$ *при* $x\in[a,b]\setminus[c,d]$ *, то её коэффициенты Фурье по данной системе*

$$c_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\omega(x)dx\,,\ n=1,\ldots,$$

удовлетворяет неравенству

$$\left\| c_n \right\|_{p'} \overset{df}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n \right|^{p'} \right)^{1/p'} \le K \left\| f \right\|_{p,\omega(c,d)}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \tag{1.62}$$

2) если числовая последовательность (c_n), $n = 0,1,\ldots$, *имеет конечную норму* $\|c\|_p$, $1 < p \le 2$, *то существует функция* $f \in L_2^{(\omega)}(a,b)$ *такая, что её сужение* $f^*(x)$ *на множество* $[c,d]$ *принадлежит к* $f \in L_{p'}^{(\omega)}(c,d)$ *и справедливо неравенство*

$$\left\| f^* \right\|_{p',\omega(c,d)} \le K \|c\|_p, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.63}$$

Первая часть этой леммы доказана К. Тандори [127]. Справедливость второй части может быть установлена повторением рассуждений, с помощью которых в [35] доказана вторая часть теоремы Ф. Рисса с использованием утверждения первой части леммы. Неравенство (1.63) для системы алгебраических полиномов установлено в работе [44].

Перейдем непосредственно к **доказательству леммы 1.3.**

Пусть точка *x* и величина δ выбраны из условия леммы и $T_n^{(\alpha)}(t)$ – произвольный полином по системе $\{\varphi_k(t)\}_\omega$, удовлетворяющий условию (1.58). Тогда в силу (1.61) справедливо неравенство

$$\left(\frac{\delta}{n} \sum_{1 \le |k| \le n} \sup_{t \in \Delta_k^{(n)}} \left| T_n^{(\alpha)} \right|^{p'} \right)^{1/p'} \le K \left\| T_n^{(\alpha)} \right\|_{p',(c,d)}. \tag{1.64}$$

Учитывая, что $\omega(t) \ge \omega_0 > 0$, на основании второй части леммы 1.4 и условия (1.58) для любого $p' \ge 2$ получаем

$$\left\| T_n^{(\alpha)} \right\|_{p',(c,d)} \le \frac{1}{\omega_0^{1/p'}} \left(\int_c^d \left| T_n^{(\alpha)}(s) \right|^{p'} \omega(s) ds \right)^{1/p'} \le K \left\| \alpha_k^{(n)} \right\|_p \le K \left(1/n \right)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{1.65}$$

где K – постоянная, равномерно ограниченная по n и $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Сопоставляя (1.64) и (1.65), выводим оценку

$$\left(\frac{\delta}{n}\sum_{1\le|k|\le n}\sup_{t\in\Delta_k^{(n)}}\left|T_n^{(\alpha)}(t)\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\le K\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

откуда следует, что в данной точке x выполняется соотношение (1.59), что и завершает доказательство леммы 1.3.

В случае, когда в некоторой окрестности $u_\delta(x)$ точки x функции $\varphi_k(t)$ являются дифференцируемыми, используя рассуждения, с помощью которых в [77] была доказана лемма 2, на основании леммы 1.3 легко выводится следующее утверждение.

Лемма 1.5. *Пусть система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *удовлетворяет условиям леммы 1.3, кроме того, в некоторой окрестности* $u_\delta(x)\subset(c,d)$ *точки x функции* $\varphi_k(t)$ *являются дифференцируемыми и для всякого обобщенного полинома* $T_n(t)=T_n^{(\alpha)}(t)$ *порядка n по данной системе при некотором* $p\ge 1$ *справедлив аналог неравенства Бернштейна*

$$\left\|T_n'\right\|_{p,u_\delta(x)}\le Kn\left\|T_n\right\|_{p,(c,d)}. \tag{1.66}$$

Тогда в данной точке выполняется соотношение (1.61) и, значит, система $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *имеет свойство B в точке x.*

Следствие 1.1. *Если система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *удовлетворяет условию леммы 1.3, в каждой точке* $x\in(c,d)\subset[a,b]$ *функции* $\varphi_k(t)$ *дифференцируемы и для всякого обобщенного полинома* $T_n(t)$ *порядка n по данной системе при некотором* $p\ge 1$ *выполняется неравенство (1.66) для некоторого* $\delta>0$, *то в каждой точке* $x\in(c,d)$ *справед-*

ливо соотношение (1.61) и, значит система $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *имеет свойство B на всем (c,d).*

Тригонометрическая система 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, … удовлетворяет всем условиям следствия 1.1 при $\omega(x)\equiv 1$ на любом интервале длины 2π, поскольку для неё соотношение (1.60) выполняется автоматически, а соотношение (1.66) гарантируется неравенством Бернштейна для тригонометрических полиномов (см., например, [5, с. 895]).

Поэтому справедливо такое утверждение.

Лемма 1.6. *Тригонометрическая система имеет свойство B на всей действительной оси.*

Для всякого алгебраического полинома $p_n(t)$ степени n, как хорошо известно (см., например, [5]), справедлив следующий аналог неравенства Бернштейна:

$$\|p_n'\|_{p,(c,d)} \le Kn\|p_n\|_{p,(a,b)}$$

для любых $p \ge 1$ и $a < c < d < b$.

Поэтому из следствия 1.1 получаем следующее утверждение.

Лемма 1.7. *Пусть* $\{P_k(t)\}_\omega$ *– ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $\omega(t)$ *система алгебраических полиномов и* $[c,d]$*– некоторый отрезок такой, что* $[c,d]\subseteq[a,b]$ *на котором система* $\{P_k(t)\}_\omega$ *равномерно ограничена, и в то же время* $\omega(x)\ge\omega_0>0$ *для любого* $t\in[c,d]$. *Тогда данная система имеет свойство B на интервале* (c,d).

§1.3. Характеристика точек сильной суммируемости рядов Фурье по системам функций полиномиального вида

1.3.1. Пусть $f\in L^{(\omega)}(a,b)$, $\{\varphi_k(x)\}_\omega$, $k=0,1,\ldots$ – ортонормированная с весом $\omega(x)$ система функций и

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

– ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}_\omega$;

$$c_k = c_k(f) = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)\omega(t)dt, \ k = 0,1,...,$$

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

– её частная сумма порядка *n*. Пусть, далее,

$$H_n^{(q)}(f;x) = H_n^{(q)}(f;\varphi;x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x) - S_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q}$$

– сильные средние с показателем $q > 0$.

Аналог результата Харди и Литтлвуда для $f \in L_p$, $p > 1$, в случае ортогональных систем, отличных от тригонометрической, а именно, для систем функций $\{\varphi_k(x)\}_\omega$ полиномиального вида был получен К. Тандори [127] (см., также, [1,с. 289]) для функций $f \in L_p^{(\omega)}(a,b)$.

Определение А. ([1, с. 182]). *Ортонормированная на* [*a,b*] *с весом* $\omega(x)$ *система функций* $\{\varphi_k(x)\}_\omega$ *называется системой полиномиального вида, если её ядро порядка n*

$$\Phi_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x)$$

представимо в виде

$$\Phi_n(t,x) = \sum_{k=1}^{r} F_k(t;x) \sum_{i,j=-m}^{m} \gamma_{i,j,k}^{(n)} \varphi_{n+i}(t)\varphi_{n+j}(x)$$

где r и m – независящие от n натуральные числа, $\gamma_{i,j,k}^{(n)}$ *– величины, равномерно ограниченные по n, а* $F_k(t,x)$ *– измеримые функции, удовлетворяющие при всех* $x\in[a,b]$ *условию*

$$\left|F_k(t,x)\right|\le K\left|t-x\right|^{-1},$$

где K-величины, равномерно ограниченная по t и x. При этом функции $\varphi_{n+j}(x)$ *с отрицательными индексами считаются тождественно равными нулю.*

Системами полиномиального вида, в частности, являются тригонометрическая система, ортогональная система алгебраических полиномов, система Хаара, Уолша [3] и др.

Теорема А. *Пусть* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *– ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $\omega(x)$ *система функций полиномиального вида, равномерно ограниченная на отрезке* $[c,d]\subseteq[a,b]$*:*

$$\sup_{\substack{t\in[c,d]\\ k\in N}}\left|\varphi_k(t)\right|\le K,\ \ K\equiv const>0$$

и

$$\varphi_0(t)=\left(1\Big/\int_a^b\omega(t)dt\right)^{1/2}.$$

Тогда, если $f\in L_p^{(\omega)}(a,b)$*,* $p>1$ *и квадрат её суммируем на* $[a,b]\setminus[c,d]$ *с весом* $\omega(t)$*, то в каждой* (p,ω) *– точке Лебега* $x\in(c,d)$*, т.е. в точке, в которой*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left|f(t)-f(x)\right|^p\omega(t)dt=0, \tag{1.67}$$

при всех $q>0$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} H_n^{(q)}(f;x)=0 .$$

Хорошо известно, что (1.67) выполняется почти всюду на (a,b) $\forall f \in L_p^{(\omega)}(a,b)$.

Здесь приводится характеристика точек обобщенной сильной суммируемости, в частности, (H,q) – суммируемости рядов Фурье суммируемых с весом функций по системам полиномиального вида обладающим *B*-свойством.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть*

$$\{\varphi_k(t)\}_\omega,\ \varphi_0(t)\equiv\left(\frac{1}{\int_a^b \omega(t)dt}\right)^{1/2}$$

– ортонормированная с весом $\omega(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *система функций полиномиального вида, которая на множестве* $[c,d]\subseteq[a,b]$ *равномерно ограничена:*

$$\sup_{\substack{t\in[c,d]\\ k\in N}}|\varphi_k(t)|\le K . \tag{1.68}$$

Пусть, далее, x – произвольная точка интервала (c,d), *в которой данная система имеет свойство B.*

Тогда, если $f\in L^{(\omega)}(a,b)$, *на множестве* $E=[a,b]\setminus[c,d]$ *суммируем его квадрат с весом* $\omega(t)$ $\left(f\in L_2^{(\omega)}(E)\right)$ *и в данной точке x имеет конечное значение, то для любого* $\delta>0$, *входящего в определение B-свойства точки x, при любом* $q\ge 2$ *справедливо неравенство*

$$H_n^{(q)}(f;x;\varphi)\le K\left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)\right)^{1/p}+\varepsilon_n(x),\ \ \varepsilon_n(x)=\varepsilon_n(f;\delta;x) \tag{1.69}$$

где $h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)$ – *величина, определяемая равенством (1.2);* $p=\dfrac{q}{q-1}$ *; K – постоянна,я не зависящая от n, и*

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n(x)=0\,,\;\;\varepsilon_n(x)=\varepsilon_n(f;\delta;x).$$

Доказательство. Пусть x – точка, определяемая условиями теоремы и δ – величина, входящая в определение её B-свойства.

Поскольку

$$\varphi_0(t)\equiv\left(\frac{1}{\int\limits_a^b\omega(t)dt}\right)^{1/2},$$

то

$$\int\limits_a^b\Phi_k(t,x)\omega(t)dt=\int\limits_a^b\left(\sum_{i=0}^{k}\varphi_i(t)\varphi_i(x)\right)\omega(t)dt=1\,.$$

Поэтому, полагая $\overline{\varphi}_x(t)=f(t)-f(x)$, имеем

$$f(x)-S_k(f;x)=\int\limits_a^b\overline{\varphi}(t)\Phi_k(t,x)\omega(t)dt=\left(\int\limits_E+\int\limits_G+\int\limits_{u_\delta(x)}\right)\times$$

$$\times\overline{\varphi}_x(t)\Phi_k(t,x)\omega(t)dt\overset{df}{=}\sum_{\nu=1}^{3}J_{\nu,k}(x),\tag{1.70}$$

где $G=[c,d]\setminus u_\delta(x)$.

Отсюда с помощью известного неравенства Минковского для сумм [153, с. 46]

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x)-S_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q} \le \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|J_{\nu,k}(x)\right|^q\right)^{1/q} \overset{df}{=} \sum_{\nu=1}^{3}\left(\widetilde{J}_{\nu}^{(n)}(x)\right)^{1/q}. \quad (1.71)$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{J}_1^{(n)}(x)=0. \quad (1.72)$$

Пользуясь представлением ядра $\Phi_k(t,x)$ и равномерной ограниченностью величин $\gamma_{m,j,l}^{(n)}$ и $\varphi_n(t)$, находим

$$\left|J_{1,k}(x)\right| = \left|\int_E \overline{\varphi}_x(t)\Phi_k(t,x)\omega(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int_E \overline{\varphi}_x(t)\sum_{l=1}^{r}F_l(t,x)\sum_{m,j=-\sigma}^{r}\gamma_{m,j,l}^{(k)}\varphi_{k+m}(t)\varphi_{k+j}(x)\omega(t)dt\right| \le$$

$$\le K\sum_{l=1}^{r}\sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma}\left|\int_E \overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x)\varphi_{k+m}(t)\omega(t)dt\right| \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} K\sum_{l=1}^{r}\sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma}\left|\chi_{k+m}^{(l)}(x)\right|.$$

Величина $\chi_{k+m}^{(l)}(x)$ представляет собой $(k+m)$-й коэффициент разложения по системе $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ функции

$$y_x^{(l)}(t)=\begin{cases}\overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x), & t\in E;\\ 0, & t\notin E.\end{cases}$$

Вследствие свойства функции $F_l(t,x)$ заключаем, что $y_x^{(l)}(t)\in L_2^{(\omega)}(a,b)$. Известно, (см., например, [1, с. 15]), что коэффициенты $c_k(f)$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(\omega)}(a,b)$ по любой ортонормированной с весом на $[a,b]$ системе функций стремятся к нулю при $k \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \chi_{k+m}^{(l)}(x) = 0\,,\ m = -\sigma,\ldots,\sigma\,;\ l = 1,\ldots,r\,,$$

и, значит,

$$\lim_{k\to\infty} J_{1,k}(x) = 0\,.$$

Отсюда заключаем, что равенство (1.72)справедливо, поскольку $\widetilde{J}_1(x)$ является средним арифметическим величин, стремящихся к нулю при $n \to \infty$.

Проводя аналогические рассуждения, получаем

$$\left|J_{2,k}(x)\right| = \left|\int_G \overline{\varphi}_x(t)\Phi_k(t,x)\omega(t)dt\right| \le$$

$$\le K\sum_{l=1}^{r}\ \sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma}\left|\int_G \overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x)\varphi_{k+m}(x)\omega(t)dt\right| =$$

$$= K\sum_{l=1}^{r}\ \sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma}\left|\overline{\chi}_{k+m}^{(l)}(x)\right|, \tag{1.73}$$

где $\overline{\chi}_{k+m}^{(l)}(x)$ представляет собой $(k+m)$-й коэффициент Фурье по системе $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ функции

$$\overline{y}_x^{(l)}(t) = \begin{cases} \overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x), & t \in G; \\ 0, & t \notin G. \end{cases}$$

В силу (B.33) функция $\overline{y}_x^{(l)}(t)$ является суммируемой на $[a,b]$ и на множестве E обращается в нуль. В таком случае, как показано в [78, с. 764],

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\chi}_{k+m}^{(l)}(x)=0\,,\ m=-\sigma,...,\sigma\,;\ l=1,...,r\,.$$

Поэтому вследствие (1.73)

$$\lim_{k\to\infty}J_{2,k}(x)=0\,,$$

а значит, и

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{J}_2^{(n)}(x)=0\,. \tag{1.74}$$

Теперь покажем, что

$$\left(\widetilde{J}_3^{(n)}(x)\right)^{1/q}=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|J_{3,k}(x)\right|^q\right)^{1/q}=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int\limits_{u_\delta(x)}\overline{\varphi}_x(t)\Phi_k(t,x)\omega(t)dt\right|^q\right)^{1/q}\le$$

$$\le K\left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)\right)^{1/p}. \tag{1.75}$$

С этой целью положим

$$e_n(\delta)=(x-\delta/n\,,x+\delta/n),\ e_n=u_\delta(x)\setminus e_n(\delta).$$

Тогда

$$\int\limits_{u_\delta(x)}\overline{\varphi}_x(t)\Phi_k(t,x)\omega(t)dt=$$

$$=\left(\int\limits_{e_n(\delta)}+\int\limits_{e_n}\right)\overline{\varphi}_x(t)\Phi_k(t,x)\omega(t)dt\overset{df}{=}i_{k,\delta}^{(n)}(x)+i_k^{(n)}(x).$$

Применяя неравенство Минковского, имеем

$$\left(\widetilde{J}_3^{(n)}(x)\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|i_{k,\delta}^{(n)}(x)\right|^q\right)^{1/q} + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|i_k^{(n)}(x)\right|^q\right)^{1/q} \stackrel{df}{=} \sum\nolimits_n^{(1)}(x) + \sum\nolimits_n^{(2)}(x). \quad (1.76)$$

В силу оценки (1.68) при $t, x \in [c, d]$

$$\left|\Phi_k(t,x)\right| \le C \cdot k\,, \quad (1.77)$$

где C – величина, равномерно ограниченная по k.

Поэтому

$$\sum\nolimits_n^{(1)}(x) \le \left(\frac{K}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(n\int\limits_{e_n(\delta)}\left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt\right)^q\right)^{1/q} \le$$

$$\le Kn\int\limits_{e_n(\delta)}\left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt \le K\left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)\right)^{1/p} \quad (1.78)$$

Переходя к оценке величины $\sum\nolimits_n^{(2)}(x)$, полагаем $\overline{\Delta} = [0,1]$; $\overline{\Delta}_k^{(n)} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = 0,1,\ldots n-1$, и через $\chi_{n,k}(t)$ обозначаем характеристическую функцию промежутка $\overline{\Delta}_k^{(n)}$. Тогда

$$\sum\nolimits_n^{(2)}(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|i_k^{(n)}(x)\right|^q\right)^{1/q} = \left(\int\limits_{\overline{\Delta}}\left|\sum_{k=0}^{n-1} i_k^{(n)}(n)\chi_{n,k}(t)\right|^q dt\right)^{1/q} =$$

$$= \left\|\sum_{k=0}^{n-1} i_k^{(n)}(x)\chi_{n,k}(t)\right\|_{q,\overline{\Delta}} \quad (1.79)$$

Используя соотношение двойственности (см., например, [34, с. 39]), имеем

$$\sum\nolimits_n^{(2)}(x) = \sup_{\|g\|_{p,\overline{\Delta}}\le 1}\left|\int\limits_{\overline{\Delta}}\sum_{k=0}^{n-1} i_k^{(n)}(x)\chi_{n,k}(t)g(t)dt\right| = \sup_{\|g\|_{p,\overline{\Delta}}\le 1}\left|\sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n)} i_k^{(n)}(x)\right|, \quad (1.80)$$

где

$$C_k^{(n)} = \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} g(t)dt \tag{1.81}$$

Учитывая (1.76), получаем

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n)} i_k^{(n)}(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n)} \int\limits_{e_n} \overline{\varphi}_x(t)\Phi_k(t,x)\omega(t)dt\right| =$$

$$= \left|\sum_{l=1}^{r} \sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma} \int\limits_{e_n} \varphi_x(t)F_l(t,x)\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n)} \gamma_{m,j,e}^{(k)} \varphi_{k+m}(t)\varphi_{k+j}(x)\right)\omega(t)dt\right| \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{r} \sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma} \left|\int\limits_{e_n} \overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x)T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)\omega(t)dt\right|, \tag{1.82}$$

где

$$T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n)} \gamma_{m,j,l}^{(k)} \varphi_{k+m}(t)\varphi_{k+j}(x) \tag{1.83}$$

– обобщенный полином порядка $n+m-1$ по системе $\{\varphi_k(t)\}_\omega$.

Пусть $D_n(\delta)$ – множество отрезков $\Delta_k^{(n)}$, входящих в определение В-свойства системы $\{\varphi_k(t)\}_\omega$, и

$$M_k^{(n)} = \sup_{t\in\Delta_k^{(n)}} \left|T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)\right|. \tag{1.84}$$

Тогда, обозначая через $J_{e_n}(x)$ интегралы в правой части (1.82) и пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\left|J_{e_n}(x)\right| \le \sum_{2\le|i|\le n} M_i^{(n)} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x)\right|\omega(t)dt =$$

$$=\left(\sum_{i=-n}^{-2}+\sum_{i=2}^{n}\right)M_i^{(n)}\int\limits_{\Delta_i^{(n)}}\left|\overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x)\right|\omega(t)dt\overset{df}{=}J_{e_n}^{-}(x)+J_{e_n}^{+}(x). \qquad (1.85)$$

Оценим сначала величину $J_{e_n}^{+}(x)$. Имеем

$$J_{e_n}^{+}(x)=n\int_0^1\sum_{i=2}^{n}M_i^{(n)}\chi_{n,i}(\tau)\sum_{i=2}^{n}\int\limits_{\Delta_i^{(n)}}\left|\overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x)\right|\omega(t)dt\chi_{n,i}(\tau)d\tau\le$$

$$\le n\left\|\sum_{i=2}^{n}M_i^{(n)}\quad\chi_{n,i}(\tau)\right\|_{q,\overline{\Delta}}\left\|\sum_{i=2}^{n}\int\limits_{\Delta_i^{(n)}}\left|\overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x)\right|\omega(t)dt\chi_{n,i}(\tau)d\tau\right\|_{p,\overline{\Delta}} \qquad (1.86)$$

Откуда

$$\left|J_{e_n}^{+}(x)\right|=\left(\sum_{i=2}^{n}\left(M_i^{(n)}\right)^q\right)^{1/q}\left(\sum_{i=2}^{n}\left(\int\limits_{\Delta_i^{(n)}}\left|\overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x)\right|\omega(t)dt\right)^p\right)^{1/p}$$

Оценим первый сомножитель правой части этого неравенства. Учитывая (1.84), имеем

$$\left(\sum_{i=2}^{n}\left(M_i^{(n)}\right)^q\right)\le\left(\sum_{i=1}^{n}\sup_{t\in\Delta_k^{(n)}}\left|T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)\right|^q\right) \qquad (1.87)$$

Полиномы $T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)$ представимы в виде

$$T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)=\sum_{k=0}^{n+m-1}\alpha_k\varphi_k(t), \qquad (1.88)$$

$$\alpha_k=\begin{cases}0, & k=0,\dots,m-1;\\ C_{k-1}^{(n)}\gamma_{m,j,l}^{(k-m)}\varphi_{k-m+j}(x), & k=m,\dots,n+m-1.\end{cases}$$

При этом в силу равномерной ограниченности величин $\gamma_{m,j,l}^{(k)}$ и соотношения (1.68) имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{n+m-1}\left|\alpha_k\right|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|C_i^{(n)}\gamma_{m,j,l}^{(i)}\varphi_{k+j}(x)\right|^p\right)^{1/p}\le K\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|C_i^{(n)}\right|^p\right)^{1/p}=$$

$$=Kn^{1/p}\left\|\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{\overline{\Delta}_i^{(n)}}g(t)dt\chi_{n,i}(\tau)\right\|_{p,\overline{\Delta}}\stackrel{df}{=}Kn^{\frac{1}{p}-1}\left\|\left(Q_{\overline{\Delta}}g\right)(\tau)\right\|_{p,\overline{\Delta}}.$$

Оператор $Q_{\overline{\Delta}}$, являясь оператором усреднения, как известно (см., например, [77]), ограниченно действует из L_p в L_p, $1\le p\le\infty$, причем $\left\|Q_{\overline{\Delta}}\right\|_{p,\overline{\Delta}}\le 1$. Поэтому

$$\left(\sum_{k=0}^{n+m-1}\left|\alpha_k\right|^p\right)^{1/p}\le Kn^{\frac{1-p}{p}}\left\|g\right\|_{p,\overline{\Delta}}\le Kn^{\frac{1-p}{p}} \tag{1.89}$$

Стало быть, согласно (1.87)

$$\sum_{i=2}^{n}\left(M_i^{(n)}\right)^q\le\sup\sum_{i=1}^{n}\sup_{t\in\Delta_k^{(n)}}\left|T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)\right|^q, \tag{1.90}$$

где внешняя верхняя грань берётся по полиномам вида (1.88), коэффициенты которых подчинены условию (1.89).

Далее положим

$$T_{n+m-1}^{(j,l)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)+\sum_{k=m+1}^{n+m-1}\alpha_k\varphi_k(x)\stackrel{df}{=}T_n(x)+\prod\nolimits_{n+m-1}(x).$$

В силу равномерной ограниченности системы $\left\{\varphi_k(x)\right\}_\omega$ на $[c,d]$ и неравенства Гёльдера имеем

$$\left|T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)\right|^q\le 2^q\left|T_n(x)\right|^q+K_q\left|\sum_{k=m+1}^{n+m-1}\alpha_k\right|^q\le 2^q\left|T_n(x)\right|^q+K_q m\left(\sum_{k=m+1}^{n+m-1}\left|\alpha_k\right|^p\right)^{q/p}, \tag{1.91}$$

где $K_q=K(q)$ – величина, равномерно ограниченная по n.

Система $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ в рассматриваемой точке x удовлетворяет условию B. Поэтому

$$\sup\sum_{i=1}^{n}\sup_{t\in\Delta_i^{(n)}}\left|T_n(t)\right|^q\le K\,, \tag{1.92}$$

а вследствие (1.89)

$$\sup\sum_{i=1}^{n}K_q m\sup_{t\in\Delta_i^{(n)}}\left(\sum_{k=n+1}^{n+m-1}\left|\alpha_k\right|^p\right)^{q/p}\le nmK_q\left(Kn^{\frac{1-p}{p}}\right)^q\le K\,, \tag{1.93}$$

Объединяя соотношения (1.90)–(1.93), убеждаемся, что правая часть в (1.90) не превышает величину, равномерно ограниченную по n. Поэтому, согласно (1.87)

$$\left(\sum_{i=2}^{n}\left(M_i^{(n)}\right)^q\right)^{1/q}\le K\,. \tag{1.94}$$

Принимая во внимание свойство $F_l(t,x)$ при $t\in\Delta_i^{(n)}$, находим

$$\left|F_l(t,x)\right|\le\frac{K}{t-x}\le\frac{K}{(i-1)\delta}\le\frac{2Kn}{i\delta}\,.$$

Значит

$$\left(\sum_{i=2}^{n}\left(\int_{\Delta_i^{(n)}}\left|\overline{\varphi}_x(t)F_l(t,x)\right|\omega(t)dt\right)^p\right)^{1/p}\le$$

$$\le K\left(\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{n}{i}\int_{\Delta_i^{(n)}}\left|\overline{\varphi}_x(t)\right|\omega(t)dt\right)^p\right)^{1/p}\le\left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)\right)^{1/p}. \tag{1.95}$$

Таким образом, в силу (1.86), (1.94) и (1.95),

$$\left|J_{e_n}^{+}(x)\right|\le K\left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)\right)^{1/p}.$$

Ясно, что такая же оценка будет справедливой и для величины $\left|J_{e_n}^{-}(x)\right|$, а стало быть, и для величины $\left|J_{e_n}(x)\right|$. Подставляя эту оценку в (1.82) и принимая во внимание равенство (1.80), имеем

$$\sum\nolimits_n^{(2)}(x) \le K\left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)\right)^{1/p}.$$

Объединяя эти соотношения с оценкой (1.78), получаем (1.75), что и завершает доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Принимая во внимание определение $h_{p,\omega}$ – точки данной функции $f(x)$ и замечание о том, что (H,q) – суммируемость влечет (H,q_1) – суммируемость при $q_1 \in (0,q]$, получаем следующее утверждения.

Следствие 1.2. *Пусть система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$, *точка* $x \in (c,d)$ *и функция* $f(t)$ *удовлетворяют всем требованиям теоремы 1.1 и, кроме того, данная точка x является* $h_{p,\omega}$ *– точкой функции* $f(t)$. *Тогда для каждого* $q_1 \in (0,q]$, $q \ge 2$, $1/q + 1/p = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} H_n^{(q_1)}(f;\varphi;x) = 0, \tag{1.96}$$

т.е. в данной точке x ряд Фурье функции $f(t)$ *по данной системе является* (H,q_1) *– суммируемым.*

Следствие 1.3. *Пусть система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *и функция* $f(t)$ *удовлетворяют требованиям теоремы 1.1 и, кроме того, на некотором множестве* $e \subseteq (c,d)$ *система имеет свойство B. Тогда для любого* $x \in e \cap H_p^{(\omega)}$, *где* $H_p^{(\omega)}$ – множество $h_{p,\omega}$ *– точек функции* $f(t)$ *при любых* $q_1 \in (0,q]$, $q \ge 2$, $1/q + 1/p = 1$, *справедливо равенство (1.96).*

Принимая во внимание лемму 1.2, приходим к следующему утверждению.

Следствие 1.4. *При условиях, принятых в следствии 1.3, соотношение (1.96) выполняется почти всюду на е.*

Тригонометрическая система удовлетворяет условиям, принятым в следствии 1.4, и в силу леммы 1.6 имеет свойство В на всей действительной оси. Поэтому из следствия 1.4 получаем упомянутый в ведении результат Габисония-Новикова-Родина.

Учитывая лемму 1.7, из следствия 1.4 получаем такое утверждение.

Следствие 1.5. *Пусть* $\{P_k(t)\}_\omega$ *– ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $\omega(t)$ *система алгебраических полиномов, равномерно ограниченных на* $[c,d]\subseteq[a,b]$ *и для любого* $t\in[c,d]$ $\omega(t)\geq\omega_0>0$. *Пусть, далее, функция* $f(t)$ *суммируема с весом* $\omega(t)$ *на* $[a,b]$ *и на множестве* $[a,b]\setminus[c,d]$ *суммируем её квадрат с весом* $\omega(t)$. *Тогда в каждой точке* $x\in(c,d)\cap H_p^{(\omega)}$ *при любых* $q_1\in(0,q]$, $q\geq 2$, $1/q+1/p=1$, *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x)-S_k(f;x)\right|^q=0, \tag{1.97}$$

где $S_k(f;x)$ – частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{P_k(x)\}_\omega$.

1.3.2. Величина $H_{n,q}(f;x)$ может быть записана в виде

$$H_n^{(q)}(f;x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}l_k^{(n)}\left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q}, \tag{1.98}$$

где

$$\rho_k(f;x)=f(x)-S_k(f;x)$$

$$l_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \ 0 \le k \le n-1; \\ 0, \ k > n-1. \end{cases} \tag{1.99}$$

Тогда равенство (1.96) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} l_k^{(n)} \left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q} = 0, \tag{1.100}$$

Используя полученные выше результаты, можно установить аналоги равенства (1.100) и в более общих ситуациях, т.е. когда числа $\alpha_k^{(n)}$ задаются не только соотношением (1.99).

Пусть $\alpha = \left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$, $k,n = 0,1,\ldots$, – бесконечная прямоугольная матрица чисел. Каждой функции $f \in L^{(\omega)}(a,b)$ при некотором $q > 0$ поставим в соответствие величину

$$R_n^{(q)}(f;x) = R_n^{(q)}(f;x;\alpha) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q}. \tag{1.101}$$

Ближайшей целью является указание условий, обеспечивающих выполнение соотношения

$$\lim_{n\to\infty} R_n^{(q)}(f;x;\alpha) = 0. \tag{1.102}$$

Следуя Л.Лейндлеру [67] (см., также, [19]), обозначим через α_γ множество матриц α, элементы $\alpha_k^{(n)}$ которых при данном фиксированном $\gamma > 1$ удовлетворяют условию

$$\left(\frac{1}{m}\sum_{k=m+1}^{2m}\left|\alpha_k^{(n)}\right|^\gamma\right)^{1/\gamma} \le \frac{K}{m}\sum_{k=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{m}\left|\alpha_k^{(n)}\right|, \ m = 1,2,\ldots, \tag{1.103}$$

где $[a]$ – целая часть числа a и K – постоянная, не зависящая от m и n.

Пусть так же при $s>0$ и $\nu\geq 1$

$$\mathcal{E}_{\nu}^{(s)}(x)=\mathcal{E}_{\nu}^{(s)}(f;x)=\sup_{m\geq\nu}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=m+1}^{2m}\left|\rho_k(f;x)\right|^{s}\right)^{1/s}. \tag{1.104}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.8. *Пусть* $\alpha\in\alpha_{\gamma}$ *и* $\gamma'=\dfrac{\gamma}{\gamma-1}$. *Тогда для любой функции* $f\in L^{(\omega)}(a,b)$ *при каждом* $q>0$ *в каждой точке* $x\in(a,b)$, *в которой* $f(x)\neq\pm\infty$, *справедлива оценка*

$$R_n^{(q)}(f;x)\leq K\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\mathcal{E}_{k,q\gamma'}^{\,q}(f;x)\right)^{1/q}, \tag{1.105}$$

где K – постоянная, не зависящая от n.

Доказательство. Имеем

$$\left(R_n^{(q)}(f;x)\right)^{q}\leq\sum_{k=0}^{2}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left|\rho_k(f;x)\right|^{q}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left|\rho_k(f;x)\right|^{q}, \tag{1.106}$$

Ясно, что

$$\sum_{k=0}^{2}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left|\rho_k(f;x)\right|^{q}\leq K\sum_{k=0}^{2}\left|\alpha_k^{(n)}\right|. \tag{1.107}$$

Применяя неравенство Гёльдера и учитывая оценку (1.103), находим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left|\rho_k(f;x)\right|^{q}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\alpha_k^{(n)}\right|^{\gamma}\right)^{1/\gamma}\left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\rho_k(f;x)\right|^{q\gamma'}\right)^{1/\gamma'}\leq$$

$$\leq K\sum_{i=1}^{\infty}\left(2^{i}\right)^{-1/\gamma'}\sum_{k=2^{i-1}}^{2^{i}}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\rho_k(f;x)\right|^{q\gamma'}\right)^{1/\gamma'}\leq K\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}}^{2^{i}}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\mathcal{E}_{2^i,q\gamma'}^{\,q}(x).$$

Величина $\mathcal{E}_{\nu}^{(s)}(x)$ не возрастает по индексу ν, поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty}\ \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left\|\rho_k(f;x)\right\|^q \le K\sum_{i=1}^{\infty}\ \sum_{k=2^{i-1}}^{2^i}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left(\mathcal{E}_{2^i}^{(q\gamma')}(x)\right)^q .$$

$$\le K\sum_{i=1}^{\infty}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left(\mathcal{E}_{2^i}^{(q\gamma')}(x)\right)^q . \qquad (1.108)$$

Сопоставляя соотношения (1.106)–(1.108), приходим к оценке (1.105).

Лемма 1.9. *Пусть система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *и функция* $f(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Тогда в каждой точке* $x\in(c,d)$, *в которой система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *имеет B-свойство и* $f(x)$ *конечна, выполняется соотношение*

$$\mathcal{E}_{\nu}^{(q_1)}(f;x)\le K\sup_{m\ge\nu}\left(h_{2m,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)+\varepsilon_{2m}(x)\right), \qquad (1.109)$$

в котором $q_1\in(0,q]$, $q\ge 2$, $1/p+1/q=1$,

$$\lim_{m\to\infty}\varepsilon_{2m}(x)=0$$

и K – постоянная, не зависящая от ν.

Доказательство этой леммы вытекает из утверждения теоремы 1.1 и определения величин $\mathcal{E}_{\nu}^{(s)}(x)$.

На основании последних двух лемм с учетом соотношения (B.9) получаем следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть* $\alpha\in\alpha_\gamma$ *и* $\gamma'=\dfrac{\gamma}{\gamma-1}$, *система функций* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *и функция* $f(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Тогда в каждой точке* $x\in(c,d)$, *в которой система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *имеет B-свойство и* $f(x)$ *конечна, выполняется соотношение*

$$\left(R_n^{(q_1)}(f;x)\right)^{q_1} \le K\sum_{k=0}^{\infty}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left(\sup_{m\ge k}\left(h_{2m,s}^{(\omega)}(f;x;\delta)+\varepsilon_{2m}(x)\right)\right)^{q^1}, \qquad (1.110)$$

в котором $s=(\gamma' q)'=\dfrac{\gamma' q}{\gamma' q-1}$, $q_1\in(0,q]$, $q\ge\dfrac{2}{\gamma'}$ *и K – постоянная, не зависящая от n.*

Обозначим через α'_γ подмножество матриц $\alpha\in\alpha_\gamma$, элементы которых неотрицательны, $\alpha_k^{(n)}\ge 0$, и каждая из них определяет метод суммирования рядов, регулярный в смысле Тёплица, что, как известно, равносильно выполнению условий

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(n)}=1,\ \lim_{n\to\infty}\alpha_k^{(n)}=0,\ k=0,1,\ldots \qquad (1.111)$$

Для таких матриц справедливо утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть* $\alpha\in\alpha'_\gamma$ *и* $\gamma'=\dfrac{\gamma}{\gamma-1}$, *система функций* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *и функция* $f(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.1, и кроме того, на некотором множестве* $e\subseteq(c,d)$ *система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *имеет B-свойство. Тогда для любого* $q_1\in(0,q]$, $q\ge\dfrac{2}{\gamma'}$ *в каждой точке* $x\in e\cap H_s^{(\omega)}$, $s=(\gamma' q)'$, *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty}R_n^{(q_1)}(f;x)=0 \qquad (1.112)$$

Действительно, в рассматриваемом случае

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{m\ge k}\left(h_{2m,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)+\varepsilon_{2m}(x)\right)=0$$

и требуемое заключение следует из (1.110) с учетом соотношений (1.111).

Как отмечалось, тригонометрическая система удовлетворяет условиям теоремы 1.3, при всех действительных значениях x. Поэтому справедливо такое утверждение.

Следствие 1.6. *Пусть* $\alpha \in \alpha_\gamma$ *и* $\gamma' = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}$,. *Тогда для любой функции* $f \in L(0,2\pi)$ *при любом* $q_1 \in (0,q]$, $q \geq \dfrac{2}{\gamma'}$, *в каждой точке* $x \in H_s^{(\omega)}$, $\omega(t) \equiv 1$, $s = (\gamma' q)'$, *т.е. почти всюду выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \left| f(x) - S_k(f;x) \right|^{q_1} = 0, \tag{1.113}$$

где $S_k(f;x)$ *– частная сумма порядка k ряда Фурье функции* $f(x)$ *по тригонометрической системе.*

Объединяя утверждения теоремы 1.3 и леммы 1.7, получаем такое утверждение.

Следствие 1.7. *Пусть* $\{P_k(t)\}_\omega$ *– ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $\omega(t)$ *система алгебраических полиномов, равномерно ограниченных на* $[c,d] \subseteq [a,b]$ *и для каждого* $t \in [c,d]$ $\omega(t) \geq \omega_0 > 0$. *Пусть, далее,* $f \in L^{(\omega)}(a,b)$ *и на множестве* $E = [a,b] \setminus [c,d]$ *суммируем её квадрат с весом* $\omega(t)$ $\left(f \in L_2^{(\omega)}(E)\right)$. *Тогда если* $\alpha \in \alpha'_\gamma$ *и* $\gamma' = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}$, *то для любого* $q_1 \in (0,q]$, $q \geq \dfrac{2}{\gamma'}$, *в каждой точке* $x \in (c,d) \cap H_s^{(\omega)}$, $s = (\gamma' q)'$, *т.е. почти всюду на* (c,d), *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \left| f(x) - S_k(f;x) \right|^{q_1} = 0, \tag{1.114}$$

где $S_k(f;x)$ *– частная сумма порядка k ряда Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{P_k(x)\}_\omega$.

Каждой функции $f \in L^{(\omega)}(a,b)$ с помощью матрицы $\left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$, $k,n = 0,1,\ldots$, сопоставим последовательность линейных средних частных сумм $S_k(f;x)$ её ряда Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_\omega$:

$$U_n(f;x) = U_n(f;x;\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} S_k(f;x). \tag{1.115}$$

Тогда

$$|f(x) - U_n(f;x)| \le |f(x)| \left|1 - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)}\right| + \sum_{k=0}^{\infty} \left|\alpha_k^{(n)}\right| |f(x) - S_k(f;x)| =$$

$$= |f(x)| \left|1 - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)}\right| + \sum_{k=0}^{\infty} \left|\alpha_k^{(n)}\right| |\rho_k(f;x)|$$

Поэтому на основании теоремы 1.3, получаем следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть при некотором* $\gamma \in (1,2]$ $\alpha \in \alpha'_\gamma$ *и система функций* $\{\varphi_k(x)\}_\omega$ *и функция* $f(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.3. Тогда для любого* $x \in e \cap H_\gamma^{(\omega)}$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - U_n(f;x;\alpha)| = 0. \tag{1.116}$$

Из этой теоремы для тригонометрической системы и системы алгебраических полиномов выводятся следующие факты.

Следствие 1.8. *Пусть при некотором* $\gamma \in (1,2]$ $\alpha \in \alpha'_\gamma$. *Тогда* $\forall f \in L(0,2\pi)$ *в каждой точке* $x \in H_\gamma^{(\omega)}$ *при* $\omega(t) \equiv 1$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} S_k(f;x) \right| = 0, \tag{1.117}$$

где $S_k(f;x)$ *– частная сумма прядка k ряда Фурье функции* $f(x)$ *по тригонометрической системе.*

Следствие 1.9. *Пусть система ортонормированных на* $[a,b]$ *алгебраических полиномов* $\{P_k(t)\}_\omega$ *и функция* $f(t)$ *удовлетворяют условиям следствия 1.7. Тогда если при некотором* $\gamma \in (1,2]$ $\alpha \in \alpha'_\gamma$, *то в каждой точке* $x \in (c,d) \cap H_\gamma^{(\omega)}$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\left| f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} S_k(f;x) \right| = 0 \tag{1.118}$$

в котором $S_k(f;x)$ *– частная сумма прядка k ряда Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{P_k(x)\}_\omega$.

Заметим, что множеству α'_γ принадлежат, в частности, матрицы, элементы $\alpha_k^{(n)}$ которых неотрицательны и не возрастают по индексу *k*. Такими, к примеру, являются матрицы, определяющие методы Чезаро (C,δ) при $\delta > 0$, метод Абеля-Пуассона, метод Валле-Пуссена, логарифмический метод и др.

Из последнего утверждения получаем следующий положительный ответ на проблему Г. Алексича, упомянатую в введении.

Следствие 1.10. *Пусть* $\{P_k(t)\}_\omega$ *– ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $\omega(t)$ *система алгебраических полиномов, равномерно ограниченных на* $[c,d] \subset [a,b]$ *и для каждого* $t \in [c,d]$ $\omega(t) \ge \omega_0 > 0$. *Пусть, далее,* $f \in L^{(\omega)}(c,d)$ *и* $f \in L_2^{(\omega)}[E]$, *где* $E = [a,b] \setminus [c,d]$. *Тогда* $\forall x \in H_2^{(\omega)} \cap (c,d)$, *т.е. почти всюду на* (c,d), $\forall \alpha > 0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha(f;x) = f(x),$$

где

$$\sigma_n^\alpha(f;x)=\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}S_k(f;x),\ A_n^\alpha=\binom{n+\alpha}{\alpha}=\frac{1}{n!}(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n),$$

$$\alpha\neq-1,-2,\ldots$$

– число Чезаро порядка α .

Теорема 1.4 и следствия 1.8 и 1.9 доставляют достаточные условия сходимости в $h_p^{(\omega)}$ – точках функции $f\in L^{(\omega)}(a,b)$ выражений вида (1.115), представляющих собой линейные средние частных сумм $S_n(f;x)$. Пользуясь теоремой 1.1, можно сформулировать также ряд утверждений, касающихся сходимости непосредственно самих линейных средних рядов Фурье по системам $\{\varphi_k(x)\}_\omega$.

Каждой функции $f\in L^{(\omega)}(a,b)$ с помощью треугольной матрицы чисел $\alpha=\left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$, $\alpha_0^{(n)}\equiv1$, $k,n=0,1,\ldots$, $\alpha_k^{(n)}\equiv0$, $k>n$, по её ряду Фурье $S[f]$ поставим в соответствие последовательность его линейных средних

$$A_n(f;x)=A_n(f;x;\alpha)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}c_k\varphi_k(x) \tag{1.119}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть система* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *и функция* $f(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.1 и, кроме того, на некотором множестве* $e\subseteq(c,d)$ *данная система имеет свойство B. Пусть, далее, элементы* $\alpha_k^{(n)}$ *матрицы* α *при некотором* $p\in(1,2]$ *подчинены условию*

$$\left(n^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta\alpha_k^{(n)}\right|^p\right)^{1/p}<K, \tag{1.120}$$

где

$$\Delta\alpha_k^{(n)}=\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k+1}^{(n)}$$

и K – величина, равномерно ограниченная по n.

Тогда в каждой точке $x \in e$, *в которой* $f(x)$ *конечна, для любого* $\delta > 0$, *входящего в определение В-свойства точки х, выполняется неравенство*

$$\left|f(x)-A_n(f;x)\right| \leq Kh_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)+\varepsilon_n(x),\ \varepsilon_n(x)=\varepsilon_n(f;\delta;x), \quad (1.121)$$

где $\varepsilon_n(x) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и в каждой точке* $x \in e \cap H_p^{(\omega)}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f;x) = f(x). \quad (1.122)$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, имеем

$$f(x)-A_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\Delta\alpha_k^{(n)}\rho_k(f;x).$$

Поэтому в силу неравенства Гёльдера и оценки (1.120) получаем

$$\left|f(x)-A_n(f;x)\right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\alpha_k^{(n)}\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq K\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q},\ 1/p+1/q=1. \quad (1.123)$$

Если $x \in e$, то в силу теоремы 1.1 из (1.123) следует (1.121), откуда при условии, что $x \in e \cap H_p^{(\omega)}$, убеждаемся в справедливости равенства (1.122).

Условие (1.120) при $p = 2$ впервые использовал и исследовал Г.А. Фомин [145] в связи с оценками констант Лебега линейных методов суммирования рядов Фурье. Позже С.Б. Стечкин [146] в той же связи рассматривал случай $p \in (0,2]$. Этому условию удовлетворяет широкий спектр матриц, порождающих линейные методы суммирования и, в частности, матрицы, порождающие классические методы.

Поэтому из теоремы 1.5 вытекают утверждения для тригонометрической системы и систем ортогональных алгебраических полиномов, повторяющие и дополняющие соответствующие результаты многих авторов (см., например, [31], [76], [130], [75], [79])

ГЛАВА II
СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Данная глава начинается с установления аппроксимационных свойств α-средних последовательности отклонений сумм Фурье в метрике обобщенного пространства Гёльдера H_{ω^*}. Далее исследуются аппроксимационные свойства α-средних последовательности φ-отклонений сумм Фурье на классах функций, введенных А.И. Степанцом (см., например, [112]). Доказываются некоторые обратные теоремы сильной аппроксимации. В конце главы приводятся необходимые или достаточные условия принадлежности величин, характеризующих сильную суммируемость рядов Фурье, к лебеговым классам функций, а также некоторые теоремы вложения.

§2.1. Сильная аппроксимация периодических функций в обобщенной гёльдеровой метрике

Ниже устанавливаются оценки α-средних последовательности степенных отклонений 2π-периодических функций суммами Фурье в метрике пространства Гёльдера, а также приводятся уточнения некоторых теорем о порядке приближения линейными средними частных сумм Фурье в пространстве H_{ω^*}.

2.1.1. Объектом исследования являются величины

$$R_{\nu,n}^{(q)}(f;x)=R_{\nu,n}^{(q)}(f;x;\alpha)=\left(\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q}, \tag{2.1}$$

где $\rho_n(f;x)=f(x)-S_n(f;x)$, $q>0$, $n\in N$, $\nu\in V$ – некоторое множество точек действительной оси R.

Пусть $C=C(0,2\pi)$ – пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_c = \max_x |f(x)|.$$

Обозначим через $H_{\omega*} = H_{\omega*}(0,2\pi)$ пространство функций $f \in C$, удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \le K\omega^*(|x-y|) \ \forall x, y \in R, \ K = K(f),$$

с обобщенной гёльдеровой нормой

$$\|f\|_{\omega*} = \|f\|_c + \sup_{\substack{-\infty<x,y<+\infty \\ x\neq y}} \Delta^{\omega_*} f(x,y), \tag{2.2}$$

где

$$\Delta^{\omega_*} f(x,y) \overset{df}{=} \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega^*(|x-y|)}, \ \Delta^0 f(x,y) \overset{df}{=} 0,$$

$\omega^*(t)$ – некоторая возрастающая при $t \ge 0$ неотрицательная функция. Пусть, далее, $\omega(t)$ – функция, с теми же свойствами, что и $\omega^*(t)$ и $H_\omega = H_\omega(0,2\pi)$ – множество функций $f \in C$, удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \le K_1\omega(|x-y|) \ \forall x, y \in R, \ K = K(f),$$

содержащееся в некотором пространстве $H_{\omega*}$.

В частности, полагая $\omega^*(t) = t^\gamma$, $\omega(t) = t^\alpha$, $0 \le \gamma < \alpha \le 1$, в качестве множества $H\omega$ получаем множество $H_\alpha = \{f \in C : |f(x) - f(y)| \le K|x-y|^\alpha \ \forall x, y \in R, K = K(f)\}$ в пространстве H_γ с гёльдеровой нормой

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_c + \sup_{\substack{-\infty<x,y<+\infty \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma}. \tag{2.3}$$

Источником информации о поведении величин $R_{\nu,q}^{(n)}(f;x)$ будут служить группы отклонений

$$H_n^{(q)}(x;y)=H_n^{(q)}(f;x;y)=\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\rho_k(x)-\rho_k(y)\right|^q\right\}^{1/q}, \qquad (2.4)$$

где $\rho_k(x)=\rho_k(f;x)$.

Лемма 2.1. *Пусть* $0\le\beta<\eta\le 1$. *Тогда* $\forall f\in H_\omega$, $\forall n\in N$ *и* $\forall x,y\in R$

$$H_n^{(q)}(x;y)=O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta}, \qquad (2.5)$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n\in N$ $x,y\in R$ *и зависящая, вообще говоря, от q и* $f\in H_\omega$.

Доказательство. В силу неравенства (В.9) можно считать, что $q\ge 2$. Полагая

$$\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

имеем следующие представления

$$\rho_k(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi_x(t)D_k(t)dt,$$

$$\rho_k(x)-\rho_k(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\varphi_x(t)-\varphi_y(t))D_k(t)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/n}+\int_{\pi/n}^{\pi}\right](\varphi_x(t)-\varphi_y(t))D_k(t)dt,$$

где

$$D_k(t)=\frac{\sin(k+1/2)t}{2\sin t/2}$$

– ядро Дирихле.

В силу неравенства Минковского для сумм ([153, с. 46])

$$H_n^{(q)}(x;y)=\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right)D_k(t)dt\right|^q\right\}^{1/q}\le$$

$$=\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/n}\left(\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right)D_k(t)dt\right|^q\right\}^{1/q}+$$

$$+\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{2}{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\left(\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right)D_k(t)dt\right|^q\right\}^{1/q}\overset{df}{=}J_{n,1}^{(q)}(x;y)+J_{n,2}^{(q)}(x;y). \qquad (2.6)$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части (2.6) с учетом того, что

$$\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|\le 4K_1\omega(|x-y|). \qquad (2.7)$$

Поскольку $|D_k(t)|\le k+1\le 2n$, $n\le k\le 2n-1$, в силу (2.7) имеем

$$J_{n,1}^{(q)}(x,y)\le\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\int_0^{\pi/n}\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|\left|D_k(t)\right|dt\right)^q\right\}^{1/q}\le$$

$$\le\frac{16K_1}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left(n\int_0^{\pi/n}\omega(|x-y|)dt\right)^q\right\}^{1/q}=O(1)\omega(|x-y|). \qquad (2.8)$$

Далее воспользуемся следующим представлением ядра $D_k(t)$:

$$D_k(t) = \frac{\sin kt}{2tg(t/2)} + \cos kt\,.$$

Тогда

$$J_{n,2}^{(q)}(x,y) \le \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{2}{\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{(\varphi_x(t) - \varphi_y(t))}{2tg(t/2)} \sin kt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{(\varphi_x(t) - \varphi_y(t))}{2} \cos kt \right|^q \right\}^{1/q}.$$

Положим

$$\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_x(t) - \varphi_y(t)}{2tg(t/2)}, t \in \left[\dfrac{\pi}{n}, \pi\right]; \\ 0, \qquad\qquad t \in [-\pi, \pi] \setminus \left[\dfrac{\pi}{n}, \pi\right], \end{cases}$$

$$\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_x(t) - \varphi_y(t)}{2}, t \in \left[\dfrac{\pi}{n}, \pi\right]; \\ 0, \qquad\qquad t \in [-\pi, \pi] \setminus \left[\dfrac{\pi}{n}, \pi\right], \end{cases}$$

и

$$\Phi_{x,y}^{(i)}(t,n) = \Phi_{x,y}^{(i)}(t + 2\pi, n),\ t \in R\,,\ i = 1,2\,.$$

С учетом этого получаем

$$J_{n,2}^{(q)}(x,y) \le \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x,y}^{(1)}(t,n) \sin ktdt + \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x,y}^{(2)}(t,n) \cos ktdt \right|^q \right\}^{1/q} =$$

$$= 2\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| b_k\left(\Phi_{x,y}^{(1)}\right) + a_k\left(\Phi_{x,y}^{(2)}\right) \right|^q \right\}^{1/q},$$

где $a_k(g)$, $b_k(g)$ – коэффициенты Фурье функции $g(x)$.

Применяя неравенство Минковского для сумм к правой части последнего неравенства, находим

$$J_{n,2}^{(q)}(x,y) \le 2\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|b_k\left(\Phi_{x,y}^{(1)}\right)\right|^q\right\}^{1/q} + 2\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|a_k\left(\Phi_{x,y}^{(2)}\right)\right|^q\right\}^{1/q}, \tag{2.9}$$

Далее, вследствие неравенства

$$2tg\frac{t}{2} \ge t,\ 0 \le t < \pi, \tag{2.10}$$

функция $\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)$ при каждом фиксированном $n \in N$ принадлежит пространству $L_{p'}$, $1 < p' \le 2$. Функция $\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)$, очевидно, также принадлежит к $L_{p'}$.

Используя известное неравенство Хаусдорфа-Юнга ([35, с. 153]), получаем

$$J_{n,2}^{(q)}(x,y) \le \frac{2}{n^{1/p}}\left(\left\|\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\right\|_{p'} + \left\|\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\right\|_{p'}\right). \tag{2.11}$$

Принимая во внимание соотношения (2.7) и (2.10), находим

$$\left\|\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\right\|_{p'} = \left(\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t)-\varphi_y(t)}{2tg[t/2]}\right|^{p'}dt\right)^{1/p'} \le$$

$$\le 4K_1\omega(|x-y|)\left(\int_{\pi/n}^{\pi}t^{-p'}dt\right)^{1/p'} = O(1)n^{1/p}\omega(|x-y|). \tag{2.12}$$

Аналогично получаем

$$\left\|\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\right\|_{p'} = O(1)\omega(|x-y|). \tag{2.13}$$

Сопоставляя соотношения (2.11) – (2.13), выводим

$$J_{n,2}^{(q)}(x,y)=O(1)\omega(|x-y|). \tag{2.14}$$

Объединяя (2.6), (2.8) и (2.14), находим

$$H_n^{(q)}(x,y)=O(1)\omega(|x-y|), \tag{2.15}$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n, x, y.

С другой стороны, в силу неравенства Минковского

$$H_n^{(q)}(x,y)=\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\rho_k(x)-\rho_k(y)\right|^q\right\}^{1/q}\leq\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\left|\rho_k(x)\right|+\left|\rho_k(y)\right|\right)^q\right\}^{1/q}\leq$$

$$\leq\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\rho_k(x)\right|^q\right\}^{1/q}+\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\rho_k(y)\right|^q\right\}^{1/q}. \tag{2.16}$$

На основании результата Л.Лейндлера [67] (см., также, [18]):

$$\left\|\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\rho_k(x)\right|^q\right\}^{1/q}\right\|_C\leq K_qE_n(f)_c,\ K_q=K(q),$$

в сочетании с известным неравенством Джексона (см., например, [133, с. 272])

$$E_n(f)_c\leq A\omega\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

где $\omega(f;t)$ – модуль непрерывности функции $f\in C$, $\omega(f;t)=\sup\limits_{|u|\leq t}\left\|(f\cdot+u)-f(\cdot)\right\|_C$, А – абсолютная постоянная, получаем оценку

$$\left\|\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\rho_k(x)\right|^q\right\}^{1/q}\right\|_C\leq K_q^{(1)}\omega\left(f;\frac{1}{n}\right). \tag{2.17}$$

Сопоставляя соотношения (2.16) и (2.17), получаем

$$H_n^{(q)}(x,y) \le 2K_q^{(2)}\omega\left(\frac{1}{n}\right) = O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.18}$$

Таким образом, вследствие соотношений (2.15) и (2.18) окончательно получаем

$$H_n^{(q)}(x,y) = \left(H_n^{(q)}(x,y)\right)^{\beta/\eta} \cdot \left(H_n^{(q)}(x,y)\right)^{1-\beta/\eta} =$$

$$= O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \quad 0 \le \beta < \eta \le 1. \tag{2.19}$$

Лемма 2.1 доказана.

Отправляясь от данной леммы, покажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть последовательность функций* $\alpha = (\alpha_k(v))$ *такова, что при каждом фиксированном значении* $v \in V \subset R$ *числа* $\alpha_k(v)$ *неотрицательны, не возрастают по индексу k и* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда* $\forall f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ $\forall q \ge 1$, $\forall n \in N$ *и* $\forall v \in V$ *имеет место соотношение*

$$\left\|R_{v,n}^{(q)}(f;x)\right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\ne y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\times\left\{n\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)} + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}, \tag{2.20}$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$, $v \in V$ *и зависящая, вообще говоря, от q и* $f \in H_\omega$.

Доказательство. Требуется оценить величину

$$\left\| R_{v,n}^{(q)}(f;x) \right\|_{\omega^*} = \left\| R_{v,n}^{(q)}(x) \right\|_c + \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left| R_{v,n}^{(q)}(x) - R_{v,n}^{(q)}(y) \right|}{\omega^*\left(|x-y|\right)}, \quad v \in V \tag{2.21}$$

Применяя известное неравенство

$$\left| \|a\|_{l_p} - \|b\|_{l_p} \right| \le \|a-b\|_{l_p}, \ p \ge 1,$$

где

$$l_p = \left\{ a = (a_k) : \|a\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

с учетом условий на $\alpha_k(v)$ для любых x, y получаем

$$\left| R_{v,n}^{(q)}(x) - R_{v,n}^{(q)}(y) \right| \le \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) \left| \rho_k(x) - \rho_k(y) \right|^q \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1} \alpha_k(v) \left| \rho_k(x) - \rho_k(y) \right|^q \right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{2^i n}(v) \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1} \left| \rho_k(x) - \rho_k(y) \right|^q \right\}^{1/q}. \tag{2.22}$$

Пусть $f \in H_\omega$ $0 \le \beta < \eta \le 1$. Тогда в силу (2.5) из (2.22)следует

$$\left| R_{v,n}^{(q)}(x) - R_{v,n}^{(q)}(y) \right| = O(1) \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{2^i n}(v) 2^i n \left[\left(\omega(|x-y|) \right)^{\beta/\eta} \left(\omega\left(\frac{1}{2^i n} \right) \right)^{1-\beta/\eta} \right]^q \right\}^{1/q} =$$

$$= O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)2^i n\left(\omega\left(\frac{1}{2^i n}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q} =$$

$$= O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left\{n\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)} + 2\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)2^{i-1}n\left(\omega\left(\frac{1}{2^i}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q} =$$

$$= O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left\{n\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q} =$$

$$= O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left\{n\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)} + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}.$$

Таким образом

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}}\frac{\left|R_{v,n}^{(q)}(x)-R_{v,n}^{(q)}(y)\right|}{\omega^*(|x-y|)} = O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\times\left\{n\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)} + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q},\ n\in N,\ v\in V. \quad (2.23)$$

Аналогично, с учетом неравенства (2.18)имеем

$$\left\|R_{v,n}^{(q)}(x)\right\|_C = O(1)\left\{n\alpha_n(v)\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{q} + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{q}\right\}^{1/q}. \quad (2.24)$$

Из соотношений (2.21), (2.23) и (2.24) приходим к соотношению (2.20), что и завершает доказательство теоремы 2.1.

Приведем некоторые утверждения и оценки, вытекающие из доказанной теоремы.

Полагая в соотношении (2.20) $n=1$, $R_{\nu}^{(q)}(f;x)=R_{\nu,1}^{(q)}(f;x)$, получаем

$$\left\|R_{\nu}^{(q)}(f;x)\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<+\infty\\ x\neq y}}\frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q},\ \nu\in V. \tag{2.25}$$

Отсюда, принимая $V\equiv N$, $\alpha_k(\nu)=\alpha_k(n)=\alpha_k^{(n)}$, приходим к такому утверждению.

Следствие 2.1. *Пусть* $\alpha=\left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$, $k,n\in N$ *– бесконечная прямоугольная матрица неотрицательных чисел элементы которой не возрастают по k при каждом фиксированном* $n\in N$ *и* $0\leq\beta<\eta\leq 1$. *Тогда* $\forall f\in H_{\omega}\subset H_{\omega^*}$, $\forall q\geq 1$ *и* $\forall n\in N$

$$\left\|R_{n}^{(q)}(f;x)\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<+\infty\\ x\neq y}}\frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}(\nu)\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{q\left(1-\beta/\eta\right)}\right\}^{1/q}, \tag{2.26}$$

где $O(1)$ *– величина, имеющая прежний смысл.*

Замечание. *Пусть величина* $\omega(t)$ *является модулем непрерывности, удовлетворяющая условию*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega(1/k)\leq B\omega(1/n),\ B\equiv const>0. \tag{A}$$

Тогда существует функция $f_0(x)\in H_{\omega}\subset H_{\omega^*}$, *для которой*

$$\left\|R_{\nu,n}^{(q)}(f_0;x)\right\|_{C}\geq\left\{\textstyle\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left(\omega(1/k)\right)^{q}\right\}^{1/q}\ q\geq 1. \tag{2.27}$$

В самом деле, положим

$$f_0(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\omega(1/(k-1))-\omega(1/k)\right)\cos kx.$$

Ясно, что

$$E_k(f_0) = E_k(f_0)_C \le \left\| f_0(x) - S_k(f_0; x) \right\|_C =$$

$$= \left\| \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \left(\omega(1/\nu - 1) - \omega(1/\nu) \right) \cos kx \right\|_C \le$$

$$\le \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \left(\omega(1/\nu - 1) - \omega(1/\nu) \right) = \omega(1/k). \qquad (2.28)$$

В силу условия (А), неравенства (2.28) и неравенства С.Б. Стечкина [122]

$$\omega(f; 1/k) \le \frac{A}{k} \sum_{i=1}^{k} E_i(f), \qquad (2.29)$$

получаем

$$\omega(f_0; 1/k) \le \frac{A}{k} \sum_{i=1}^{k} \omega(1/i) \le AB\omega(1/k) = A_1 \omega(1/k), \ A_1 \overset{df}{=} AB, \qquad (2.30)$$

Из (2.30) следует включение $f_0 \in H_\omega$. Далее имеем

$$\left\| R_{\nu,n}^{(q)}(f_0; x) \right\|_C \ge \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(\nu) \left| \rho_k(f_0; 0) \right|^q \right\}^{1/q} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(\nu) \left| \omega(1/k) \right|^q \right\}^{1/q}.$$

Положим

$$\alpha = \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, 1 \le k \le n; \\ 0, k > n, \end{cases} \qquad (2.31)$$

$$R_n^{(q)}(f; x; \alpha) = H_n^{(q)}(f; x).$$

Тогда согласно (2.26) будем иметь

$$\left\| H_n^{(q)}(f;x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\omega^q(1/k)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}^{1/q}, \quad (2.32)$$

в частности, если $\omega(t) = t^{\alpha}$, $\omega^*(t) = t^{\gamma}$, $0 \le \gamma < \alpha \le 1$, $\eta = \alpha$, $\beta = \gamma$, замечая, что

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} = 1,$$

на основании (2.32) приходим к следующему утверждению.

Следствие 2.2. *Пусть* $0 \le \gamma < \alpha \le 1$. *Тогда* $\forall f \in H_{\alpha}$ *и* $\forall q \ge 1$

$$\left\| H_n^{(q)}(f;x) \right\|_{\gamma} = \begin{cases} O(1)\dfrac{1}{n^{\alpha-\gamma}}, & \alpha-\gamma < \dfrac{1}{q}; \\ O(1)\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\alpha-\gamma}, & \alpha-\gamma = \dfrac{1}{q}, \end{cases}$$

где $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные по n и зависящие, вообще говоря, от* $f \in H_{\alpha}$, *а норма* $\|\cdot\|_{\gamma}$ *определена равенством* (2.3).

Полагая

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} = 1, \; n \in N,$$

в силу выпуклости вверх функции $\varphi(u) = u^{\gamma}$, $0 < \gamma \le 1$, вследствие неравенства Иенсена ([153, с. 96]) получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \left(\omega^q(1/k)\right)^{1-\beta/\eta} \le \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \omega^q(1/k) \right\}^{1-\beta/\eta}, \; \gamma = 1 - \beta/\eta. \quad (2.33)$$

Следовательно, из оценки (2.27) следует соотношение

$$\left\| R_n^{(q)}(f;x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{-\infty<x,y<\infty} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \omega^q(1/k) \right\}^{\frac{1}{q}(1-\beta/\eta)} . \quad (2.34)$$

Предъявим функции $\omega(t)$ следующее условие:

$$\omega(\lambda t) = (\lambda+1)\omega(t), \ \lambda > 0 . \quad (2.35)$$

Тогда при всех $q > 1$ имеем

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\omega(1/k))^q \right\}^{1/q} \le \frac{1}{n^{1/q}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\omega\left(1/n^{1/q}\right)\right)^q \left(\frac{n^{1/q}}{k} + 1 \right)^q \right\}^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{n^{1/q}} \left\{ \sum_{k=1}^{\left[n^{1/q}\right]} \left(\omega\left(1/n^{1/q}\right)\right)^q \left(\frac{n^{1/q}}{k} + 1 \right)^q + \sum_{k=\left[n^{1/q}\right]+1}^{n} \left(\omega\left(1/n^{1/q}\right)\right)^q \left(\frac{n^{1/q}}{k} + 1 \right)^q \right\}^{1/q} \le$$

$$\le \frac{1}{n^{1/q}} \left\{ \sum_{k=1}^{\left[n^{1/q}\right]} \left(\omega\left(1/n^{1/q}\right)\right)^q \left(\frac{n^{1/q}}{k} + 1 \right)^q \right\}^{1/q} + \frac{1}{n^{1/q}} \left\{ \sum_{k=\left[n^{1/q}\right]+1}^{n} \left(\omega\left(1/n^{1/q}\right)\right)^q \left(\frac{n^{1/q}}{k} + 1 \right)^q \right\}^{1/q} \le$$

$$\le \frac{1}{n^{1/q}} \omega\left(1/n^{1/q}\right) \left\{ \sum_{k=1}^{\left[n^{1/q}\right]} \left(2\frac{n^{1/q}}{k} \right)^q \right\}^{1/q} + \frac{1}{n^{1/q}} \omega\left(1/n^{1/q}\right) \left\{ \sum_{k=\left[n^{1/q}\right]+1}^{n} 2^q \right\}^{1/q} \le$$

$$\le 2\omega\left(1/n^{1/q}\right) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q} \right\}^{1/q} + 2\omega\left(1/n^{1/q}\right) =$$

$$=\left(2\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^q}\right\}^{1/q}+2\right)\omega\left(1/n^{1/q}\right)=K_q\omega\left(1/n^{1/q}\right),$$

где

$$K_q=K(q)=2\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^q}\right\}^{1/q}+2\,,$$

$[a]$ – целая часть числа a.

Таким образом, если выполнено условие (2.35), то имеет место неравенство

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega(1/k)\right)^q\right\}^{1/q}\le K_q\omega\left(1/n^{1/q}\right),\ q>1\,. \tag{2.36}$$

Применяя оценку (2.36) к правой части (2.34) при условиях (2.31) и (2.35), получаем

$$\left\|H_n^{(q)}(f;x)\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\left(\omega\left(1/n^{1/q}\right)\right)^{1-\beta/\eta},\ q>1\,. \tag{2.37}$$

2.1.2. Пусть $\Lambda=\left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$ – бесконечная треугольная матрица неотрицательных чисел:

$$\Lambda=\left\{\lambda_k^{(n)}\ge 0:\lambda_k^{(n)}=0,\,k>n;\,k,n=0,1,\ldots\right\}$$

и рассмотрим линейные средние

$$U_n(f;x;\Lambda)=U_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}S_k(f;x)$$

частных сумм $S_k(f;x)$ тригонометрического ряда Фурье $S[f]$, порождаемые матрицей Λ.

Обобщая один результат Прёсдорфа [87], авторами работы [74] была доказана следующая теорема.

Теорема B. *Пусть* $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$ *– бесконечная треугольная матрица неотрицательных чисел элементы которой подчинены условиям:*

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} = 1, \; n = 0,1,\ldots;$$

$$\lambda_k^{(n)} \le \lambda_{k+1}^{(n)}, \; k = 0,\ldots,n-1; \; n = 1,2,\ldots.$$

Тогда, если $f \in H_\alpha$, $0 \le \beta < \alpha \le 1$, *то*

$$\left\| U_n(f;x) - f(x) \right\|_\beta = \begin{cases} O(1)\left(n^{\beta-\alpha} + \lambda_n^{(n)} n^{\beta-\alpha+1}\right), & 0 < \alpha < 1; \\ O(1)\left(n^{\beta-1} + \lambda_n^{(n)} n^{\beta} (\ln n)^{1-\beta}\right), & \alpha = 1. \end{cases}$$

В работе [132] было получено дальнейшее обобщение теоремы B.

Теорема C. *Пусть* $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$ *– матрица неотрицательных чисел, удовлетворяющая условиям теоремы B. Тогда, если* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$, $0 \le \beta < \eta \le 1$, *то*

$$\left\| U_n(f;x) - f(x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{-\infty < x, y < \infty} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\times \left[\left(\omega(1/n)\right)^{1-\beta/\eta} + \lambda_n^{(n)} n^{\beta/\eta} \left(\sum_{k=1}^{n} \omega(1/k) \right)^{1-\beta/\eta} \right].$$

Ниже доказываются уточненные варианты теорем B и C.

Теорема 2.2. *Пусть* $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$, $k = 0,\ldots,n-1$; $n = 1,2,\ldots$ *– бесконечная треугольная матрица неотрицательных чисел элементы которой удовлетворяют условиям*

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} = 1, \; n = 0,1,2,\ldots;$$

$$\lambda_k^{(n)} \le \lambda_{k+1}^{(n)},\ k = 0,\ldots,n-1;\ n = 1,2,\ldots .$$

Тогда, если $0 \le \beta < \eta \le 1$, *то* $\forall f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ *и* $\forall n \in N$ *имеет место соотношение*

$$\left\| f(x) - U_n(f;x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x,y < \infty \\ x \ne y}} \frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\times \left\{ \left(\omega(1/n)\right)^{1-\beta/\eta} + \lambda_n^{(n)} \sum_{k=1}^{n} \left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}, \qquad (2.38)$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$ *и зависящая, вообще говоря, от* $f \in H_\omega$.

Оценивая величину

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta},\ 0 \le \beta < \eta \le 1,$$

содержащуюся в (2.38), принимая во внимание выпуклость вверх функции $\varphi(u) = u^\gamma$, $0 < \gamma \le 1$, в силу неравенства Иенсена ([153, с. 96]) получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta} = \frac{n}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta} \le$$

$$\le n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \omega(1/k) \right)^{1-\beta/\eta} = n^{\beta/\eta} \left(\sum_{k=1}^{n} \omega(1/k) \right)^{1-\beta/\eta}. \qquad (2.39)$$

С другой стороны, пример функций $\omega^*(t) = t^\beta$, $0 < \beta < 1$, $\omega(t) = t$, показывает, что величины, содержащиеся в левой и правой частях

(2.39) в общем случае не являются величинами одного порядка, поскольку для левой части (2.39)

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta} \asymp n^{\beta},$$

а для правой части (2.39)

$$n^{\beta}\left(\sum_{k=1}^{n}\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta} \asymp n^{\beta}(\ln n)^{1-\beta},$$

где под символом f≍g понимается существование положительных постоянных K_1, K_2 таких, что

$$K_1 g \le f \le K_2 g \,,\; f, g \ge 0.$$

Доказательство теоремы 2.2. Положим

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

$$\delta_n(x) = \delta_n(f;x) = U_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}\right)dt,$$

$$\delta_n(x,y) = \delta_n(x) - \delta_n(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\right]\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}\right)dt.$$

Требуется оценить величину

$$\|\delta_n(x)\|_{\omega*} = \|\delta_n(x)\|_C + \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\ne y}}\frac{|\delta_n(x,y)|}{\omega*(|x-y|)}.$$

Имеем

$$\delta_n(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/n}^{\pi}\right)\left[\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\right]\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}\right)dt \stackrel{df}{=}$$

$$\stackrel{df}{=} I_n^{(1)}(x,y) + I_n^{(2)}(x,y). \tag{2.40}$$

В силу неравенств

$$\left|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\right| \le 4K\omega(|x-y|), \tag{2.41}$$

$$\left|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\right| \le 4K\omega(t), \tag{2.42}$$

с учетом условий теоремы и неравенства

$$\sin t \ge \frac{2t}{\pi},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \tag{2.43}$$

находим

$$\left|I_n^{(1)}(x,y)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/n} \frac{\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{1-\beta/\eta} \cdot \left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{\beta/\eta}}{\sin t/2} \times$$

$$\times \left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right| dt = O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta} \cdot \left(\omega\left(f;\frac{\pi}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} =$$

$$= O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta} \cdot \left(\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} = O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta} \cdot \left(\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \tag{2.44}$$

В следствие монотонности чисел $\lambda_k^{(n)}$, применяя преобразование Абеля, получаем

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right| = O(1)\frac{\lambda_n^{(n)}}{t}.$$

С учетом этого и неравенств (2.41), (2.42)

$$I_n^{(2)}(x,y) \le \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{1-\beta/\eta} \cdot \left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|^{\beta/\eta}}{\sin t/2} \times$$

$$\times\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right|dt = O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\cdot\lambda_n^{(n)}\int_1^n\left(\omega\left(f;\frac{\pi}{t}\right)\right)^{1-\beta/\eta}dt =$$

$$= O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\cdot\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(f;\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta} =$$

$$= O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\cdot\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\quad 0\le\beta<\eta\le 1. \tag{2.45}$$

Принимая во внимание (2.44) и (2.45), с учетом (2.40) находим

$$\delta_n(x,y) = O(1)\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}\left[\left(\omega(1/n)\right)^{1-\beta/\eta}+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta}\right],$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n, x и y.

Стало быть, в условиях теоремы

$$\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{|\delta_n(x,y)|}{\omega^*(|x-y|)} = O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty\\ x\ne y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\times\left[\left(\omega(1/n)\right)^{1-\beta/\eta}+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta}\right]. \tag{2.49}$$

Легко понять, что

$$\left\|\delta_n(x)\right\|_C = O(1)\left[\omega(1/n)+\lambda_n^{(n)}\sum_{k=1}^{n}\omega(1/k)\right]. \tag{2.50}$$

Вследствие (2.49) и (2.50) приходим к (2.38), чем и завершается доказательство теоремы. Полагая в условиях доказанной теоремы $\omega^*(t)=t^\beta$, $\omega(t)=t^\alpha$, $0\le\beta<\alpha\le 1$, $\eta=\alpha$, и учитывая, что в этом случае

$$\sup_{-\infty<x,y<\infty} \frac{\left(\omega\left(|x-y|\right)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*\left(|x-y|\right)}=1,$$

приходим к такому утверждению.

Следствие 2.3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.2 *и* $0 \le \beta < \alpha \le 1$. *Тогда* $\forall f \in H_\alpha$ *и* $\forall n \in N$

$$\left\|U_n(f;x)-f(x)\right\|_\beta = \begin{cases} O(1)\left(n^{\beta-\alpha}+\lambda_n^{(n)} n^{\beta-\alpha+1}\right), 0<\alpha-\beta<1; \\ O(1)\left(1/n+\lambda_n^{(n)}\ln n\right), \quad \alpha-\beta=1(\alpha=1,\beta=0), \end{cases}$$

где $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные по n и зависящие, вообще говоря,* от $f \in H_\alpha$, *а норма* $\|\cdot\|_\beta$ *определена равенством* (2.3).

Пусть $\{p_n\}$, $n=0,1,2...$ – некоторая неубывающая последовательность неотрицательных чисел и

$$\mathrm{P_n}=\sum_{k=0}^{n} p_k \ .$$

Положим

$$\overline{N}_n(f;x)=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k S_k(f;x).$$

Элементы матрицы $\lambda=\left\|\frac{p_k}{P_n}\right\|$, $k=0,...,n$; $p_k=0$, $k>n$, удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Отсюда получаем такое утверждение

Следствие 2.4. *Для любой функции* $f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ *имеет место соотношение*

$$\left\|\overline{N}_n(f;x)-f(x)\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<+\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\times$$

$$\times\left\{\left(\omega(1/n)\right)^{1-\beta/\eta}+\frac{p_n}{P_n}\sum_{k=0}^{n}\left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta}\right\},\ 0\le\beta<\eta\le 1. \qquad (2.51)$$

Замечая, что

$$\left(\omega(1/n)\right)^{1-\beta/\eta}\le\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta} \qquad (2.52)$$

и, полагая $p_k=1$, $k=0,1,...,n$; $p_k=0$, $k>n$,

$$\sigma_n(f;x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f;x),$$

из (2.51) и (2.52) приходим к соотношению

$$\left\|\sigma_n(f;x)-f(x)\right\|_{\omega^*}=O(1)\sup_{\substack{-\infty<x,y<+\infty\\ x\neq y}}\frac{\left(\omega(|x-y|)\right)^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega(1/k)\right)^{1-\beta/\eta}. \qquad (2.53)$$

§2.2. φ-сильная аппроксимация на классах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций.

В 1983 году А.И. Степанец (см., например, [104, 106]) ввел понятие (ψ,β) – дифференцирования функций и классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ следующим образом.

Определение В. *Пусть* $f\in L$ *и ряд (В.1) – её ряд Фурье. Пусть, далее,* $\psi(k)$ *– произвольная функция натурального аргумента и* $\beta\in R$.

Допустим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k\cos\left(kx+\beta\frac{\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\beta\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой функции из L. Эта функция обозначается через $f_\beta^\psi(x)$ *и называется* (ψ,β)*-производной функции* $f(x)$*, а множество функций, обладающих* (ψ,β)*-производной обозначается через* L_β^ψ*. Если* $f\in L_\beta^\psi$ *и* $f_\beta^\psi\in\mathfrak{N}$*, то пишут* $f\in L_\beta^\psi\mathfrak{N}$.

Более широкая классификация периодических функций также произведена А.И. Степанцом (см., например, [109], [112]).

Определение C. *Пусть* $f\in L$*, (B.1) – её ряд Фурье и пара* $\overline{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ *систем чисел* $\psi_1(k)$*,* $\psi_2(k)$ *удовлетворяет условию*

$$\overline{\psi}^2(k)\overset{df}{=}\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)\neq 0,\ k\in N.$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}A_k(f;x)-\frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\widetilde{A}_k(f;x)\right)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi\in L$*, то* φ *называется* $\overline{\psi}$*-производной функции f и пишут* $\varphi(\cdot)=D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)=f^{\overline{\psi}}(\cdot)$*. Подмножество функций* $f\in L$*, у которых существуют* $\overline{\psi}$*-производные, обозначаются через* $\overline{L}^{\overline{\psi}}$*. Если* $f\in\overline{L}^{\overline{\psi}}$ *и при этом* $f^{\overline{\psi}}\in\mathfrak{N}$*, где* $\mathfrak{N}\subset L$*, то пишут* $f\in\overline{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Определение D. *Пусть* $f\in L$ *и (B.1) – её ряд Фурье,* $\overline{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ *– пара произвольных систем чисел* $\psi_1(k)$*,* $\psi_2(k)$*,* $k\in N$*. Если ряд*

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi_1(k)A_k(f;x) + \psi_2(k)\widetilde{A}_k(f;x)\right),$$

где $A_0 \equiv const$, $\widetilde{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, *для данной функции* $f(\cdot)$ *и пары* $\overline{\psi}$ *является рядом Фурье некоторой функции* $F \in L$, *то F называется* $\overline{\psi}$ *-интегралом функции f, порожденным парой* $\overline{\psi}$, *или просто* $\overline{\psi}$ *-интегралом функции f:* $F(\cdot) = I^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$.

Множество $\overline{\psi}$ -интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через $L^{\overline{\psi}}$. Если $\mathfrak{N}$ некоторое подмножество из L, то $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ обозначает множество $\overline{\psi}$ -интегралов функций $f \in \mathfrak{N}$.

В работе [112, с. 151] показано, что при выполнении условия

$$\overline{\psi}^2(k) \overset{df}{=} \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \; k \in N,$$

справедливо равенство $\overline{L^{\overline{\psi}}} = L^{\overline{\psi}}$. В случае, когда $\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta\frac{\pi}{2}$, $\psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta\frac{\pi}{2}$, множества $L^{\overline{\psi}}$ переходят в L_β^ψ.

Не умоляя общности, можно считать, что последовательности $\psi(k)$ являются сужениями на множестве натуральных чисел некоторых положительных непрерывных выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности функций $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t \geq 1$. В соответствии с [112, с. 159] множество таких функций обозначим через $\mathfrak{M}$.

Множество $\mathfrak{M}$ неоднородно по скорости стремления к нулю при $t \to \infty$ его элементов. В [112, с. 159] вводится пара функций $\eta(t) = \eta(\psi;t)$ и $\mu(t) = \mu(\psi;t)$, которые определяются так:

$$\psi(\eta(t))=\frac{1}{2}\psi(t),\ t\geq 1;\ \eta(t)=\eta(\psi;t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right),$$

$$\mu(t)=\mu(\psi;t)=\frac{t}{\eta(t)-t}.$$

Для дальнейших целей из множества $\mathfrak{M}$ выделяются следующие подмножества [112, с. 160; 113, с. 46,48,50].

$$\mathfrak{M}_0=\{\psi\in\mathfrak{M}: 0<\mu(t)\leq K\ \forall t\geq 1\},$$

$$\mathfrak{M}_0^+=\{\psi\in\mathfrak{M}: \mu(\psi;t)\downarrow 0\},$$

$$\mathfrak{M}'=\left\{\psi\in\mathfrak{M}: \int_1^\infty\frac{\psi(t)}{t}dt\leq K<\infty\right\},$$

$$\mathfrak{M}_c=\{\psi\in\mathfrak{M}: 0<K_1\leq\mu(t)\leq K_2\ \forall t\geq 1\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty=\{\psi\in\mathfrak{M}: 0<K\leq\mu(t)<\infty\ \forall t\geq 1\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty^+=\{\psi\in\mathfrak{M}: \mu(\psi;t)\uparrow\infty\},$$

$$\mathfrak{M}''_\infty=\left\{\psi\in\mathfrak{M}: \eta(t)-t\geq K\ \ \forall t\geq 1;\ \int_t^\infty\psi(v)dv\leq K_1\,\psi(t)(\eta(\psi;t)-t)\ \ \forall t\geq 1\right\};$$

$$\mathfrak{M}_\infty^{+,''}=\{\psi\in\mathfrak{M}_\infty^+: \eta(t)-t\geq K>0\ \forall t\geq 1\},$$

$$F=\{\psi\in\mathfrak{M}: \eta'(\psi;t)\leq K\},$$

$$\mathfrak{M}'_0=\mathfrak{M}_0\cap\mathfrak{M}'.$$

Если $A\subset\mathfrak{M}$, то $\pm\psi\in A$ означает, что либо $\psi\in A$, либо $-\psi\in A$,

$$\mathfrak{N}^0=\left\{f\in\ \mathfrak{N}: \int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=0\right\}.$$

В этом параграфе устанавливаются оценки величин α-средних последовательности φ-отклонений частичных сумм рядов Фурье

$$H_{v,\varphi}^{(n)}(f;x;\alpha)=\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\varphi(|\rho_k(f;x)|), \tag{2.54}$$

$$\rho_n(f;x)=f(x)-S_{n-1}(f;x),\ n=1,2,\ldots,$$

функций классов $C^{\overline{\psi}}C^0$ через α-средние последовательности φ-наилучших приближений их $\overline{\psi}$-производных. Приводятся оценки верхних граней величин (2.54) на классах функций $C^{\overline{\psi}}C^0(\varepsilon)$ в метрике пространства C. Метод $\alpha=(\alpha_k(v))$, $k\in N$, $v\in V$, определяется как последовательность неотрицательных функций, заданных на множестве *V*, функция $\varphi=\varphi(u)$ определена и неотрицательна при всех значениях $u\in[0,+\infty)$. Функционал (2.54) характеризует φ-сильную суммируемость рядов Фурье методом α и может быть принят, в известном смысле, в качестве меры скорости сходимости ряда Фурье $S[f]$ к $f(\cdot)$.

Исследование величины (2.54) сводится к исследованию средних Валле-Пуссена последовательности φ-отклонений

$$H_{n,\varphi}(f;x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi(|\rho_k(f;x)|), \tag{2.55}$$

которые, в свою очередь, приводят к исследованию группы отклонений

$$h_{n,r}^{(q)}(f;x)=\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|\rho_{k_i}(f;x)\right|^q\right\}^{1/q},\ q>0, \tag{2.56}$$

$$n\le k_1<k_2<\ldots<k_r\le 2n,\ n,k_i\in N;\ i=1,\ldots,r.$$

Для дальнейших целей нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма А. (см., например, [112, с. 231]). *Для любой функции* $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ *существует такое число* $a > 0$, *что* $\forall n \in N$ *в промежутке* $(0, a/n)$ *выполняется равенство*

$$signI_2(\psi_2;n;t)_1 = sign\psi_2(n),\ t \in (0, a/n),$$

где

$$I_2(\psi_2;n;t)_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_n^{\infty} \psi_2(v)\sin vtdv .$$

Оценку величины (2.56) содержит следующее утверждение, которое не лишено, по-видимому, и самостоятельного интереса.

Лемма 2.2. *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}_0$, $n \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le 2n$, $n, k_i \in N$, $i = 1,\ldots,r$. *Тогда* $\forall f \in C^{\overline{\psi}}C^0$, $\forall q > 0$, $\forall x \in R$ *и* $\forall n \in N$ *имеет место неравенство*

$$h_{n,r}^{(q)}(f;x) \le K_q c_n(\overline{\psi}) E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\ln\frac{ne}{r}, \tag{2.57}$$

где

$$c_n(\overline{\psi}) \overset{df}{=} \overline{\psi}(n) + \int\limits_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt ,$$

$$\overline{\psi}(n) \overset{df}{=} \left(\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)\right)^{1/2},$$

$K_q = K(q)$ *– величина, зависящая от* q *и равномерно ограниченная по* $r, n \in N$, $x \in R$ *и* $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$.

Доказательство. В принятых в лемме 2.2 условиях в [112]приводится представление $\forall a > 0$:

$$\rho_k(f;x) = \int\limits_{|t|\le a/k} \Delta_n\left(f^{\overline{\psi}};x-t\right) I_2(\psi_2;k;t)\,dt +$$

$$+\frac{\overline{\psi}(k)}{\pi} \int\limits_{\frac{a}{k}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} \Delta_n\left(f^{\overline{\psi}};x-t\right)\frac{\sin(kt-\gamma_k)}{t}\,dt + O(1)\overline{\psi}(n)E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right), \qquad (2.58)$$

$k>n$, $\Delta_n\left(f^{\overline{\psi}};u\right) = f^{\psi}(u) - t^*_{n-1}(u)$,

$t^*_{n-1}(u)$ – тригонометрический полином наилучшего приближения функции $f^{\overline{\psi}}(u)$, $\gamma_n = arctg\,\dfrac{\psi_2(n)}{\psi_1(n)}$, $O(1)$ – величина, которая не зависит от $k \in N$ и $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$.

Используя (2.58) и применяя неравенство Минковского для сумм, получаем

$$h^{(q)}_{n,r}(f;x) \le \left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|\int\limits_{|t|\le\frac{a}{k_i}} \Delta_n\left(f^{\overline{\psi}};x-t\right) I_2(\psi_2;k_i;t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|\frac{\overline{\psi}(k_i)}{\pi}\int\limits_{\frac{a}{k_i}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} \Delta_n\left(f^{\overline{\psi}};x-t\right)\frac{\sin(k_i t-\gamma_{k_i})}{t}\,dt\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+O(1)\overline{\psi}(n)E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right) \overset{df}{=} \sum_{j=1}^{2} U^{(j)}_n(f;x) + O(1)\overline{\psi}(n)E_n\left(f^{\vec{\psi}}\right), \qquad (2.59)$$

где число q в силу неравенства для средних (В.9) не меньше числа 2.

В дальнейшем число $a>0$ выбираем с учетом утверждения леммы А. В этом случае, как показано в [112, с. 389],

$$\int\limits_{|t|\le a/n} \left|I_2(\psi_2;n;t)\right|dt = \frac{\pi}{2}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + O(1)\overline{\psi}(n).$$

Тогда

$$U_n^{(1)}(f;x) \le E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{2}{\pi}\int_{k_i}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + O(1)\overline{\psi}(k_i)\right)^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\left(\frac{2}{\pi}\int_{n}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + O(1)\overline{\psi}(n)\right) \le E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)c_n(\overline{\psi}), \qquad (2.60)$$

где

$$c_n(\overline{\psi}) = \overline{\psi}(n) + \int_{n}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt .$$

Положим

$$v_k^{(n)}\left(f^{\overline{\psi}};x\right) = \begin{cases} \dfrac{\overline{\psi}(k)}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{a}{k}\le|t|\le\frac{1}{r}}\Delta_n\left(f^{\overline{\psi}};x-t\right)\frac{\sin(kt-\gamma_k)}{t}dt, & \dfrac{a}{k}\ne\dfrac{1}{r}; \\ 0, & \dfrac{a}{k}=\dfrac{1}{r}. \end{cases}$$

В этих обозначениях

$$U_n^{(2)}(f;x) \le \left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|\frac{\overline{\psi}(k_i)}{\pi}\int_{\frac{1}{r}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}\Delta_n\left(f^{\overline{\psi}};x-t\right)\frac{\sin(k_i t-\gamma_{k_i})}{t}dt\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|v_{k_i}^{(n)}\left(f^{\overline{\psi}};x\right)\right|^q\right\}^{1/q} \overset{df}{=} \sum_{j=1}^{2}U_{n,j}^{(2)}(f;x). \qquad (2.61)$$

Если $\dfrac{a}{k_i} < \dfrac{1}{r}$, то

$$\left|v_{k_i}^{(n)}\left(f^{\overline{\psi}};x\right)\right| \le \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right) \ln \frac{k_i}{ra},$$

Если же $\frac{a}{k_i} > \frac{1}{r}$, то

$$\left|v_{k_i}^{(n)}\left(f^{\overline{\psi}};x\right)\right| \le \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right) \ln \frac{ar}{k_i},$$

Таким образом $\forall k_i \in [n,2n]$

$$\left|v_{k_i,n}\left(f^{\overline{\psi}};x\right)\right| \le \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right) \left|\ln \frac{k_i}{ar}\right| \le K\overline{\psi}(n) E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right) \ln \frac{ne}{r}. \qquad (2.62)$$

Вследствие (1.182)

$$U_{n,2}^{(2)}(f;x) \le \max_{1\le i\le r} \left|v_{k_i}^{(n)}\left(f^{\overline{\psi}};x\right)\right| \le K\overline{\psi}(n) E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right) \ln \frac{ne}{r}, \qquad (2.63)$$

Введем вспомогательную функцию

$$G_x^{(n)}(t) = \begin{cases} \Delta_n\left(f^{\overline{\psi}};x-t\right)t^{-1}, & \frac{1}{r} \le |t| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & [-\pi,\pi] \setminus \left\{\frac{1}{r} \le |t| \le \frac{\pi}{2}\right\}, \end{cases}$$

$$G_x^{(n)}(t+2\pi) = G_x^{(n)}(t).$$

Применяя теорему Хаусдорфа-Юнга ([35, с. 153]), получаем

$$U_{n,1}^{(2)}(f;x) \le \overline{\psi}(n) r^{-1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{r} \left|b_{k_i}\left(G_x^{(n)}\right)\right|^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{r} \left|a_{k_i}\left(G_x^{(n)}\right)\right|^q\right)^{1/q}\right] \le$$

$$\leq 2\overline{\psi}(n)r^{-1/q}\left\{\int\limits_{\frac{1}{r}\leq|t|\leq\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\Delta_n\left(f^{\overline{\psi}};x-t\right)}{t}\right|^{q'}dt\right\}^{1/q'}\leq 4q\,\overline{\psi}(n)E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right), \qquad (2.64)$$

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,$$

где $a_n(g)$, $b_n(g)$ – коэффициенты Фурье функции $g\in L_{q'}$. Согласно (2.63), (2.64) из (2.61) получаем

$$U_n^{(2)}(f;x)\leq K(q)\overline{\psi}(n)E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\ln\frac{ne}{r}. \qquad (2.65)$$

Принимая во внимание (2.59), (2.60) и (2.65) завершаем доказательство леммы 2.2.

Следуя В. Тотику [137, 138] обозначим через Φ-множество неубывающих и непрерывных на $[0,+\infty)$ функций $\varphi(u)$, подчиненных условиям: $\varphi(u)>0$ при всех $u>0$, $\varphi(0)=0$,

$$\varphi(u)\leq Ae^{bu}\quad\forall u\in[0,\infty),\ A\equiv const>0;\ b=b(\varphi),$$

$$\varphi(2u)\leq a\varphi(u)\ \forall u\in[0,1],\ a=a(\varphi)$$

Представителями множества Φ являются, к примеру, функции $\varphi(u)=u^q$, $q>0$, $\varphi(u)=\exp u-1$ и др.

Основываясь на лемме 2.2, покажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.3. *Пусть* $\pm\psi_1\in\mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2\in\mathfrak{M}'_0$ *и* $\varphi\in\Phi$. *Тогда* $\forall f\in C^{\overline{\psi}}C^0$, $\forall x\in R$ *и* $\forall n\in N$

$$H_{n,\varphi}(f;x)\leq K\varphi\left(c_n(\overline{\psi})E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right), \qquad (2.66)$$

где $K=K(\varphi)$ *– постоянная, не зависящая от* $n\in N$, $x\in R$ *и* $f\in C^{\overline{\psi}}C^0$.

Неравенство (2.66) уточняет оценку (В.18) в направлении порядка скорости сходимости величин $H_{n,\varphi}(f;x)$ на ряде важных подмножеств из C.

Доказательство теоремы 2.3. При доказательстве неравенства (2.66) будем следовать в общих чертах схеме рассуждений из работы [137].

Если $E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)=0$, то f является тригонометрическим полиномом порядка не выше n-1. В этом случае, с учетом определения множества Φ, теорема доказана.

Положим $\delta_n = c_n(\overline{\psi})E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)$ и пусть $E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)>0$. При каждых фиксированных $n\in N$, $x\in R$ обозначим

$$B_{n,\sigma}(x)=\{k\in[n,2n]:(\sigma-1)\delta_n \le |\rho_k(f;x)|\le \sigma\delta_n\},\ \sigma\in N,$$

$\mu_{n,\sigma}(x)$ – количество всех элементов множества $B_{n,\sigma}(x)$. Поскольку функция $\varphi(\cdot)$ не убывает, то

$$H_{n,\varphi}(f;x)=\frac{1}{n+1}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\ \sum_{k\in B_{n,\sigma}(x)}\varphi(|\rho_k(f;x)|)\le$$

$$\le\frac{1}{n+1}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi(\sigma\delta_n)\mu_{n,\sigma}(x), \tag{2.67}$$

где предполагается, что если при некотором σ $B_{n,\sigma}(x)=\{\emptyset\}$, то $\sum\limits_{k\in B_{n,\sigma}(x)}=0$.

Пусть $\mu_{n,\sigma}(x)\ge 1$ и k_i – все элементы множества $B_{n,\sigma}(x)$. Полагая в неравенстве (2.57) $r=\mu_{n,\sigma}(x)$, $q=1$ и оценивая $\mu_{n,\sigma}(x)$, находим

$$\mu_{n,\sigma}(x)\le K_1 n e^{-\sigma/K}. \tag{2.68}$$

Вследствие неравенства ([137])

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi(u\sigma)e^{-\sigma/K}\le C\varphi(u)\quad\forall u\in\left(0,\frac{1}{2aK}\right),\ C=C(\varphi),\qquad(2.69)$$

где a и $b=K$ – те же, что и в соотношениях (2.57) и определения множества Φ, с учетом (2.68) из (2.67) получаем

$$H_{n,\varphi}(f;x)\le K_1\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi(\sigma\delta_n)e^{-\sigma/K}\le C\varphi(\delta_n),\qquad(2.70)$$

при условии, что

$$\delta_n<\frac{1}{2aK}.\qquad(2.71)$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$, то $\exists n_0\in N$ такое, что $\forall n>n_0$ условие (2.71) выполняется, а вместе с ним и соотношение (2.70). Если же $n\le n_0$, то оценку (2.70) можно получить за счет соответствующего выбора константы. Теорема 2.3 доказана.

Следующее утверждение содержит оценку нормы в C величины $H_{v,\varphi}^{(n)}(f;x;\alpha)$, определяемой равенством (2.54).

Теорема 2.4. *Пусть* $\pm\psi_1\in\mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2\in\mathfrak{M}'_0$ *и* $\varphi\in\Phi$. *Пусть, далее, последовательность* $\alpha=(\alpha_k(v))$, $k\in N$, $\alpha_k(v)\ge 0\ \ \forall v\in V$ *такова, что при каждом фиксированном* $v\in V$ *числа* $\alpha_k(v)\overline{\psi}(k)$ *не возрастают по k. Тогда* $\forall f\in C^{\overline{\psi}}C^0$, $\forall n\in N$ *и* $\forall v\in V$

$$\left\|H_{v,\varphi}^{(n)}(f;x;\alpha)\right\|_C\le K\left\{n\alpha_n(v)\varphi\left(c_n(\overline{\psi})E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\varphi\left(c_k(\overline{\psi})E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)\right\},$$

(2.72)

где $K=K(\varphi)$ *– постоянная, не зависящая от* $n\in N$, $v\in V$, $f\in C^{\overline{\psi}}C^0$ *и от последовательности* α.

Доказательство. Согласно свойствам множества $\mathfrak{M}_0$ (см., например, [106, с. 93]) $\forall\psi\in\mathfrak{M}_0$ найдется число $\alpha>1$ такое, что $\eta(t)>\alpha t$ $\forall t\geq 1$. Выбирая число $\nu\in N$ таким, чтобы $\alpha^{\nu}>2$ и применяя последнее неравенство ν -раз, получаем $\eta(\ldots(\eta(n))\ldots)>\alpha^{\nu}n>2n$. В силу определения функции $\eta(t)$ с учетом последнего неравенства

$$\psi(n)=2\psi(\eta(n))=\ldots=2^{\nu}\psi(\eta(\ldots(\eta(n))\ldots))\leq 2^{\nu}\psi(2n).$$

Отсюда, полагая $\nu=\max\{\nu_1,\nu_2\}$, где ν_i, $i=1,2$, выбираются из условия $\alpha_i^{\nu_i}>2$, находим

$$\overline{\psi}(n)=\left(\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)\right)^{1/2}\leq\left(4^{\nu_1}\psi_1^2(2n)+4^{\nu_2}\psi_2^2(2n)\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq 2^{\nu}\left(\psi_1^2(2n)+\psi_2^2(2n)\right)^{1/2}\overset{df}{=}2^{\nu}\overline{\psi}(2n). \tag{2.73}$$

Вследствие условия теоремы и (2.73) заключаем

$$\alpha_k(v)=\frac{\alpha_k(v)\overline{\psi}(n)}{\overline{\psi}(n)}\leq\frac{\alpha_k(v)2^{\nu}\overline{\psi}(2n)}{\overline{\psi}(n)}\leq 2^{\nu}\alpha_n(v) \tag{2.74}$$

$$\forall k\in[n,2n] \text{ и } \forall v\in V.$$

Принимая во внимание (2.74), а также неравенство (2.66), $\forall x\in R$ и $\forall v\in V$ имеем

$$H_{v,\varphi}^{(n)}(f;x;\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}\ \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n}\alpha_k(v)\varphi(|\rho_k(f;x)|)\leq$$

$$\leq 2^{\nu}\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n}\varphi(|\rho_k(f;x)|)\leq$$

$$\leq K\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)2^i n\varphi\left(c_{2^i n}(\overline{\psi})E_{2^i n}\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right).$$

Откуда

$$H_{\nu,\varphi}^{(n)}(f;x;\alpha)\le$$

$$\le K\left\{n\alpha_n(\nu)\varphi\left(c_n(\overline{\psi})E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n}\alpha_{2^i n}(\nu)\varphi\left(c_{2^i n}(\overline{\psi})E_{2^i n}\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)\right\} \quad (2.75)$$

Рассуждая, как и при выводе неравенства (2.74), $\forall k\in\left[2^{i-1}n,2^i n\right]$ находим

$$\alpha_{2^i n}(\nu)\le 2^{\nu}\alpha_k(\nu) \quad \forall \nu\in V .$$

С учетом того, что величина $c_n(\overline{\psi})$ не возрастает из (2.75), получаем

$$\left\|H_{\nu,\varphi}^{(n)}(f;x;\alpha)\right\|_C\le$$

$$\le K\left\{n\alpha_n(\nu)\varphi\left(c_n(\overline{\psi})E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\varphi\left(c_k(\overline{\psi})E_k\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)\right\},\ K=K(\varphi),$$

чем и завершается доказательство теоремы 2.4.

Полагая в (2.72) $n=1$, находим

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\nu)\varphi\left(\left|\rho_k(f;x)\right|\right)\right\|_C\le K\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\nu)\varphi\left(c_k(\overline{\psi})E_k\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)\right\}. \quad (2.76)$$

Если, к примеру, $V\equiv N$, а матрица чисел $\alpha=(\alpha_k(\nu))=\left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$ задает некоторый метод суммирования рядов, элементы которой при каждом фиксированном $n\in N$ удовлетворяют условию теоремы 2.4, то отправляясь от соотношения (2.76) получаем оценки для достаточно широкого спектра α-средних последовательности φ-отклонений. В частности, полагая

$$\alpha_k^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, 1\le k\le n;\\ 0,\ k>n,\end{cases}$$

из соотношения (2.76) следует оценка для средних арифметических φ-отклонений

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ \varphi\left(\left|\rho_k\left(f;x\right)\right|\right)\right\|_C \leq K\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ \varphi\left(c_k\left(\overline{\psi}\right)E_k\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)\right\}, K=K(\varphi).$$

Аналогичные оценки получаются для средних логарифмических, средних Абеля-Пуассона φ-отклонений и др.

Замечание 1. *Отметим, что в некоторых важных случаях утверждение теоремы 2.4 является известным. Так, если* $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_c$, *то, как известно (см., например,* [109, с., 278]*)*

$$\int_n^{\infty}\frac{\left|\psi_2(t)\right|}{t}dt \leq K\left|\psi_2(n)\right|.$$

Стало быть, если $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_c$, *а* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *(* $\mathfrak{M}_c \subset \mathfrak{M}_0$*), то в условиях теоремы 2.4, неравенство (2.72) принимает вид*

$$\left\|H_{v,\varphi}^{(n)}\left(f;x;\alpha\right)\right\|_C \leq$$

$$\leq K\left\{n\alpha_n(v)\varphi\left(\overline{\psi}(n)E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\varphi\left(\overline{\psi}(k)E_k\left(f^{\overline{\psi}}\right)\right)\right\},\ K=K(\varphi). \tag{2.77}$$

Если функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ выбираются согласно равенствам

$$\psi_1(k)=\psi(k)\cos\beta\frac{\pi}{2},\ \psi_2(k)=\psi(k)\sin\beta\frac{\pi}{2},$$

при условии, что $\psi \in \mathfrak{M}_c$, $\beta \in R$, то $C^{\overline{\psi}}C^0 \overset{df}{=} C_\beta^\psi C^0$ и $\pm\psi_1$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_c$. Поэтому, предполагая, что числа $\alpha_k(v)\left|\psi(k)\right|$ не возрастают $\forall v \in V$, а это влечет то же самое условие для системы чисел $\alpha_k(v)\overline{\psi}(k)$ $\forall v \in V$, в силу (2.77) $\forall f \in C_\beta^\psi C^0$

$$\left\| H_{\nu,\varphi}^{(n)}(f;x;\alpha) \right\|_C \le$$

$$\le K\left\{ n\alpha_n(\nu)\varphi\left(\left|\psi(n)\right|E_n\left(f_\beta^\psi\right)\right) + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\varphi\left(\left|\psi(k)\right|E_k\left(f_\beta^\psi\right)\right)\right\}, \qquad (2.78)$$

Неравенство (2.78) ранее было установлено в [82].

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_n)$, $n \in N$, – произвольная монотонно убывающая к нулю последовательность неотрицательных чисел. При каждом ε через $C(\varepsilon)$ обозначим множество непрерывных функций $f(\cdot)$, для которых при каждом $n \in N$ $E_n(f) \le \varepsilon_n$, через $C^{\overline{\psi}}C^0(\varepsilon)$ – множество непрерывных функций, $\overline{\psi}$ – производные которых принадлежат к $C^0(\varepsilon) = C(\varepsilon) \cap C^0$.

Тогда из теоремы 2.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, *и* $\varphi \in \Phi$. *Пусть, далее, последовательность* $\alpha = (\alpha_k(\nu))$, $k \in N$, $\nu \in V$ *удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Тогда* $\forall n \in N$ *и* $\forall \nu \in V$

$$\sup_{f \in C^{\overline{\psi}}C^0(\varepsilon)} \left\| H_{\nu,\varphi}^{(n)}(f;x;\alpha) \right\|_C \le K\left\{ n\alpha_n(\nu)\varphi\left(c_n(\overline{\psi})\varepsilon_n\right) + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\varphi\left(c_k(\overline{\psi})\varepsilon_k\right)\right\}, \quad (2.79)$$

где $K = K(\varphi)$ *– постоянная, не зависящая от* $n \in N$, $\nu \in V$ *и от последовательности* α.

§2.3. Обратные теоремы сильной аппроксимации на классах (ψ,β) – дифференцируемых функций

В настоящее время существует ряд результатов касающихся обратных теорем, сформулированных в терминах сильной аппроксимации периодических функций. Исследования в этом направлении велись в работах Л. Лейндлера [66], Л. Лейндлера и Е. М. Никишина

[65], В.Г. Кротова [40], В.Г. Кротова и Л. Лейндлера [41], К.И. Осколкова [80], Сабодоша [125], В. Тотика [135, 136], Х.–Ю. Шмайсера и В. Зикеля [156] и др.

В этом параграфе доказываются некоторые обратные теоремы сильной аппроксимации функций на классах $C^{\psi}_{\beta}C$. Под обратными теоремами здесь понимаются такие теоремы, в которых устанавливаются структурные свойства функций на основе поведения нормы в C ряда φ-отклонений сумм Фурье. Ниже рассматриваются условия принадлежности функций классам $C^{\psi}_{\beta}C$ и приводятся оценки модулей непрерывности *k*-го порядка их (ψ,β) – производных, а также их наилучших приближений в терминах параметров, определяющих классы C^{ψ}_{β}.

2.3.1. Прежде напомним некоторые определения. Пусть $f \in L$ и

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right) \tag{2.80}$$

– её ряд Фурье, $\psi=\psi(k)$, $k\in N$, – произвольная последовательность действительных чисел и β-фиксированное действительное число, $\beta\in R$.

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k\cos\left(kx+\beta\frac{\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\beta\frac{\pi}{2}\right)\right) \tag{2.81}$$

является рядом Фурье некоторой функции, то её обозначают $f^{\psi}_{\beta}(x)$ и называют (ψ,β)-производной функции $f(x)$. Множество функций, обладающих (ψ,β)-производной, обозначают через L^{ψ}_{β}. Если при этом $f^{\psi}_{\beta}\in\mathfrak{N}$, то пишут $f\in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}\overset{df}{=}L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}\cap C$.

Как и прежде функции $\psi(\cdot)$ удобно считать следами на множестве N функций непрерывного аргумента $t \geq 1$, которые предполагаются выпуклыми вниз и исчезающими на бесконечности. Множество таких функций, как известно, обозначается $\mathfrak{M}$.

В данном параграфе рассматриваются множества

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi;t) \leq K \ \forall t \geq 1\},$$

$$\mathfrak{M}_c = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_1 \leq \mu(\psi;t) \leq K_2 \ \forall t \geq 1\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi;t) \uparrow \infty\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty^{+,''} = \{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ : \eta(t) - t \geq K > 0 \ \forall t \geq 1\},$$

$$F = \{\psi \in \mathfrak{M} : \eta'(t) \leq K \ \forall t \geq 1\}, \ K = K(\psi),$$

$$\mu(t) = \mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Модуль непрерывности k-го порядка определяется с помощью равенства

$$\omega_k(f,\delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \left\| \Delta_h^k f(x) \right\|_c, \ 0 < \delta \leq \pi,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih)$$

– конечная разность функции $f(x)$ k-го порядка с шагом h.

В принятых обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Пусть* $f \in C$, $\psi \in \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty^{+,''}$. *и, кроме того,*

$$\Delta^2 \frac{1}{\psi(n)} \stackrel{df}{=} \frac{1}{\psi(n+1)} - 2\frac{1}{\psi(n)} + \frac{1}{\psi(n-1)} \geq 0 \tag{2.82}$$

Пусть, далее, функция $\varphi(\cdot)$ *неотрицательна, строго возрастающая и выпуклая вверх на* $[0,+\infty)$, $\varphi(0)=0$, $\overline{\varphi}(\cdot)\overset{df}{=}\varphi^{-1}(\cdot)$ *– обратная к ней функция, удовлетворяющая условию*

$$\overline{\varphi}(t_1+t_2)\le A[\overline{\varphi}(t_1)+\overline{\varphi}(t_2)] \ \ \forall t_1,t_2>0, \tag{2.83}$$

где $A\equiv const>0$. *Если при некотором* $\delta\in(0,1)$

$$\int_0^{\delta}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{u^2|\ln u|\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)}du<+\infty, \tag{2.84}$$

и выполнено условие

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(|\rho_k(f;x)|)\right\|_C=M<+\infty \tag{2.85}$$

$$\rho_n(f;x)=f(x)-S_{n-1}(f;x),\ n\in N,$$

то $\forall\beta\in R$ *существует непрерывная* (ψ,β)*-производная* $f_\beta^\psi(\cdot)$ *функции* $f(\cdot)$ $(f\in C_\beta^\psi C)$, *для которой*

$$1)\ \omega_k(f_\beta^\psi;h)\le C(k)\left\{h^k\int_h^{1/2}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{u^{k+2}|\ln u|\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)}du+\right.$$

$$\left.+\int_0^h\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{u^2|\ln u|\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)}du\right\}; \tag{2.86}$$

$$2)\ E_n(f_\beta^\psi)\le K\left\{\frac{\overline{\varphi}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\psi(n)\ln n}+\int_0^{1/(n+1)}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{u^2|\ln u|\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)}du\right\}; \tag{2.87}$$

$K\equiv const>0$.

Доказательство. В условиях, накладываемых на функцию $\varphi(\cdot)$ и конечности нормы группы отклонений (2.85) в [136] установлено неравенство

$$E_n(f) \le K \frac{\overline{\varphi}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n},\ K > 0 \tag{2.88}$$

для любой $f \in C$. В свою очередь в [32], в условиях теоремы 2.6 показано, что для функции $f \in C$ существует (ψ, β)-производная $f_\beta^\psi \in C$, для которой

$$\omega_k\left(f_\beta^\psi; 1/n\right) \le C(k)\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{E_\nu(f)\nu^k}{\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{E_\nu(f)}{\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)}\right\}, \tag{2.89}$$

если ряд в правой части (2.89) сходится.

Покажем, что данный ряд сходится, когда интеграл (2.84) конечен, а также справедливость неравенств (2.86), (2.87).

На основании (2.88) из (2.89) находим

$$\omega_k\left(f_\beta^\psi; 1/n\right) \le C_1(k)\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\overline{\varphi}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\nu^k}{\ln\nu\,\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\overline{\varphi}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\ln\nu\,\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)}\right\},$$

Пусть $\nu \le x \le \nu+1$. Тогда в силу свойств функции $\overline{\varphi}(\cdot)$

$$\overline{\varphi}\left(\frac{\ln\nu}{\nu}\right) \le \overline{\varphi}\left(2\frac{\ln x}{x}\right) \le A\overline{\varphi}\left(\frac{\ln x}{x}\right),\ A > 0,$$

а поскольку при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\mu(\psi; t)\uparrow$, то и

$$\frac{\nu}{\eta(\nu)-\nu} \le \frac{x}{\eta(x)-x}.$$

Стало быть,

$$\frac{\nu^k \overline{\varphi}\left(\frac{\ln \nu}{\nu}\right)}{\ln \nu \psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)} \le A_1 \frac{x^k \overline{\varphi}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\psi(x) \ln x(\eta(x)-x)},\ \nu \le x \le \nu+1. \tag{2.90}$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}_c$, $\nu \le x \le \nu+1$, то по определению,

$$K_1 t \le \eta(t)-t \le K_2 t,\ K_1, K_2 > 0\ \ \forall t \ge 1,$$

и тогда

$$\frac{\nu^k \overline{\varphi}\left(\frac{\ln \nu}{\nu}\right)}{\ln \nu \psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)} \le A_2 \frac{x^k \overline{\varphi}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\psi(x) \ln x(\eta(x)-x)},\ \nu \le x \le \nu+1. \tag{2.91}$$

Таким образом, когда $\psi \in \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty^{+,''}$ и $\nu \le x \le \nu+1$, в силу (2.90) и (2.91) получаем

$$\frac{\nu^k \overline{\varphi}\left(\frac{\ln \nu}{\nu}\right)}{\ln \nu \psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)} \le A_3 \int_\nu^{\nu+1} \frac{x^k \overline{\varphi}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x \psi(x)(\eta(x)-x)} dx,\ A_3 > 0 \tag{2.92}$$

Вследствие (2.92) находим

$$\omega_k\left(f_\beta^\psi; 1/n\right) \le C_2(k)\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=2}^{n-1}\int_\nu^{\nu+1}\frac{x^k \overline{\varphi}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x \psi(x)(\eta(x)-x)}dx + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\int_\nu^{\nu+1}\frac{\overline{\varphi}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x \psi(x)(\eta(x)-x)}dx\right\} =$$

$$= C_2(k)\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=2}^{n-1}\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{|\ln u|\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)}du + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)du}{|\ln u|\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)u^2}\right\} =$$

$$=C_2(k)\left\{\frac{1}{n^k}\int\limits_{1/n}^{1/2}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{|\ln u|\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)u^2}du+\int\limits_0^{1/n+1}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)u^2|\ln u|}du\right\}.$$

При $h\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, подбирая $n\in N$ так, чтобы $1/n+1\le h<1/n$, получаем соотношение (2.86).

Соотношение (2.87) следует из приведенного в работе [32] неравенства

$$E_n\left(f_\beta^\psi\right)\le K\left\{\frac{E_n(f)}{\psi(n)}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(f)}{\psi(k)(\eta(k)-k)}\right\},$$

соотношений (2.84) и (2.88) по указанной выше схеме. Теорема 2.6 доказана.

Заметим, что функция $\psi(v)=\psi_r(v)=v^{-r}\in\mathfrak{M}_c$, $0<r<1$, но не удовлетворяет условию $\Delta^2\frac{1}{\psi(n)}\ge 0$, $\psi(n)=\psi_r(n)=n^{-r}$. Тем не менее, учитывая доказанные в [32] неравенства:

$$\omega_k\left(f_\beta^\psi;1/n\right)\le C(k)\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{r+k-1}E_\nu(f)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_\nu(f)\nu^{r-1}\right\},$$

$$E_n\left(f_\beta^\psi\right)<K\left\{E_n(f)n^r+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_\nu(f)\nu^{r-1}\right\},\ 0<r<1,$$

используя схему доказательства теоремы 2.6, получаем такое утверждение.

Теорема 2.7. *Пусть* $f\in C$, $\psi(n)=n^{-r}$, $0<r<1$, *функция* $\varphi(\cdot)$ *удовлетворяет всем условиям теоремы 2.6. Тогда, если при некотором* $\delta\in(0,1)$

$$\int_0^{\delta} \frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{u^{r+1}|\ln u|} du < +\infty ,$$

и выполнено условие

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|\rho_k(f;x)|) \right\|_C = M < +\infty ,$$

то $\forall \beta \in R$ *существует* (ψ, β)*-производная, для которой*

$$1)\ \omega_k\left(f_\beta^\psi; 1/n\right) \leq C(k) \left\{ h^k \int_h^{1/2} \frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{u^{r+k+1}|\ln u|} du + \int_0^h \frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{u^{r+1}|\ln u|} du \right\},\ 0 < h \leq \frac{1}{2}, \tag{2.93}$$

$$2)\ E_n\left(f_\beta^\psi\right) \leq K \left\{ \frac{n^r \overline{\varphi}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n} + \int_0^{1/(n+1)} \frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{u^{r+1}|\ln u|} du \right\}, K > 0 \tag{2.94}$$

2.3.2. Теорему 2.6 можно обобщить в следующем направлении.

Согласно определению [113, с. 115] пара (ψ, β) принадлежит множеству B_C $((\psi, \beta) \in B_C)$, если для любого тригонометрического полинома $T_n(\cdot)$ порядка *n* выполняется неравенство

$$\left\| T_n(\cdot)_\beta^\psi \right\|_c \leq O(1) |\psi(n)|^{-1} \| T_n(\cdot) \|_C , \tag{2.95}$$

в котором $O(1)$-величина, равномерно ограниченная по *n* и по T_n.

В [113, с. 115-120] указаны некоторые достаточные условия включения $(\psi, \beta) \in B_C$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.8. *Пусть* $\varphi(\cdot)$ *– неотрицательная функция, строго возрастающая и выпуклая вверх на* $[0,+\infty)$, $\varphi(0)=0$, $\overline{\varphi}(\cdot)=\varphi^{-1}(\cdot)$ *– обратная к ней функция, удовлетворяющая условию*

$$\overline{\varphi}(t_1+t_2)\le A[\overline{\varphi}(t_1)+\overline{\varphi}(t_2)]\ \ \forall t_1,t_2>0 .$$

Пусть, далее, $f\in C$ *и выполнено условие (2.85).*

Тогда:

1) *если* $(\psi,\beta)\in B_C$ *при некотором* $\delta\in(0,1)$

$$\int_0^{\delta}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{|\psi(1/u)\ln u|u^2}\,du<+\infty, \tag{2.96}$$

то существует производная $f_\beta^\psi\in C$, *для которой*

а) $$\omega_k\left(f_\beta^\psi;h\right)\le C_1(k)\left\{h^k\int_h^{1/2}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{|\psi(1/u)\ln u|u^{k+2}}\,du+\int_0^h\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{|\psi(1/u)\ln u|u^2}\,du\right\} \tag{2.97}$$

б) $$E_n\left(f_\beta^\psi\right)\le K_1\int_0^{1/(n+1)}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{|\psi(1/u)\ln u|u^2}\,du\,; \tag{2.98}$$

2) *если* $(\psi,\beta)\in B_C$, $\psi\in\mathfrak{M}_0$ *и при некотором* $\delta\in(0,1)$

$$\int_0^{\delta}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{u|\ln u|\psi(1/u)}\,du<+\infty, \tag{2.99}$$

то существует производная $f_\beta^\psi\in C$, *для которой*

а) $$\omega_k\left(f_\beta^\psi;h\right)\le C_2(k)\left\{h^k\int_h^{1/2}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)du}{|\ln u|\psi(1/u)u^{k+1}}+\int_0^h\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{\psi(1/u)u|\ln u|}\,du\right\}; \tag{2.100}$$

б) $$E_n\left(f_\beta^\psi\right)_c \le K_2\left\{\frac{\overline{\varphi}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\psi(n)\ln n}+\int_0^{1/(n+1)}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{\psi(1/u)u|\ln u|}du\right\}; \qquad (2.101)$$

3) *если* $(\psi,\beta)\in B_C$, $\psi\in F$, $\eta(\psi;t)-t\ge K>0$ $\forall t\ge 1$, $\mu(t)=\mu(\psi;t)$ *монотонно возрастает и при некотором* $\delta\in(0,1)$

$$\int_0^\delta \frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)u^2|\ln u|}du<+\infty, \qquad (2.102)$$

то существует производная $f_\beta^\psi\in C$, *для которой*

а) $$\omega_k\left(f_\beta^\psi;h\right)\le C_3(k)\left\{h^k\int_h^{1/2}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)du}{\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)|\ln u|u^{k+2}}+\right.$$

$$\left.+\int_0^h\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)}{\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)u^2|\ln u|}du\right\}; \qquad (2.103)$$

б) $$E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C \le K_3\left\{\frac{\overline{\varphi}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n\,\psi(n)}+\int_0^{1/(n+1)}\frac{\overline{\varphi}(u|\ln u|)du}{\psi(1/u)(\eta(1/u)-1/u)|\ln u|u^2}\right\}. \qquad (2.104)$$

Доказательство. В [113, с., 121] в условиях п.1 теоремы доказано, что $\forall f\in C$ существует непрерывная производная $f_\beta^\psi(x)$, для которой

$$E_n\left(f_\beta^\psi\right)\le K\sum_{k=n}^\infty E_k(f)|\psi(k)|^{-1},\ n\in N, \qquad (2.105)$$

при условии, что ряд в правой части (2.105) сходится.

Покажем, что данный ряд, при условии конечности интеграла (2.96) действительно сходится, а также справедливость соотношений (2.97) и (2.98).

В силу известного неравенства С.Б. Стечкина [122]

$$\omega_k\left(f_\beta^\psi;1/n\right)\le C(k)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu\left(f_\beta^\psi\right), \tag{2.106}$$

неравенства (2.105), производя замену порядка суммирования, будем иметь

$$\omega_k\left(f_\beta^\psi;1/n\right)\le C(k)n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\sum_{m=\nu}^{\infty}\frac{E_m(f)}{|\psi(m)|}\right)\le$$

$$\le C(k)\left(\frac{1}{n^k}\sum_{m=1}^{n}\frac{E_m(f)}{|\psi(m)|}\sum_{\nu=2}^{m}\nu^{k-1}+\frac{(n+1)^{k-1}}{n^k}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{E_m(f)}{|\psi(m)|}\right)\le$$

$$\le C_1(k)\left(\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{E_\nu(f)}{|\psi(\nu)|}\nu^k+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{E_\nu(f)}{|\psi(\nu)|}\right), \tag{2.107}$$

На основании (2.88) и (2.107) находим

$$\omega_k\left(f_\beta^\psi;1/n\right)\le C_1(k)\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\overline{\varphi}\left(\frac{\ln\nu}{\nu}\right)}{\ln\nu\,|\psi(\nu)|}\nu^k+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\overline{\varphi}\left(\frac{\ln\nu}{\nu}\right)}{\ln\nu\,|\psi(\nu)|}\right\}.$$

Далее, следуя схеме доказательства теоремы 2.6, приходим к соотношениям (2.97), (2.98). Неравенства (2.99) – (2.104) устанавливаются аналогично, с применением в соответствующих случаях неравенств ([113, с. 121]).

$$E_n\left(f_\beta^\psi\right)\le K\left\{\frac{E_n(f)}{\psi(n)}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{E_\nu(f)}{\nu\psi(\nu)}\right\},$$

и

$$E_n\left(f_\beta^\psi\right)\le K\left\{\frac{E_n(f)}{\psi(n)}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{E_\nu(f)}{\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)}\right\}.$$

§2.4. Сильная суммируемость и коэффициенты Фурье.

2.4.1. Введем в рассмотрение величину

$$H_p(x)=H_p(f;x;\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k\left|f(x)-S_k(f;x)\right|^p,\ p>0 \tag{2.108}$$

$\Delta\lambda_k=\lambda_{k+1}-\lambda_k,\ k=0,1,\ldots$.

Здесь приводятся необходимые или достаточные условия принадлежности величин $H_p(x)$ к лебеговым классам в терминах коэффициентов Фурье функций $f(x)$, а также устанавливаются некоторые теоремы вложения в терминах наилучших приближений. В дальнейшем везде в этом параграфе предполагается, что последовательность чисел $\lambda=(\lambda_k),\ k=0,1,\ldots$ неотрицательна и не убывает.

Теорема 2.8. *Пусть* $f(x)\in L_p(0,2\pi),\ p>1$. *Для того, чтобы ряд (2.108) сходился (п.в.) на* $[0,2\pi]$ *к некоторой функции* $H_p(x)\in L(0,2\pi)$ *необходимо при* $1<p\le 2$ *выполнения условия*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}<\infty, \tag{2.109}$$

причем

$$\left\|H_p(x)\right\|_L\ge K_p\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}, \tag{2.110}$$

а при $p\ge 2$ *необходимо выполнения условия*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}<\infty\left(b_0(f)=0\right), \tag{2.111}$$

причем

$$\left\|H_p(x)\right\|_L\ge K_p\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{2.112}$$

где $K_p=K(p)$ *– положительная константа, зависящая только от p.*

Ниже будет показано, что условие (2.109) является и достаточным на некотором классе функций из L_p, $1 < p \le 2$, а неравенство (2.110) не улучшаемо. Неравенство (2.112) также не улучшаемо по порядку на классе функций из L_p, $p \ge 2$.

Доказательство. Положим

$$H_{p,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left|\rho_k(f;x)\right|^p , \tag{2.113}$$

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_n(f;x).$$

В силу известной теоремы Харди и Литтлвуда ([35, с.165]):

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}\right\}^{1/p} \le K_p \|f\|_p , \tag{2.114}$$

$f \in L_p(0,2\pi)$, $1 < p \le 2$,

находим

$$\int_0^{2\pi} H_p(x)dx \ge \int_0^{2\pi} H_{p,n}(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \int_0^{2\pi}\left|\rho_k(f;x)\right|^p dx \ge$$

$$\ge K_p \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f) + b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(m+1)^{p-2} \tag{2.115}$$

Применим преобразование Абеля к правой части неравенства (2.115):

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f) + b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(m+1)^{p-2} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_0)\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2} +$$

$$+ (\lambda_{n+1} - \lambda_0)\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f) + b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(m+1)^{p-2} , \tag{2.116}$$

$\forall n \in N$. Отсюда $\forall n \in N$

$$\int_0^{2\pi} H_p(x)dx \ge K_p \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_0)\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2} .$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, приходим к неравенству (2.110).

Пусть $p \geq 2$. Воспользуемся неравенством

$$\|f\|_p \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \|f\|_s, \quad s > p \geq 1,$$

которое вытекает из неравенства Гёльдера и неравенством

$$\left(\sum_i a_i\right)^r \geq \sum_i a_i^{\,r}, \quad r \geq 1, \; a_i > 0 .$$

Тогда в силу равенства Парсеваля получаем

$$\int_0^{2\pi} H_p(x)dx \geq \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left(\left(\int_0^{2\pi} |\rho_k(f;x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \geq K_p^{(1)} \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left(\int_0^{2\pi} |\rho_k(f;x)|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} =$$

$$= K_p^{(2)} \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left(\sum_{m=k+1}^{\infty} \left(a_m^2(f) + b_m^2(f)\right) \right)^{\frac{p}{2}} \geq K_p^{(2)} \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m=k+1}^{\infty} \left(a_m^2(f) + b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} . \tag{2.117}$$

Применяя преобразование Абеля к правой части (2.117), находим

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m=k+1}^{\infty} \left(a_m^2(f) + b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0)\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} +$$

$$+ (\lambda_{n+1} - \lambda_0) \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(a_m^2(f) + b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} .$$

Поэтому из (2.117) вытекает, что $\forall n \in N$

$$\int_0^{2\pi} H_p(x)dx \geq K_p^{(2)} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0)\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} .$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, приходим к неравенству (2.112). Теорема 2.8 доказана.

Теорема 2.9. *Для того, чтобы ряд (2.108) сходился (п.в.) на* $[0,2\pi]$ *к некоторой функции* $H_p(x) \in L(0,2\pi)$, $p \geq 2$, *при условии*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (k+1)^{p-2} < \infty,$$

достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (k+1)^{p-2} < \infty \;\; \left(b_0(f) = 0\right), \tag{2.118}$$

причем

$$\left\| H_p(x) \right\|_L \leq K_p \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_0) \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (k+1)^{p-2}, \tag{2.119}$$

а при $1 < p \leq 2$ *и сходимости ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} < \infty,$$

достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} < \infty, \tag{2.120}$$

причем

$$\left\| H_p(x) \right\|_L \leq K_p \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_0) \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{2.121}$$

где $K_p = K(p)$ *– положительная константа, зависящая только от p.*

Теорема 2.9 не уточняема в смысле приведенных в ней условий.

Доказательство. Пусть $p \geq 2$. Воспользуемся теоремой Харди и Литтлвуда ([35, с. 165]):

$$\|f\|_L \leq K_p \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (k+1)^{p-2} \right\}^{1/p}, \tag{2.112}$$

при условии, что ряд справа сходится.

Тогда имеем

$$\int_0^{2\pi} H_{n,p}(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k \int_0^{2\pi} |\rho_k(f;x)|^p dx \le K_p \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m=k+1}^{\infty} \left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (m+1)^{p-2} \quad (2.123)$$

Применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m=k+1}^{\infty} \left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (m+1)^{p-2} = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (k+1)^{p-2} +$$

$$+ (\lambda_{n+1}-\lambda_0) \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)^{p/2} (m+1)^{p-2} . \qquad (2.124)$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} H_{n,p}(x)dx \le K_p \left\{ \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (k+1)^{p-2} + \right.$$

$$\left. + (\lambda_{n+1}-\lambda_0) \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (m+1)^{p-2} \right\}$$

Отсюда, учитывая условие (2.118), по теореме Б. Леви ([1, с.19]) заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} H_p(x)dx \le K_p \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} (k+1)^{p-2}.$$

Неравенство (2.119) установлено.

Пусть $1 < p \le 2$. Вследствие неравенств $\left(\sum_i a_i\right)^r \le \sum_i a_i^{\,r}$, $0 < r \le 1$, $\|f\|_p \le (2\pi)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \|f\|_s$, $s > p \ge 1$, с учетом равенства Парсеваля будем иметь

$$\int_0^{2\pi} H_{n,p}(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \int_0^{2\pi} |\rho_k(f;x)|^p dx \le K_p \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left(\int_0^{2\pi} |\rho_k(f;x)|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} =$$

$$=K_p\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\left(\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)\right)^{\frac{p}{2}}\le K_p\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}} \quad (2.125)$$

Применяя преобразование Абеля к правой части (2.125), находим

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}+(\lambda_{n+1}-\lambda_0)\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}},$$

$$\int_0^{2\pi}H_{n,p}(x)dx\le K_p\left\{\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}+\right.$$

$$\left.+(\lambda_{n+1}-\lambda_0)\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}\right\}.$$

Отсюда, учитывая условие (2.120), по теореме Б. Леви заключаем, что

$$\int_0^{2\pi}H_p(x)dx\le K_p\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Теорема 2.9 доказана.

Положим

$$L_p^*=\left\{g(x)\in L_p(0,2\pi),p>1:S[g]=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx,a_n\downarrow 0\right\}.$$

Теорема 2.10. *Пусть* $g(x)\in L_p^*(0,2\pi),p>1$. *Для того, чтобы ряд (2.108) сходился (п.в.) на* $[0,2\pi]$ *к некоторой функции* $H_p(g;\lambda;x)\in L(0,2\pi)$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k^p(g)(k+1)^{p-2} < \infty, \qquad (2.126)$$

причем

$$K_p^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_0) a_k^p(g)(k+1)^{p-2} \le \left\| H_p(g;\lambda;x) \right\|_L \le$$

$$\le K_p^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_0) a_k^p(g)(k+1)^{p-2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $H_p(g;\lambda;x) \in L(0,2\pi)$. Используя неравенство [35, с. 194]

$$\int_0^{\pi} |g(x)|^p dx \ge C_p \sum_{n=2}^{\infty} a_n^p (n+1)^{p-2}, \quad p > 1, \quad g \in L_p^*(0,2\pi),$$

имеем

$$\int_0^{2\pi} H_p(g;\lambda;x) dx \ge \int_0^{2\pi} H_p(g;\lambda;x) dx = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k 2 \int_0^{\pi} |\rho_k(g;x)|^p dx \ge C_p \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m=k+1}^{\infty} a_m^p (m+1)^{p-2}.$$

Применяя преобразование Абеля, находим

$$\int_0^{2\pi} H_p(g;\lambda;x) dx \ge C_p \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0) a_k^p (k+1)^{p-2} + (\lambda_{n+1} - \lambda_0) \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m^p (m+1)^{p-2}.$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi} H_p(g;\lambda;x) dx \ge C_p \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0) a_k^p (k+1)^{p-2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\int_0^{2\pi} H_p(g;\lambda;x) dx \ge C_p \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_0) a_k^p (k+1)^{p-2}, \quad p > 1.$$

Достаточность. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k^p(g)(k+1)^{p-2} < \infty$, $g(x) \in L_p^*(0,2\pi)$. Имеем

$$\int_0^{2\pi} H_{n,p}(g;\lambda;x)dx = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \int_0^{2\pi} |\rho_k(g;x)|^p dx = 2\sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \int_0^{\pi} |\rho_k(g;x)|^p dx.$$

Используя неравенство [35, с. 194]

$$\int_0^{\pi} |g(x)|^p dx \le C_p \sum_{n=1}^{\infty} A_n^p n^{-2}, \forall p > 1,$$

где $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, а также неравенство Харди [153, с. 308]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} A_n^p \le C_p \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} a_n^p(g), \ p > 1,$$

заключаем, что сходимость последнего ряда равносильна условию $g \in L_p^*(0,2\pi)$. Далее

$$\int_0^{2\pi} H_{n,p}(g;\lambda;x)dx \le C_p \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m=k+1}^{\infty} m^{-2} A_m^p \le C_p^{(1)} \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m=k+1}^{\infty} (m+1)^{p-2} a_m^p,$$

$p > 1$.

Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\int_0^{2\pi} H_{n,p}(g;\lambda;x)dx \le C_p^{(1)} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0) a_k^p(g)(k+1)^{p-2} + (\lambda_{n+1} - \lambda_0) \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m^p(g)(m+1)^{p-2}$$

Поскольку сходимость ряда

$$\sum_{n=01}^{\infty} a_n^p (n+1)^{p-2}$$

равносильна условию $g \in L_p^*$, $p > 1$, учитывая (2.126) по теореме Б.Леви заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} H_p(g;\lambda;x)dx \le C_p \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_0) a_k^p(g)(k+1)^{p-2} .$$

Теорема доказана.

Теорема 2.10 показывает неуточняемость соотношений (2.110) и (2.119) на классе $L_p^*(0,2\pi)$.

Пусть E-подмножество в $N_0 = N \cup \{0\}$. Функция $f(x) \in L(0,2\pi)$ называется E-спектральной [158, с. 261], если $a_n(f) = 0$, $b_n(f) = 0$ для всех $n \in N_0 \setminus E(b_0(f) = 0)$. Пусть T-множество всех тригонометрических полиномов, T_E-множество всех E-спектральных тригонометрических полиномов, т.е. $g(x) \in T_E$, если

$$g(x) = \sum_{n\in E} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

причем A_n и B_n равны нулю вне какого-то конечного множества значений $n \in E$. В данном случае множество E можно считать конечным. Подмножество E в N_0 называется множеством Сидона [158, с. 268], если

$$\sum_{n\in E} \sqrt{a_n^2(g) + b_n^2(g)} \le B \, ess \sup_x |g(x)|,$$

$$B = B(E), \ \forall g \in T_E .$$

Известно [158 с. 208], что если E-множество Сидона, то $\forall g \in T_E$ и $\forall p \in (2,\infty)$ имеет место неравенство

$$\|g\|_p \le B\sqrt{p}\|g\|_2, \tag{2.127}$$

а также $\forall g \in T_E$ и $\forall p \in (1,2)$,

$$\left(\sum_{n\in E} \left(a_n^2(g) + b_n^2(g)\right)\right)^{1/2} \le B\sqrt{p'}\|g\|_p, \ p' = \frac{p}{p-1} \tag{2.128}$$

Теорема 2.11. *Пусть E-множество Сидона,* $g(x) \in T_E$. *Тогда при* $1 < p < 2$

$$\left\| H_p(g;\lambda;x) \right\|_L \ge K_p(E) \sum_{k \in E} (\lambda_k - \lambda_0) \left(a_k^2(g) + b_k^2(g) \right)^{\frac{p}{2}} , \quad (2.129)$$

а при $p > 2$

$$\left\| H_p(g;\lambda;x) \right\|_L \le K_p(E) \sum_{k \in E} (\lambda_k - \lambda_0) \left(a_k^2(g) + b_k^2(g) \right)^{\frac{p}{2}} , \quad (2.130)$$

Доказательство. Положим
$E_k = E \cap \{m : m \ge k+1\},\ m \in N,\ 1 < p < 2$. В силу условий теоремы и неравенства (2.128), находим

$$\int_0^{2\pi} H_p(g;\lambda;x) dx \ge \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left[\left(\int_0^{2\pi} \left| \rho_k(g;x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \ge$$

$$\ge K_p(E) \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left[\left(\sum_{m \in E_k} \left(a_m^2(g) + b_m^2(g) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]^p =$$

$$= K_p(E) \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left(\sum_{m \in E_k} \left(a_m^2(g) + b_m^2(g) \right) \right)^{p/2},$$

где предполагается, что множество E_k не пусто, т.е. $l \ge |E_k| \ge 1$. Далее воспользуемся неравенством [153, с.80]

$$\sum_m \frac{a_m^\alpha}{d_m^{\alpha-1}} < \frac{\left(\sum_m a_m \right)^\alpha}{\left(\sum_m d_m \right)^{\alpha-1}},\ \alpha \in (0,1),\ a_m > 0,\ d_m > 0.$$

С этой целью положим

$$d_m = \begin{cases} 1, & m \in E_k \\ 0, & m \notin E_k \end{cases}.$$

Тогда последнее неравенство принимает вид

$$\sum_{m \in E_k} a_m^{\alpha} < \frac{\left(\sum_{m \in E_k} a_m \right)^{\alpha}}{\left| E_k \right|^{\alpha - 1}}, \ \alpha \in (0,1).$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi} H_p(g;\lambda;x)dx \ge K_p(E) \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m \in E_k} \left(a_m^2(g) + b_m^2(g) \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Применяя преобразование Абеля и переходя к пределу при $n \to \infty$, окончательно получаем

$$\int_0^{2\pi} H_p(g;\lambda;x)dx \ge K_p(E) \sum_{k \in E} (\lambda_k - \lambda_0) \left(a_k^2(g) + b_k^2(g) \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Пусть $p > 2$. В силу неравенства (2.127) находим

$$\int_0^{2\pi} H_{n,p}(g;\lambda;x)dx = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \int_0^{2\pi} \left| \rho_k(g;x) \right|^p dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left[\left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{m \in E_k} \left(a_m(g)\cos mx + b_m(g)\sin mx \right) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left[\left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{m \in E_k} \left(a_m(g)\cos mx + b_m(g)\sin mx \right) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^p.$$

С учетом равенства Парсеваля

$$\int_0^{2\pi} H_{n,p}(g;x;\lambda)dx \le \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left[\left(\sum_{m\in E_k}\left(a_m^2(g)+b_m^2(g)\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right]^p =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \left(\sum_{m\in E_k}\left(a_m^2(g)+b_m^2(g)\right)\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Далее используем неравенство [153. с. 80].

$$\sum_m \frac{a_m^\alpha}{d_m^{\alpha-1}} > \frac{\left(\sum_m a_m\right)^\alpha}{\left(\sum_m d_m\right)^{\alpha-1}}, \ \alpha > 1. \tag{2.131}$$

С учетом приведенных выше обозначений и неравенства (2.131), находим

$$\left(\sum_{m\in E_k}\left(a_m^2(g)+b_m^2(g)\right)\right)^{\frac{p}{2}} \le l^{\frac{p}{2}-1}\left(\sum_{m\in E_k}\left(a_m^2(g)+b_m^2(g)\right)\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\int_0^{2\pi} H_{n,p}(x)dx \le K_p(E)\sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{m\in E_k}\left(a_m^2(g)+b_m^2(g)\right)^{\frac{p}{2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(g)+b_k^2(g)\right)^{\frac{p}{2}} + (\lambda_{n+1}-\lambda_0)\sum_{m\in E_n}\left(a_m^2(g)+b_m^2(g)\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Переходя к пределу, получаем (2.130). Соотношения (2.129), (2.130) показывают неуточняемость соотношений (2.112) и (2.121) на классе T_E.

Теорема 2.12. *Пусть* $f(x)\in L_2(0,2\pi)$. *Для того, чтобы ряд (2.108) при p=2 сходился (п.в.) на* $[0,2\pi]$ *к некоторой функции* $H_2(x)\in L(0,2\pi)$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)<\infty, \tag{2.132}$$

причем

$$\left\|H_2(x)\right\|_L=\pi\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right). \tag{2.133}$$

Доказательство. Пусть $H_2(x)\in L(0,2\pi)$. Тогда по теореме Б. Леви и равенству Парсеваля находим

$$\left\|H_2(x)\right\|_L=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}H_{2,n}(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\int_0^{2\pi}\left|\rho_k(f;x)\right|^2dx=$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right). \tag{2.134}$$

Применяя преобразование Абеля

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)+(\lambda_{n+1}-\lambda_0)\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right), \tag{2.135}$$

$\forall n\in N$.

Из существование предела (2.134) следует, существование предела в правой части (2.135), что равносильно условию (2.132). Поэтому из (2.134) следует равенство

$$\left\|H_2(x)\right\|_L=\pi\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right).$$

Обратно, пусть выполняется условие (2.132). Тогда из равенства (2.135) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)$$

и

$$\int_0^{2\pi}H_{2,n}(x)dx=\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)\le\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)<K$$

Отсюда по теореме Б. Леви заключаем, что предельная функция $H_2(x)=\lim_{n\to\infty}H_{2,n}(x)\in L(0,2\pi)$. Теорема доказана.

Теорема 2.12 в части необходимого и достаточного условия следует также из утверждений теорем 2.8 и 2.9 при p=2. Этот результат был установлен Г.А. Фоминым ([147]).

2.4.2. Пусть $E_n(f)_p=\inf_{t_n}\left\|f(\cdot)-t_n(\cdot)\right\|_p$ – наилучшее приближение функции $f\in L_p(0,2\pi)$ тригонометрическими полиномами степени не выше n:

$$t_n(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\cos kx+d_k\sin kx\right),\ c_k,d_k\in R\,.$$

Теорема 2.13. *Если*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k E_k^p(f)_p<\infty\,, \tag{2.136}$$

то при $1<p\le 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}<\infty\,, \tag{2.137}$$

а при $p\ge 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}<\infty\,. \tag{2.138}$$

Если при $p\ge 2$ $\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}<\infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}<\infty\ \left(b_0(f)=0\right), \qquad (2.139)$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k E_k^p(f)_p<\infty,$$

если при $1<p\le 2$ $\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}<\infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}<\infty, \qquad (2.140)$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k E_k^p(f)_p<\infty.$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (2.136). Это условие эквивалентно условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k\int_0^{2\pi}\left|\rho_k(f;x)\right|^p dx<\infty,\ 1<p<\infty, \qquad (2.141)$$

на основании того, что

$$E_n(f)_p\le\left\|\rho_n(f;x)\right\|_p\le K_pE_n(f)_p\ \ \forall f\in L_p,\ 1<p<\infty.$$

Отсюда по теореме Б. Леви ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k\left|\rho_k(f;x)\right|^p$$

сходится почти всюду к функции $H_p(x)\in L(0,2\pi)$. Тогда в силу теоремы 2.8 заключаем, что при $1<p\le 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}<\infty,$$

а при $p\ge 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}<\infty\cdot$$

Пусть $p\geq 2$. Используя отношения (2.123), (2.124), находим

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k E_k^p(f)_p \leq K_p\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\int_0^{2\pi}\left|\rho_k(f;x)\right|^p dx\leq$$

$$\leq K_p^{(1)}\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}=$$

$$=K_p^{(1)}\left\{\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_0)\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}+\right.$$

$$\left.+(\lambda_{n+1}-\lambda_0)\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(a_m^2(f)+b_m^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(m+1)^{p-2}\right\},\ p\geq 2.$$

Отсюда, в силу (2.139) получаем сходимость ряда (2.136). Аналогично, пользуясь соотношениями (2.125) и преобразованием Абеля на основании (2.140) приходим к сходимости ряда (2.136) и при $1<p\leq 2$. Теорема доказана.

Перейдем к теоремам вложения.

Теорема 2.14. *Если при* $p>1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k E_k(f)_p<\infty, \tag{2.142}$$

то ряд

$$H_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda\left|\rho_k(f;x)\right| \tag{2.143}$$

сходится (п.в.) к $H_1(x)\in L_p(0,2\pi)$.

Доказательство. Будем считать, что $E_n(f)_p > 0$, $n = 0,1,\ldots$ Обозначим $t_0 = 0$, $t_k = \sum\limits_{m=0}^{k-1} \dfrac{\Delta\lambda_m}{E_m^{p-1}(f)_p}$, $p > 1$, $k = 1,2,\ldots$ Тогда в силу (2.142)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta t_k E_k^p(f)_p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\lambda_k}{E_k^{p-1}(f)_p} E_k^p(f)_p = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k E_k(f)_p < \infty.$$

Это равносильно условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta t_k \int_0^{2\pi} \left|\rho_k(f;x)\right|^p dx < \infty, \ p > 1.$$

Отсюда по теореме Б. Леви ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta t_k \left|\rho_k(f;x)\right|^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\lambda_k}{E_k^{p-1}(f)_p} \left|\rho_k(f;x)\right|^p$$

почти всюду сходится к некоторой суммируемой функции.

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$H_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k \left|\rho_k(f;x)\right| = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta\lambda_k)^{\frac{1}{q}} (\Delta\lambda_k)^{\frac{1}{p}} \frac{E_k^{1/q}(f)_p}{E_k^{1/q}(f)_p} \left|\rho_k(f;x)\right| \le$$

$$\le \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \left((\Delta\lambda_k)^{\frac{1}{q}} E_k^{1/q}(f)_p\right)^q\right\}^{1/q} \cdot \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(\Delta\lambda_k)^{1/p}}{E_k^{1/q}(f)_p} \cdot \left|\rho_k(f;x)\right|\right)^p\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k E_k(f)_p\right\}^{1/q} \cdot \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\lambda_k}{E_k^{p/q}(f)_p} \cdot \left|\rho_k(f;x)\right|^p\right\}^{1/p} =$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k E_k(f)_p\right\}^{1/q}\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta\lambda_k}{E_k^{p-1}(f)_p}\cdot|\rho_k(f;x)|^p\right\}^{1/p},$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Отсюда

$$H_1^p(x)\le K_p\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta\lambda_k}{E_k^{p-1}(f)_p}|\rho_k(f;x)|^p\right\}\in L(0,2\pi),$$

т.е. ряд (2.143) сходится (п.в.) к некоторой функции из $L_p(0,2\pi)$, $p>1$.

Теорема 2.15. *Если ряд (2.143) сходится почти всюду к некоторой функции* $H_1(x)\in L_p(0,2\pi)$, $p>1$, *то при* $1<p\le 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_0)^p\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}<\infty, \qquad (2.144)$$

а при $p\ge 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_0)^2\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)<\infty. \qquad (2.145)$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, находим

$$H_1^p(x)\ge\left(\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k|\rho_k(f;x)|\right)^p\ge\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k\rho_k(f;x)\right|^p=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_0)\left(\rho_k(f;x)-\rho_{k+1}(f;x)\right)+(\lambda_{n+1}-\lambda_0)\rho_n(f;x)\right|^p=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_0)\left(a_{k+1}\cos(k+1)x+b_{k+1}\sin(k+1)x\right)+(\lambda_{n+1}-\lambda_0)\rho_n(f;x)\right|^p=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n-1}(\lambda_k-\lambda_0)\big(a_k\cos kx+b_k\sin kx\big)+(\lambda_{n+1}-\lambda_0)\rho_n(f;x)\right|^p.$$

Пусть $1<p\le 2$. Тогда в силу неравенства (2.114)

$$\int_0^{2\pi}H_1^p(x)dx\ge\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_0)\big(a_k\cos kx+b_k\sin kx\big)+\right.$$

$$\left.+(\lambda_{n+1}-\lambda_0)\rho_n(f;x)\right|^p dx\ge$$

$$\ge K_p\left\{\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_0)\big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\big)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}+\right.$$

$$\left.+(\lambda_{n+1}-\lambda_0)^p\sum_{k=n+1}^{\infty}\big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\big)^{\frac{p}{2}}(k+1)^{p-2}\right\}.$$

Отсюда следует справедливость (2.144).

Пусть $p\ge 2$. Тогда включение $H_1(x)\in L_p$ влечет включение $H_1(x)\in L_2$. Отсюда в силу результата Г.А. Фомина [147]:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\big)(\lambda_k-\lambda_0)^2<\infty,$$

убеждаемся в справедливости теоремы.

ГЛАВА III

КРАТНЫЕ СУММЫ ФУРЬЕ И φ- СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НА КЛАССАХ $\overline{\psi}$-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данной главе устанавливаются многомерные аналоги неравенств типа Лебега на классах функций $C^{\overline{\psi}}C^0(T^m), L^{\overline{\psi}}L_p(T^m), p \ge 1$, в пространствах $C(T^m)$ и $L_S(T^m)$ соответственно. Сформулировано утверждение, содержащее асимптотическое равенство для отклонений тригонометрическими полиномами, которые порождаются линейными методами суммирования рядов Фурье функций классов $C^{\psi}C\left(T^m\right)$, а также его обращение. Приводятся оценки средних Валле-Пуссена последовательности φ-отклонений прямоугольных сумм Фурье на классах функций $C^{\overline{\psi}}C^0(T^m)$.

§3.1. Отклонения прямоугольных сумм Фурье на классах $\overline{\psi}$- дифференцируемых функций многих переменных

3.1.1. Хорошо известное неравенство Лебега [63] имеет вид

$$\left\|\rho_n\left(f;x\right)\right\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + R_n\right)E_n\left(f\right), \left|R_n\right| \le 4, \tag{3.1}$$

где $\rho_n\left(f;x\right) = f\left(x\right) - S_{n-1}\left(f;x\right)$, $S_n\left(f;x\right)$ – частичные суммы порядка n ряда Фурье S[f]. На всем классе C это неравенство точно по порядку, и в нем константу $\frac{4}{\pi^2}$ уменьшить нельзя. В то же время, как показано А. И. Степанцом в [108-110,112], существуют важные подмножества функций из C, для которых соотношение (3.1) оказывается неточным даже по порядку. В указанных работах доказан ряд утверждений, уточняющих неравенство (3.1) на классах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций.

Ближайшей целью является установление многомерных аналогов приводимых ниже утверждений в этом направлении.

Один из аналогов неравенства Лебега (3.1) в случае приближения суммами Фурье функций небольшой гладкости содержится в следующем утверждении.

Теорема D_1**.** *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$. *Тогда* $\forall f \in C^{\overline{\psi}} C^0$ *при любом* $n \in N$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\rho_n\left(f;x\right)\right\|_C \le \left(\frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{\left|\psi_2\left(t\right)\right|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\overline{\psi}(n)\right)E_n(f^{\overline{\psi}}) \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} \left(\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}}) + O(1)\overline{\psi}(n)\right)E_n(f^{\overline{\psi}}), \qquad (3.2)$$

где O(1) – величина, равномерно ограниченная по n и по $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$.

Для любой функции $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$ *при каждом* $n \in N$ *в пространстве* $C^{\overline{\psi}} C^0$ *найдется функция F(x)=F(f;n;x) такая, что* $E_n(F^{\overline{\psi}})=E_n(f^{\overline{\psi}})$ *и для нее соотношение (3.2) переходит в равенство.*

Вторая часть теоремы D_1 показывает, в частности, что неравенство (3.2) асимптотически точно на всем пространстве $C^{\overline{\psi}} C^0$ и на некоторых важных подмножеств из $C^{\overline{\psi}} C^0$. Одним из таких подмножеств является класс

$$C_\infty^{\overline{\psi}} = \left\{f: \ f \in C^{\overline{\psi}}, \ f^{\overline{\psi}} \in S_M^0\right\},$$

где

$$S_M^0 = \left\{ \varphi : \ \|\varphi\|_M = ess\sup_t |f(t)| \le 1, \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0 \right\}.$$

В этом случае имеет место соотношение

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}}) \le \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\overline{\psi}(n), \qquad (3.3)$$

где

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}}) = \sup\left\{ |f(x) - S_{n-1}(f;x)|; f \in C_\infty^{\overline{\psi}} \right\},$$

и в (3.3) строго неравенства быть не может.

Интегральный аналог теоремы D_1 содержится в следующем утверждении (см., например, [112, с. 252]).

Теорема D₂. *Если* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *и* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}'_0$, *то* $\forall f \in L^{\overline{\psi}}$ *при любом* $n \in \mathbf{N}$

$$\|\rho_n(f;x)\|_1 \le \left(\frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\overline{\psi}(n) \right) E_n(f^{\overline{\psi}})_1,$$

(3.4)

где O(1) – величина равномерно ограниченная по n, и

$$E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)_1 = \inf_{t_{n-1} \in \mathfrak{I}_{2n-1}} \left\| f^{\overline{\psi}} - t_{n-1} \right\|_1.$$

Пусть

$$L^{\overline{\psi}} S_1^0 = \left\{ f \in L^{\overline{\psi}} : f^{\psi} \in S_1^0 \right\},$$

где $S_1 = \left\{ \varphi : \|\varphi\|_1 \le 1 \right\}$. Тогда $\forall f \in L^{\overline{\psi}} S_1^0$

$$\left\|\rho_n\left(f;x\right)\right\|_1 \le \frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\overline{\psi}(n), \tag{3.5}$$

причем в (3.5) строго неравенства быть не может.

Теорема D_3 ([112, с.266]). *Пусть* $\pm\psi_1$, $\pm\psi_2 \in \mathrm{F}$. *Тогда, если выполняется условие*

$$O < K_1 \le \frac{\eta(\psi_1;t)-t}{\eta(\psi_2;t)-t} \le K_2 < \infty \quad \forall t \ge 1, \tag{3.6}$$

то $\forall f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ *при любом* $n \in \mathrm{N}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\rho_n\left(f;x\right)\right\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+ n(\eta(n)-n) + O(1)\right)\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}})_C, \tag{3.7}$$

в котором $\eta(n)$ *есть либо* $\eta(\psi_1;n) = \psi_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_1(n)\right)$, *либо* $\eta(\psi_2;n) = \psi_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_2(n)\right)$, *O(1) – величина, равномерно ограниченная по n.*

Для любой функции $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ *при каждом* $n \in \mathrm{N}$ *в пространстве* $C^{\overline{\psi}}C^0$ *найдется функция F(x)=F(f;n;x) такая, что* $E_n(F^{\overline{\psi}}) = E_n(f^{\overline{\psi}})$ *и для нее соотношение (3.7) становится равенством.*

Теорема D_4 ([112, с. 286]). *Пусть* $\pm\psi_1, \pm\psi_2 \in F$. *Тогда, если выполнено условие (2.6), то* $\forall f \in L^{\overline{\psi}}$ *при любом* $n \in \mathrm{N}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\rho_n\left(f;x\right)\right\|_1 \le \frac{4}{\pi^2}(\ln^+(\eta(n)-n) + O(1))\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}})_1, \tag{3.8}$$

в котором величины $\eta(n)$, $O(1)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* D_3. *Неравенство (3.8) асимптотически точное: константу* $\frac{4}{\pi^2}$ *уменьшить нельзя.*

Пусть, далее (см., например [113, с. 48]),

$$\mathfrak{M}''_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}_\infty : \eta(\psi;t) - t \geq K_1 \quad \forall t \geq 1, \tag{3.9}$$

$$\int_t^\infty \psi(v)dv \leq K_2\psi(t)(\eta(\psi;t)-t) \quad \forall t \geq 1\}, \tag{3.10}$$

где K_1, K_2 – некоторые положительные постоянные.

Представителями множества $\mathfrak{M}''_\infty$ являются, к примеру, функции

$$\psi_r(v) = \exp(-\alpha v^r), \quad \alpha > 0, r \in (0,1).$$

Теорема D_5 ([113, с. 50]). *Пусть* $\pm\psi_1, \pm\psi_2 \in \mathfrak{M}''_\infty$, $1 < p, s < \infty$ *и*

$$\alpha = \left(p^{-1} - s^{-1}\right)_+ = \begin{cases} p^{-1} - s^{-1}, & p < s \\ 0, & p \geq s \end{cases}.$$

Тогда, если выполнено условие (3.6), то $\forall f \in L^{\overline{\psi}} L_p$ *при любом* $n \in \mathrm{N}$

$$E_n(f)_S \leq \|\rho_n(f;x)\|_S \leq C_{p,s}\overline{\psi}(n)(\eta(n)-n)^\alpha E_n(f^{\overline{\psi}})_p, \tag{3.11}$$

где

$$E_n(f)_S = \inf_{t_{n-1}\in\mathfrak{I}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_S, \quad \|\varphi\|_S = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^s dt\right)^{1/s}, \ s>1,$$

$\eta(n)$ *есть либо* $\eta(\psi_1;n)$, *либо* $\eta(\psi_2;n)$, *а* $C_{p,s}$ *– величина, которая может зависеть только от p и s.*

Если

$$S_P=\{\varphi:\|\varphi\|_P\le 1\},\quad L^{\overline{\psi}}S_P\overset{df}{=}L_P^{\overline{\psi}},$$

$$E_n(L_P^{\overline{\psi}})_S=\sup_{f\in L_P^{\overline{\psi}}}E_n(f)_S,$$

$$\mathcal{E}_n(L_P^{\overline{\psi}})_S=\sup_{f\in L_P^{\overline{\psi}}}\|\rho_n(f;x)\|_S,$$

то в условиях теоремы D_5 справедливо неравенство ([113, с. 57]).

$$E_n(L_p^{\overline{\psi}})_S\le\mathcal{E}_n(L_p^{\overline{\psi}})_S\le C_{p,s}^{(i)}\overline{\psi}(n)(\eta(n)-n)^{\alpha},\tag{3.12}$$

где $C_{P,S}^{(i)}$, i=1,2, - величины, которые могут зависеть только от p и s.

Неравенства (3.12) при $\pm\psi_i\in\mathfrak{M}''_\infty$, i=1,2, по порядку улучшены быть не могут.

3.1.2. Пусть *f(x)=f(x,…,x$_m$)*–2π – периодическая функция по каждой из переменных суммируемая на кубе периодов $T^m(f\in L(T^m))$

$$\mathrm{T}^m=\{x\in R^m:-\pi\le x_k\le\pi,k=1,2,\dots,m\},$$

$$S[f]=\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_m=0}^{\infty}2^{-q(k_1,\dots,k_m)}A_{k_1,\dots,k_m}(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-q(k)}A_k(f;x),\tag{3.13}$$

– полный ряд Фурье функции $f\in L(T^m)$, где $q(k)=q(k_1,\dots,k_m)$ – количество нулевых координат точки $k=(k_1,\dots,k_m)$,

$$A_k(f;x)=\sum_{\gamma\in P}a_k(f;\gamma)\prod_{i=1}^{m}\cos(k_it_i-\gamma_i\frac{\pi}{2}),$$

P – множество всех точек $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m) \in R^m$, координаты которых имеют значения, равные нулю либо единице,

$$a_k(f;\gamma) = \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos(k_i t_i - \gamma_i \frac{\pi}{2}), \qquad (3.14)$$

– коэффициенты Фурье функции $f \in L(T^m)$, соответствующей наборам $k=(k_1, \ldots\ldots, k_m)$ и γ. Объединяя (3.13), (3.14), и определение $A_k(f;x)$, получаем

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-q(k)} \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos k_i (t_i - x_i) dt . \qquad (3.13')$$

Пусть $\overline{m} = \{1, ..., m\}$ и $\mu \subset \overline{m}$, $|\mu|$ – количество элементов множества μ. Для любой $f \in L(T^m)$ положим

$$S[f]_\mu = \sum_{k^\mu = 0}^{\infty} 2^{-q(k)} \pi^{-|\mu|} \int_{T^{|\mu|}} f(t^\mu + x^{c\mu}) \prod_{i \in \mu} \cos k_i (t_i - x_i) dt^\mu,$$

(3.15)

где $k^\mu = (k_{j_1}, ..., k_{j_{|\mu|}})$, $j_1, ..., j_{|\mu|} \in \mu$, $t^\mu = (t_1, ..., t_m)$, причем $t_i=0$, если $i \notin \mu$, $c\mu = \overline{m} \setminus \mu$, $x^{c\mu} = (x_1, ..., x_m)$ и $x_i = 0$, если $i \in \mu$, т. е. $t^\mu + x^{c\mu}$ – точка из R^m, у которой координаты, имеющие номера из множества μ, обозначаются t_i, а остальные через x_i, $dt^\mu = dt_{j_1} ... dt_{j_{|\mu|}}$.

Ряд (3. 15) называется частным рядом Фурье функции $f \in L(T^m)$ по группе переменных x_i, $i \in \mu$. В случае, когда $\mu = \overline{m}$, $S[f]_\mu = S[f]$.

Пусть $\overline{\psi}_i(k_i)\overset{df}{=}(\psi_i^{(1)}(k_i),\psi_i^{(2)}(k_i))$, $i=1,...,m,$ – пары произвольных систем чисел $\psi_i^{(j)}(k_i)$, j=1,2; k_j =0,1,…, $\psi_i^{(1)}(0)=1, \psi_i^{(2)}(0)=0$, $i=1,...,m$. Предположим, что для данной функции $f\in L(T^m)$ и набора μ ряд

$$\sum_{k^\mu=1}^{\infty}\pi^{-|\mu|}\int_{T^{|\mu|}}f(t^\mu+x^{c\mu})\prod_{i\in\mu}\frac{\psi_i^{(1)}(k_i)\cos k_i(t_i-x_i)+\psi_i^{(2)}(k_i)\sin k_i(t_i-x_i)}{\psi_i^{(2)}(k_i)}dt^\mu, \quad (3.16)$$

$$\overline{\psi}_i^{\,2}(k_i)\overset{df}{=}(\psi_i^{(1)}(k_i))^2+(\psi_i^{(2)}(k_i))^2\neq 0,\ k_i\in\mathbf{N},\ i=1,...,m,$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi\in L(T^m)$ по переменным x_i, $i\in\mu$. Эту функцию обозначим через $f^{\overline{\psi}_\mu}(x)=D^{\overline{\psi}_\mu}(f;x)$ и назовем $\overline{\psi}_\mu$ – производной функции $f(x)$. Множество функций $f\in L(T^m)$ таких, что для любого $\mu\subseteq\overline{m}$ существуют производные $f^{\overline{\psi}_\mu}$ обозначим $L^{\overline{\psi}_{\overline{m}}}=L^{\overline{\psi}}$. Если $f\in L^{\overline{\psi}}$ и для любого $\mu\subseteq\overline{m}$ $f^{\overline{\psi}_\mu}\in\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из $L(T^m)$, то множество таких функций обозначим через $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Подмножество непрерывных функций из $L^{\overline{\psi}}$ и $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ обозначаются соответственно $C^{\overline{\psi}}$ и $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. При m>1 определение $\overline{\psi}_\mu$ – производной совпадает с определением $(\psi,\beta)_\mu$ - производной ([119]) в том смысле, что любая $\overline{\psi}_\mu$ производная совпадает с $(\psi,\beta)_\mu$ – производной, если определяющие их параметры связаны соотношениями

$$\psi_i^{(1)}(k_i)=\psi_i(k_i)\cos\beta_i\frac{\pi}{2},\ \psi_i^{(2)}(k_i)=\psi_i(k_i)\sin\beta_i\frac{\pi}{2}, \quad (3.17)$$

а также любая $(\psi,\beta)_\mu$ – производная является и $\overline{\psi}_\mu$ – производной, если имеют место равенства (3.17).

Пусть, далее,

$$S_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n-1}2^{-q(k)}A_k(f;x)=\sum_{k=0}^{n-1}2^{-q(k)}\pi^{-m}\int_{T^m}f(t)\prod_{i=1}^{m}\cos k_i(t_i-x_i)dt,$$

$n-1=(n_1-1,...,n_m-1)$ – кратная прямоугольная частная сумма ряда (3.13) и $\rho_n(f;x)=f(x)-S_n(f;x)$. Пусть $\mathfrak{I}_{\mu,n}$ - множество функций $t_{\mu,n}\in L(T^m)$, которые являются тригонометрическими полиномами порядка n_i-1, $i\in\mu$, т.е. $t_{\mu,n}$ имеют вид

$$t_{\mu,n}(x)=\sum_{k^\mu=0}^{(n-1)^\mu}\sum_{\gamma^\mu\in R^{|\mu|}}a_{k^\mu}(x^{c\mu},\gamma^\mu)\prod_{i\in\mu}\cos(k_ix_i-\gamma_i\frac{\pi}{2}),$$

где $\gamma^\mu=(\gamma_{j_1},...,\gamma_{j_{|\mu|}})$, причем γ_{j_k} принимают значения, равные только нулю либо единице, $a_{k^\mu}(x^{c\mu},\gamma^\mu)$– функция переменных x_i, $i\in c\mu=\overline{m}\setminus\mu$, суммируемая на кубе периодов $T^{|c\mu|}$,

$$E_{\mu,n}(\varphi)_S=\inf_{t_{\mu,n}\in\mathfrak{I}_{\mu,n}}\left\|\varphi-t_{\mu,n}\right\|_C$$

– наилучшее приближение функции $\varphi\in C$ посредством функций $t_{\mu,n}\in\mathfrak{I}_{\mu,n}$,

$$\mathfrak{x}^0=\mathfrak{x}^0(T^m)=\left\{\ f\in\mathfrak{x}(T^m):\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx_i=0,i=1,....,m\right\}.$$

Многомерный аналог теоремы Д$_1$ содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.1. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)}\in\mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)}\in\mathfrak{M}_0''$ $\quad i=1,...,m$. *Тогда для любой функции* $f\in C^{\overline{\psi}}C^0$ *при любом* $n\in\mathbf{N}^m$

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_C \le \sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})\prod_{i\in\mu}\ \varepsilon_{n_i}(C_\infty^{\overline{\psi}_i}) + b_n^{\overline{\psi}}(f)\,, \qquad (3.18)$$

где

$$\varepsilon_{n_i}(C_\infty^{\overline{\psi}_i}) \overset{df}{=} \frac{2}{\pi}\int_{n_i}^{\infty}\frac{\left|\overline{\psi}_i^{(2)}(t_i)\right|}{t_i}dt_i + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}_i(n_i)\ln n_i\,,$$

$$b_n^{\overline{\psi}}(f) \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})\sum_{\substack{\widetilde{\mu}\subset\mu\\ \widetilde{\mu}\ne\mu}}\prod_{i\in\widetilde{\mu}}\ \varepsilon_{n_i}(C_\infty^{\overline{\psi}_i})\prod_{i\in\mu\setminus\widetilde{\mu}}K_i\overline{\psi}_i(n_i) +$$

$$+\sum_{k=2}^{m}\sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})\prod_{i\in\mu^{n}}\overline{\psi}_i(n_i)\sum_{\widetilde{\mu}\subset\mu'}\prod_{i\in\widetilde{\mu}}\ \varepsilon_{n_i}(C_\infty^{\overline{\psi}_i})\prod_{i\in\mu'\setminus\widetilde{\mu}}K_i\overline{\psi}_i(n_i) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})\prod_{i\in\mu}K_i\overline{\psi}_i(n_i)\,, \qquad (3.19)$$

где μ', μ'' *– непустые непересекающиеся подмножества из* μ*, причем* $\mu = \mu' \cup \mu''$, K_i *– постоянные, не зависящие от* $n \in \mathrm{N}^m$ *и* $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$.

Утверждение теоремы 3.1 при m=1 переходит в утверждение теоремы Д$_1$, в котором соответствующее неравенство является асимптотически точным на всем пространстве $C^{\overline{\psi}}C^0$.

Отметим некоторые из наиболее важных случаев неравенства (3.18). Ясно, что $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$. Если $\psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, то, как известно ([112, с. 214])

$$\int_{n}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt \le K_2|\psi_2(n)|\,,$$

следовательно, из неравенства (3.18) вытекает утверждение.

Теорема 3. 2. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_C$ *i=1,...,m. Тогда* $\forall f \in C^{\overline{\psi}} C^0$ *имеет место неравенство*

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_C \le \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu}) \prod_{i\in\mu} \overline{\psi}_i(n_i)\ln n_i + b_n^{\overline{\psi}}(f), \quad (3.20)$$

где

$$b_n^{\overline{\psi}}(f) \le K \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu}) \prod_{i\in\mu} \overline{\psi}_i(n_i) \sum_{\substack{\widetilde{\mu}\subset\mu \\ \widetilde{\mu}\ne\mu}} \prod_{i\in\widetilde{\mu}} \ln n_i\,. \quad (3.21)$$

Пусть теперь функции $\pm\psi_i^{(1)}$, $\pm\psi_i^{(2)}$, выбраны согласно равенствам (3.17) при условии, что $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_c$, *i=1,...,m*. Тогда $C^{\overline{\psi}} C^0 = C^{\psi}_{\beta} C^0$ и вследствие (3.20) и (3.21) получаем

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_C \le \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\psi}_{\beta,\mu}) \prod_{i\in\mu} \left|\psi_i(n_i)\right| \ln n_i +$$

$$+ K \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\psi}_{\beta,\mu}) \prod_{i\in\mu} \left|\psi_i(n_i)\right| \sum_{\substack{\widetilde{\mu}\subset\mu \\ \widetilde{\mu}\ne\mu}} \prod_{i\in\widetilde{\mu}} \ln n_i \,\cdot \quad (3.22)$$

Неравенство (3.22) ранее было установлено в [119]. Из неравенства (3.18), где $\psi_i^{(2)}(\cdot) = 0$, $i = 1,.....,m$, для любого $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$ вытекает соотношение, также установленное в [119].

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

В одномерном случае справедливо такое утверждение (см., например, [112, с. 196]).

Лемма 3.1. *Если* $f \in C^{\overline{\psi}} M$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}$ *и* $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'$, *то в каждой точке* $x \in R$ *выполняется равенство*

$$\rho_n(f;x)=\int_R f^{\overline{\psi}}(x-t)\left[I_2(\psi^{(1)};n,t)_0+I_2(\psi^{(2)};n;t)_1\right]dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)(\psi^{(1)}(n)\cos nt+\psi^{(2)}(n)\sin t)dt, \tag{3.23}$$

где

$$I_2(\psi^{(1)};n;t)_0=\frac{1}{\pi}\int_n^{\infty}\psi^{(1)}(v)\cos vt dv,$$

$$I_2(\psi^{(2)};n;t)_1=\frac{1}{\pi}\int_n^{\infty}\psi^{(2)}(v)\cos vt dv,$$

если $f\in L^{\overline{\psi}}$, *то (3.23) выполняется почти всюду.*

Лемма 3.2. *Если* $f\in C^{\overline{\psi}}$, $\pm\psi_i^{(1)}\in\mathfrak{M}$ *и* $\pm\psi_i^{(2)}\in\mathfrak{M}'$ *i=1,...,m, то для любых* $n=(n_1,...,n_m)\in\mathrm{N}^m$ *и* $x=(x_1,...,x_m)\in R^m$

$$S_n(f;x)=f(x)+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{|\mu|=k}F_\mu(x)+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{|\mu|=k}P_\mu(x)+\sum_{k=2}^{m}(-1)^k\sum_{|\mu|=k}Q_\mu(x), \tag{3.24}$$

где

$$F_\mu(x)=F_\mu(f^{\overline{\psi}};x)=\int_{R^{|\mu|}} f^{\overline{\psi}_\mu}(x-t^\mu)\prod_{i\in\mu}\left[I_2\left(\psi_i^{(1)};n;t_i\right)_0+I_2(\psi_i^{(2)};n_i;t_i)_1\right]dt^\mu, \tag{3.25}$$

$$P_\mu(x)=P_\mu(f^{\overline{\psi}_\mu};x)=(2\pi)^{-|\mu|}\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\int_{T^{|\mu|}} f^{\overline{\psi}_\mu}(x-t^\mu)\prod_{i\in\mu}\sin(n_it_i+\gamma_{n_i})dt^\mu, \tag{3.26}$$

$$Q_\mu(x)=Q_\mu(f^{\overline{\psi}_\mu};x)=(2\pi)^{-|\mu''|}\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)\int_{R^{|\mu'|}}\int_{T^{|\mu''|}} f^{\overline{\psi}_\mu}(x-t^\mu)\prod_{i\in\mu''}\sin(n_it_i+\gamma_{n_i})\times$$

$$\times\prod_{i\in\mu'}\left[I_2(\psi_i^{(1)};n_i;t_i)_0+I_2(\psi_i^{(2)};n_i;t_i)_1\right]dt^\mu,$$

$$\gamma_{n_i} = \operatorname{arctg}\frac{\psi_{\mathrm{i}}^{(2)}(n_i)}{\psi_i^{(1)}(n_i)}, \;\; i=1,...,m. \tag{3.27}$$

Если $f \in L^{\overline{\psi}}$, то (3.24) выполняется почти всюду.

Доказательство. Пусть при любом $\nu \in \overline{m}$

$$S_{n_\nu}(f;x) = \sum_{k_\nu=0}^{n_\nu-1} 2^{-q^{(k\nu)}} \pi^{-1} \int_T f(x+t^{\{\nu\}}) \cos k_\nu t_\nu dt_\nu ,$$

$$T = \left[-\pi, \pi\right] \tag{3.28}$$

– сумма Фурье функции $f \in L(T^m)$ порядка $n_\nu - 1$ по переменной x_ν. Очевидно, что для любой функции $f \in L(T^m)$ и для каждого $n \in N^m$ и каждого $x \in R^m$

$$S_n(f;x) = S_{n_m}(...(S_{n_2}(S_{n_1}(f;x);x).....;x).$$

В силу равенства (3.23)

$$S_{n_\nu}(f;x) = f(x) - \int_R f^{\overline{\psi}_{\{\nu\}}}(x - t^{\{\nu\}})\left[I_2(\psi_\nu^{(1)};n_\nu;t_\nu)_0 + I_2(\psi_\nu^{(2)};n_\nu;t_\nu)_1\right]dt_\nu -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}_{\{\nu\}}}\left(x - t^{\{\nu\}}\right)\left(\psi_\nu^{(1)}(n_\nu)\cos n_\nu t_\nu + \psi_\nu^{(2)}(n_\nu)\sin n_\nu t_\nu\right)dt_\nu . \tag{3.29}$$

В частности, при $\nu = 1$

$$S_{n_1}(f;x) = f(x) - \int_R f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}(x - t^{\{1\}})\left[I_2(\psi_1^{(1)};n_1;t_1)_0 + I_2(\psi_1^{(2)};n_1;t_1)_1\right]dt_1 -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}\left(x - t^{\{1\}}\right)\left(\psi_1^{(1)}(n_1)\cos n_1 t_1 + \psi_1^{(2)}(n_1)\sin n_1 t_1\right)dt_1 . \tag{3.30}$$

Далее, если m=2, то

$$S_{n_2}\left(S_{n_1}(f;x)\right)=S_{n_1}(f;x)-\int_R\left[S_{n_1}(f;x)\right]^{\overline{\psi}_{\{2\}}}(x-t^{\{2\}})\left[I_2(\psi_2{}^{(1)};n_2;t_2)_0+I_2(\psi_2{}^{(2)};n_2;t_2)_2\right]dt_2-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_T\left[S_{n_1}(f;x)\right]^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right)\left(\psi_2{}^{(1)}(n_2)\cos n_2t_2+\psi_2{}^{(2)}(n_2)\sin n_2t_2\right)dt_2\,. \tag{3.31}$$

Согласно (3.30)

$$\left[S_{n_1}(f;x)\right]^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right)=f^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right)-$$

$$-\left(\int_R f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}(x-t^{\{1\}})\left[I_2(\psi_1{}^{(1)};n_1;t_1)_0+I_2(\psi_1{}^{(2)};n_1;t_1)_1\right]dt_1\right)^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}\left(x-t^{\{1\}}\right)\left(\psi_1{}^{(1)}(n_1)\cos n_1t_1+\psi_1{}^{(2)}(n_1)\sin n_1t_1\right)dt_1\right)^{\overline{\psi}_{\{2\}}}(x-t^{\{2\}})\,. \tag{3.32}$$

Второе слагаемое в (3.32) в силу определения производной $f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}(\cdot)$ равно

$$\int_R f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}(x-t^{\{1,2\}})\left[I_2(\psi_1{}^{(1)};n_1;t_1)_0+I_2(\psi_1{}^{(2)};n_1;t_1)_1\right]dt_1\,. \tag{3.33}$$

Последнее же слагаемое в (3.32) равно

$$\frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}\left(x-t^{\{1,2\}}\right)\left(\psi_1{}^{(1)}(n_1)\cos n_1t_1+\psi_1{}^{(2)}(n_1)\sin n_1t_1\right)dt_1\,. \tag{3.34}$$

На основании (3.33), (3.34) из (3.32) получаем

$$\left[S_{n_1}(f;x)\right]^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right)=f^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right)-$$

$$-\int_R f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}(x-t^{\{1,2\}})\left[I_2(\psi_1{}^{(1)};n_1;t_1)_0+I_2(\psi_1{}^{(2)};n_1;t_1)_1\right]dt_1-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}\{1,2\}}\left(x-t^{\{1,2\}}\right)\left(\psi_1{}^{(1)}(n_1)\cos n_1t_1+\psi_1{}^{(2)}(n_1)\sin n_1t_1\right)dt_1. \qquad (3.35)$$

Объединяя (3.31) и (3.35), находим

$$S_{n_2}\left(S_{n_1}(f;x)\right)=f(x)-\int_R f^{\overline{\psi}\{1\}}(x-t^{\{1\}})\left[I_2(\psi_1{}^{(1)};n_1;t_1)_0+I_2(\psi_1{}^{(2)};n_1;t_1)_1\right]dt_1-$$

$$-\int_R f^{\overline{\psi}\{2\}}(x-t^{\{2\}})\left[I_2(\psi_2{}^{(1)};n_2;t_2)_0+I_2(\psi_2{}^{(2)};n_2;t_2)_2\right]dt_2+$$

$$+\int_{R^2} f^{\overline{\psi}\{1,2\}}(x-t^{\{1,2\}})\prod_{j\in\{1,2\}}\left[I_2(\psi_j{}^{(1)};n_j;t_j)_0+\right.$$

$$\left.+I_2(\psi_j{}^{(2)};n_j;t_j)_1\right]dt^{\{1,2\}}-\frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}\{1\}}\left(x-t^{\{1\}}\right)\left(\psi_1{}^{(1)}(n_1)\cos n_1t_1+\right.$$

$$\left.+\psi_1{}^{(2)}(n_1)\sin n_1t_1\right)\ dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_T f(x)^{\overline{\psi}\{2\}}\left(x-t^{\{2\}}\right)\left(\psi_2{}^{(1)}(n_2)\cos n_2t_2+\psi_2{}^{(2)}(n_2)\sin n_2t_2\right)dt_2+$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{T^2} f^{\overline{\psi}\{1,2\}}\left(x-t^{\{1,2\}}\right)\prod_{j\in\{1,2\}}\left(\psi_j{}^{(1)}(n_j)\cos n_jt_j+\psi_j{}^{(2)}(n_j)\sin n_jt_j\right)dt^{\{1,2\}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_R\int_T f^{\overline{\psi}\{1,2\}}\left(x-t^{\{1,2\}}\right)\left(\psi_1{}^{(1)}(n_1)\cos n_1t_1+\right.$$

$$\left.+\psi_1{}^{(2)}(n_1)\sin n_1t_1\right)\left[I_2(\psi_2{}^{(1)};n_2;t_2)_0+I_2(\psi_2{}^{(2)};n_2;t_2)_1\right]dt^{\{1,2\}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_R\int_T f^{\overline{\psi}\{1,2\}}\left(x-t^{\{1,2\}}\right)\left(\psi_2{}^{(1)}(n_2)\cos n_2t_2+\right.$$

$$\left.+\psi_2{}^{(2)}(n_2)\sin n_2t_2\right)\left[I_2(\psi_1{}^{(1)};n_1;t_1)_0+I_2(\psi_1{}^{(2)};n_1;t_1)_1\right]dt^{\{1,2\}}.$$

Если m = 3, то рассуждая аналогичным образом и учитывая обозначения (3.25) – (3.27), получаем

$$S_n(f;x) = S_{n_3}(S_{n_2}(S_{n_1}(f;x);x);x) =$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^{3}(-1)^k \sum_{|\mu|=k} F_\mu(x) + \sum_{k=1}^{3}(-1)^k \sum_{|\mu|=k} P_\mu(x) + \sum_{k=2}^{3}(-1)^k \sum_{|\mu|=k} Q_\mu(x)$$

Продолжая этот процесс при m > 3 и учитывая, что

$$\psi_j^{(1)}(n_j)\cos n_j t_j + \psi_j^{(2)}(n_j)\sin n_j t_j = \overline{\psi}_j(n_j)\sin(n_j t_j + \gamma_{n_j}),$$

приходим к утверждению леммы 3.2.

Поскольку любой тригонометрический полином $t_{n-1}(\cdot)$ является $\overline{\psi}$ – производной некоторого полинома $T_{n-1}(\cdot)$, то в силу равенства (3.23)

$$\int_R t_{n-1}(x-t)\left[I_2(\psi^{(1)};n;t)_0 + I_2(\psi^{(2)};n;t)_1\right]dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_T t_{n-1}(x-t)\overline{\psi}(n)\sin(nt+\gamma_n)dt \equiv 0\,.$$

Следовательно, если $t_{\{\nu\},n} \in \mathfrak{I}_{\{\nu\},n}$, то согласно равенству (3.29) при условии, что $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}$ и $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'$, для любого $\nu \in \overline{m}$

$$\int_R t_{\{\nu\},n}(x-t^{\{\nu\}})\left[I_2(\psi_{\{\nu\}}^{(1)};n_\nu;t_\nu)_0 + I_2(\psi_\nu^{(2)};n_\nu;t_\nu)_1\right]dt_\nu \equiv 0 \qquad (3.36)$$

и

$$\frac{\overline{\psi}_\nu(n_\nu)}{2\pi}\int_T t_{\{\nu\},n}(x-t^{\{\nu\}})(\sin(n_\nu t_\nu + \gamma_{n\nu}))dt_\nu \equiv 0\,. \qquad (3.37)$$

Вследствие (3.36) и (3.37) с учетом определений величин (3.15) – (3.27) для любого $t_{\{\nu\},n} \in \Im_{\{\nu\},2n-1}$, $\mu \subset \overline{m}$, и для любых $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}$ и $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'$ имеем

$$F_\mu(t_{\mu,n}; x) \equiv P_\mu(t_{\mu,n}; x) \equiv Q_\mu(t_{\mu,n}; x) \equiv 0 .$$

В результате этого из леммы 3.2 вытекает такое утверждение

Лемма 3.3. *Пусть* $f \in C^{\overline{\psi}} M$, $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'$

и

$$\Delta_\mu(x) \overset{df}{=} f^{\overline{\psi}_\mu}(x) - t_{\mu,n}(x),\ t_{\mu,n}(x) \in \Im_{\mu,n} .$$

Тогда $\forall n \in N^m$ *и* $\forall x \in R^m$

$$\rho_n(f; x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{|\mu|=k} F_\mu(\Delta_\mu; x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{|\mu|=k} P_\mu(\Delta_\mu; x) + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{|\mu|=k} Q_\mu(\Delta_\mu; x). \qquad (3.38)$$

Если $f \in L^{\overline{\psi}}$, *то (3.38) выполняется почти всюду.*

Из доказательств теорем D_1 ([112, с. 216]) и теоремы D_2 ([112, с. 251]) можно заключить, что справедливо следующее утверждение. Пусть X – одно из пространств – C или L, $X^{\overline{\psi}}$ – один из классов - $C^{\overline{\psi}} C^0$ или $L^{\overline{\psi}}$.

Лемма 3.4. *Если* $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'_0$, *то* $\forall f \in X^{\overline{\psi}}$ *и* $\forall n \in N$

$$\left\| \int_R t_{n-1}(x-t)\left[I_2(\psi^{(1)};n;t)_0 + I_2(\psi^{(2)};n;t)_1\right]dt \right\|_X \le \left\|\Delta_\mu\right\|_X \delta(n,\overline{\psi}), \quad (3.39)$$

$$\delta(n,\overline{\psi}) \overset{df}{=} \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{\left|\psi^{(2)}(t)\right|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + K\overline{\psi}(n) \overset{df}{=} \mathcal{E}_n\left(X_\infty^\psi\right) + K\overline{\psi}(n), \quad (3.40)$$

$K-$ постоянная, не зависящая от $n \in N$ и $f \in X^{\overline{\psi}}$.

Доказательство теоремы 3.1. Будем считать, что μ = {1, 2,...,S}. Рассмотрим выражение

$$I_S(x) = \int_{R^S} \Delta_\mu(x-t)\prod_{i=1}^{S}\left[I_2(\psi_i^{(1)};n_i;t_i)_0 + I_2(\psi_i^{(2)};n_i;t_i)_1\right]dt =$$

$$= \int_R \int_{R^{S-1}} \Delta_\mu(x-t)\prod_{i=1}^{s}\left[I_2(\psi_i^{(1)};n_i;t_i)_0 + I_2(\psi_i^{(2)};n_i;t_i)_1\right]dt^{\mu\setminus\{1\}} \times$$

$$\times [I_2(\psi_1^{(1)};n_1;t_1)_0 + I_2(\psi_1^{(2)};n_1;t_1)_1]dt_1 .$$

Применяя к последнему интегралу неравенство (3.39) (случай $X = C$), получаем

$$\left\|I_S(x)\right\|_C \le \left\|I_{S-1}(x)\right\|_C \delta(n_1,\overline{\psi}_1).$$

Продолжая применять лемму 3.4, находим

$$\left\|I_S(x)\right\|_C \le \left\|\Delta_\mu\right\|_C \prod_{i=1}^{s}\delta(n_i,\overline{\psi}_i). \quad (3.41)$$

В силу (3.41) из леммы 3.3 для величины $F_\mu(\Delta_\mu;x)$ и $Q_\mu(\Delta_\mu;x)$ будем иметь

$$\left\|F_\mu(\Delta_\mu;x)\right\|_C \le \left\|\Delta_\mu\right\|_C \prod_{i=1}^{s}\delta(n_i,\overline{\psi}_i). \quad (3.42)$$

Аналогично

$$\left\|Q_\mu(\Delta_\mu x)\right\|_C \le (2\pi)^{-|\mu''|}\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)\left\|\int_{T^{|\mu''|}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\prod_{i\in\mu''}\sin(n_i t_i+\gamma_{n_i})dt^{\mu''}\right\|_C\prod_{i\in\mu'}\delta(n_i,\overline{\psi}_i).$$

Отсюда

$$\left\|Q_\mu(\Delta_\mu x)\right\|_C \le \left\|\Delta_\mu\right\|_C\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)\prod_{i\in\mu'}\delta(n_i,\overline{\psi}_i). \qquad (3.43)$$

Далее

$$\left\|P_\mu(\Delta_\mu;x)\right\|_C \le \left\|\Delta_\mu\right\|_C\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i). \qquad (3.44)$$

Сопоставляя оценки (3.42) – (3.44), с учетом леммы 3.3 имеем

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_C \le \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{|\mu|=k}\left\|\Delta_\mu\right\|_C\prod_{i\in\mu}\delta(n_i,\overline{\psi}_i)+\sum_{|\mu|=k}\left\|\Delta_\mu\right\|_C\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\right)+$$

$$+\sum_{k=2}^{m}\sum_{|\mu|=k}\left\|\Delta_\mu\right\|_C\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)\prod_{i\in\mu'}\delta(n_i,\overline{\psi}_i). \qquad (3.45)$$

Если теперь

$$\inf_{t_{\mu,n}\in\Im_{\mu,n}}\left\|f^{\overline{\psi}_\mu}-t_{\mu,n}\right\|_C=\left\|f^{\overline{\psi}_\mu}-t^*_{\mu,n}\right\|_C=E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu}),$$

то вследствие (3.45) и (3. 40) приходим к утверждению теоремы 3.1.

3.1.3. Пусть теперь

$$E_{\mu,n}(\varphi)_S=\inf_{t_{\mu,n}\in\Im_{\mu,n}\bigcap L_S}\left\|\varphi-t_{\mu,n}\right\|_S,\ 1\le s\le\infty,$$

– наилучшее приближение функции φ посредством функций $t_{\mu,n}\in\Im_{\mu,n}\bigcap L_S$

$$L_S = L_S(T^m) = \left\{ f : \|f\|_S = \left(\int\limits_{T^m} |f(x)|^s\, dx \right)^{1/s} < \infty \right\},\ L = L_1 .$$

Доказательства теорем D_3 и D_4 (см., например, [112, с. 266, 286]) содержат в себе следующие факты.

Лемма 3.5. *Пусть* $\Delta \in X$, *где* X *обозначает одно из пространств- L или C,* $\pm\psi_i^{(1)}, \pm\psi_i^{(2)} \in F$ *и, кроме того,*

$$O < K_1 \le \frac{\eta(\psi^{(1)};t)-t}{\eta(\psi^{(2)};t)-t} \le K_2 < \infty \quad \forall t \ge 1. \tag{3.46}$$

Тогда $\forall n \in N$

$$\left\| \int\limits_R t_{n-1}(x-t)\left[I_2(\psi^{(1)};n;t)_0 + I_2(\psi^{(2)};n;t)_1\right]dt \right\|_X \le \|\Delta_\mu\|_X\, \delta(n,\overline{\psi}), \tag{3.47}$$

где

$$\delta(n,\overline{\psi}) \overset{df}{=} \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+(\eta(n)-n)+K \right)\overline{\psi}(n),$$

$\overline{\psi}(n) = \sqrt{(\psi^{(1)}(n))^2 + (\psi^{(2)}(n))^2}$, $\eta(n)$ *есть либо* $\eta(\psi^{(1)},n)$ *либо* $\eta(\psi^{(2)},n)$, *К – величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$ *и* $\Delta \in X$.

Второе условие в определении (3.10) множества $\mathfrak{M}''_\infty$ обеспечивает включение $\mathfrak{M}''_\infty \subset \mathfrak{M}'$. Из доказательства теоремы 8. 3. (см. [113, с,. 51]), с учетом последнего включения следует представление

$$\int\limits_R \Delta(x-t)\left[I_2(\psi^{(1)};n;t)_0 + I_2(\psi^{(2)};n;t)_1\right]dt_1 = \sum_{i=0}^{2} R_i + \sum_{i=0}^{2} R_i' ,\ \Delta \in L , \tag{3.48}$$

где величины R_i, R_i' удовлетворяют условиям

$$\left\|R_i\right\|_S \le C_{P,S}^{(i)} \left|\psi^{(1)}(n)\right| \left(\eta(\psi^{(1)};n)-n\right)^{\alpha} \left\|\Delta\right\|_P,\ i=0,1,2; \qquad (3.49)$$

$$\left\|R_i'\right\|_S \le \widetilde{C}_{P,S}^{(i)} \left|\psi^{(1)}(n)\right| \left(\eta(\psi^{(1)};n)-n\right)^{\alpha} \left\|\Delta\right\|_P,\ i=0,1,2; \quad (3.50)$$

$$\Delta \in L_p,\ \alpha = 1/p - 1/s,\ 1 < p < s < \infty.$$

Если выполнены условия (3.46), то в силу (3.48) – (3.50) имеет место соотношение

$$\left\| \int_R \Delta(x-t)\left[I_2(\psi^{(1)};n;t)_0 + I_2(\psi^{(2)};n;t)_1\right]dt \right\|_S \le$$

$$\le C_{P,S} \left|\psi^{(1)}(n)\right| \left(\eta(\psi^{(1)};n)-n\right)^{\alpha} \left\|\Delta\right\|_P,\ \Delta \in L_P \qquad (3.51)$$

где $\eta(n)=\eta(\psi^{(1)};n)$ либо $\eta(n)=\eta(\psi^{(2)};n)$.

Поскольку величина $\eta(\psi;n)$, $n \in N$, находится между величинами $\eta(\psi^{(1)};n), \eta(\psi^{(2)};n)$, то (3.51) будет справедливым и при $\eta(n)=\eta(\psi;n)$.

Резюмируя приведенные выше рассуждения приходим к такому утверждению.

Лемма 3.6. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)}$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_\infty''$, $1 < p < s < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/s$. *Тогда, если выполняется условия (3.46), то* $\forall \Delta \in L_P$, $\forall n \in N$ *имеет место соотношение (3.51).*

В принятых выше обозначениях справедливо такое утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)}$, $\pm\psi_i^{(2)} \in F$, $i = 1,\ldots,m$, *и выполнены условия*

$$O < K_1^{(i)} \le \frac{\eta_i(\psi_i^{(1)};t_i)-t_i}{\eta_i(\psi_i^{(2)};t_i)-t_i} \le K_2^{(i)}. \tag{3.52}$$

Тогда $\forall f \in L^{\overline{\psi}}$ *и* $\forall n \in N^m$

$$\|\rho_n(f;x)\|_1 \le \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_1 \prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\ln^+(\eta_i(n_i)-n_i)+b_n^{\overline{\psi}}(f)_1, \tag{3.53}$$

где

$$b_n^{\overline{\psi}}(f)_1 \le K\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_1 \prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\sum_{\substack{\widetilde{\mu}\subset\mu\\ \widetilde{\mu}\neq\mu}}\prod_{i\in\widetilde{\mu}}\ln^+(\eta_i(n_i)-n_i), \tag{3.54}$$

$\ln^+ x = \max\{0,\ln x\}$, $\eta_i(n_i)$ *есть либо* $\eta_i(\psi_i^{(1)};n_i)$ *либо* $\eta_i(\psi_i^{(2)};n_i)$, *i = 1,...,m, K – величина, равномерно ограниченная по* $n \in N^m$ *и* $f \in L^{\overline{\psi}}$, $E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})$– *наилучшее приближение в* $L(T^m)$ *функциями* $t_{\mu,n} \in \mathfrak{I}_{\mu,n}$.

При m = 1 утверждение теоремы 3.3 переходит в утверждение теоремы D_4.

Доказательство. Пусть $\pm\psi_i^{(1)}, \pm\psi_i^{(2)} \in F,\ i=1,...,l,\ \mu=\{1,2,...,l\}$ и выполнены условия (3.52). Рассмотрим выражение

$$I_l(x) = \int_{R^l}\Delta_\mu(x-t^\mu)\prod_{i=1}^{l}\left(I_2(\psi_i^{(1)};n_i;t_i)_0 + I_2(\psi_i^{(2)};n_i;t_i)_1\right)dt^\mu =$$

$$= \int_R\left(\int_{R^{l-1}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\prod_{i=2}^{l}(I_2(\psi_i^{(1)};n_i;t_i)_0 + I_2(\psi_i^{(2)};n_i;t_i)_1)dt^{\mu\setminus\{1\}}\right)\times$$

$$\times\left(I_2(\psi_1^{(1)};n_1;t_1)_0 + I_2(\psi_1^{(2)};n_1;t_1)_1\right)dt_1.$$

Применяя лемму 3.5 (случай $X = L$), находим $\|I_l(x)\|_1 \le \left\| \int\limits_{R^{l-1}} \Delta_\mu(x-t^\mu) \prod_{i=2}^{l} (I_2(\psi_i^{(1)}; n_i; t_i)_0 + (I_2(\psi_i^{(2)}; n_i; t_i)_1 dt^{\mu\{1\}} \right\|_1 \delta(n_{1;} \overline{\psi}_1) =$

$$= \|I_{l-1}(x)\|_1 \delta(n_1; \psi_1) \le \|\Delta_\mu\|_1 \prod_{i=1}^{l} \delta(n_i; \overline{\psi}_i). \tag{3.55}$$

На основании (3.55) для $F_\mu(\Delta_\mu; x)$ и $Q_\mu(\Delta_\mu; x)$ имеем

$$\|F_\mu(\Delta_\mu; x)\|_1 = \left\| \int\limits_{R^{|\mu|}} \Delta_\mu(x-t^\mu) \prod_{i\in\mu} (I_2(\psi_i^{(1)}; n_i; t_i)_0 + (I_2(\psi_i^{(2)}; n_i; t_i)_1 dt^\mu \right\|_1 \le$$

$$\le \|\Delta_\mu\|_1 \prod_{i\in\mu} \delta(n_1; \overline{\psi}_1). \tag{3.56}$$

Аналогично

$$\|Q_\mu(\Delta_\mu; x)\|_1 = (2\pi)^{-|\mu''|} \prod_{i\in\mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \times$$

$$\times \left\| \int\limits_{R^{|\mu'|}} \left(\int\limits_{T^{|\mu''|}} \Delta_\mu(x-t^\mu) \prod_{i\in\mu''} \sin(n_i t_i + \gamma_{n_i}) dt^{\mu''} \right) \prod_{i\in\mu'} (I_2(\psi_i^{(1)}; n_i; t_i)_0 + \right.$$

$$\left. + (I_2(\psi_i^{(2)}; n_i; t_i)_1 dt^{\mu'} \right\|_1 \le (2\pi)^{-|\mu''|} \prod_{i\in\mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \left\| \int\limits_{T^{|\mu''|}} \Delta_\mu(x-t^\mu) \prod_{i\in\mu''} \sin(n_i t_i + \gamma_{n_i}) dt^{\mu''} \right\|_1 \times$$

$$\times \prod_{i\in\mu'} \delta(n_i; \overline{\psi}_i) \le \|\Delta_\mu\|_1 \prod_{i\in\mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \prod_{i\in\mu'} \delta(n_i; \overline{\psi}_i). \tag{3.57}$$

Далее, меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\left\|P_\mu(\Delta_\mu;x)\right\|_1 \le (2\pi)^{-|\mu|}\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\left\|\int_{T^{|\mu|}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\prod_{i\in\mu}\sin(n_i t_i+\gamma_{n_i})dt^\mu\right\|_1 \le$$

$$\le\left\|\Delta_\mu\right\|_1\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\prod_{i\in\mu'}\delta(n_i;\overline{\psi}_i). \qquad (3.58)$$

Объедения соотношения (3.56) – (3.58), в силу леммы 2.3 получаем

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_1 \le \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{|\mu|=k}\left\|\Delta_\mu\right\|_1\prod_{i\in\mu}\delta(n_i,\overline{\psi}_i)+\sum_{|\mu|=k}\left\|\Delta_\mu\right\|_1\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\right)+$$

$$+\sum_{k=2}^{m}\sum_{|\mu|=k}\left\|\Delta_\mu\right\|_1\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)\prod_{i\in\mu'}\delta(n_i,\overline{\psi}_i). \qquad (3.59)$$

Выбирая функцию $t^*_{\mu,n}(x)$ в лемме 3.3 так, чтобы

$$\inf_{t_{\mu,n}\in\Im_{\mu,n}}\left\|f^{\psi_\mu}(x)-t_{\mu,n}(x)\right\|_1 = \left\|f^{\psi_\mu}(x)-t^*_{\mu,n}(x)\right\|_1 = E_{\mu,n}(f^{\psi_\mu})_1$$

и принимая во внимание определение $\delta(n_i;\overline{\psi}_i)$, из (3.59) получаем (3.53) и (3.54). Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.4. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)},\ \pm\psi_i^{(2)}\in\mathfrak{M}''_\infty$, $i=1,\dots,m$, $1<p,s<\infty$, $\alpha=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{s}\right)_+$. *Тогда, если выполнены условия (3.52), то* $\forall f\in L^{\overline{\psi}}L_P$, $\forall n\in N^m$ *имеет место неравенство*

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_S \le C_{p,s,m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=1}E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_p\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)(\eta_i(n_i)-n_i)^\alpha, \qquad (3.60)$$

где величины $\eta_i(n_i)$ *есть либо* $\eta_i(\psi_i^{(1)};n_i)$ *либо* $\eta_i(\psi_i^{(2)};n_i)$ *либо* $\eta_i(\psi_i;n_i)$, $C_{p,s,m}$ *– величина, которая может зависеть лишь от p,s и m.*

При m = 1 на классе $L_P^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} S_P = \left\{ f \in L^{\overline{\psi}} L_P : \left\| f^{\overline{\psi}} \right\|_P \le 1 \right\}$ неравенство (3.70) по порядку улучшено быть не может.

Теорема 3.4 остается в силе и доказательство её не меняется, если $1 < p < s < \infty$, а при m = 1 переходит в утверждение теоремы D_5.

В случае выполнения условий (3.17) из теоремы 3.4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть 1 < p, s < ∞,* $\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s} \right)_+$ *, и выполнены условия (2.62). Тогда, если* $\psi_i \in \mathfrak{M}''_\infty$ $\beta_i \in R$, $i = 1,...,m$, *то* $\forall f \in L^\psi_\beta L_P = L^{\overline{\psi}} L_P$ *и* $\forall n \in N_+^m$

$$\left\| \rho_n(f;x) \right\|_S \le C_{p,s,m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^\psi_{\beta,\mu}) \prod_{i \in \mu} \psi_i(n_i)(\eta_i(n_i) - n_i)^\alpha,$$

где $\eta_i(n_i) = \eta_i(\psi_i;n_i)$.

В частности, если $\psi_{r_i}(t_i) = \exp(-\gamma_i t_i^{r_i}),\ \gamma_i > 0,\ 0 < r_i \le 1,\ i = 1,...,m,$ то

$$\left\| \rho_n(f;x) \right\|_S \le C_{p,s,m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\psi_r}_{\beta,\mu}) \prod_{i \in \mu} \exp(-\gamma_i t_i^{r_i}) n_i^{(1-r_i)\alpha} \quad .$$

Доказательство теоремы 3.4. Положим

$$\delta_{p,s}(\psi;n) = C_{p,s} \overline{\psi}(n)(\eta(n) - n)^\alpha$$

и рассмотрим выражение

$$I_l(x)=\int\limits_R\left(\int\limits_{R^{l-1}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\prod_{i=2}^{l}(I_2(\psi_i^{(1)};n_i;t_i)_0+(I_2(\psi_i^{(2)};n_i;t_i)_1)dt^{\mu\setminus\{1\}}\right)\times$$

$$\times\left((I_2(\psi_i^{(1)};n_i;t_i)_0+(I_2(\psi_i^{(2)};n_i;t_i)_1\right)dt_1\,.$$

Если выполнены условия (3.52), то применяя лемму 3.6, находим

$$\left\|I_l(x)\right\|_S\le\left\|I_{l-1}(x)\right\|_P\delta_{P,S}(n_1;\overline{\psi}_1). \tag{3.61}$$

В силу неравенства Гельдера

$$\|f\|_P\le(2\pi)^{m(s-p)/ps}\|f\|_S,\ 1<p\le s<\infty,\ \ f\in L_S(T^m)\,,$$

из (3.61) вытекает

$$\left\|I_l(x)\right\|_S\le(2\pi)^{m(s-p)/ps}\le\left\|I_{l-1}(x)\right\|_P\delta_{p,s}(\overline{\psi}_1;n_1).$$

Продолжая эти рассуждения, будем иметь

$$\left\|I_l(x)\right\|_S\le(2\pi)^{lm(s-p)/ps}\left\|\Delta(x)\right\|_p\prod_{i=1}^{l}\delta_{p,s}(\overline{\psi}_1;n_1). \tag{3.62}$$

С учетом (3.62) для величин $F_\mu(\Delta_\mu;x)$ находим

$$\left\|F_\mu(\Delta_\mu;x)\right\|_S\le(2\pi)^{|\mu|m(s-p)/ps}\left\|\Delta_\mu\right\|_P\prod_{i\in\mu}\delta_{P,S}(\overline{\psi}_i;n_i). \tag{3.63}$$

Далее

$$\left\|Q_\mu(\Delta_\mu;x)\right\|_S\le(2\pi)^{-|\mu''|}\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)\left\|\int\limits_{R^{|\mu'|}}\left(\int\limits_{T^{|\mu''|}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\prod_{i\in\mu''}\sin(n_it_i+\gamma_{n_i})dt^{\mu''}\right)\times\right.$$

$$\times\prod_{i\in\mu'}\Big(I_2(\psi_i^{(1)};n_i;t_i)+(I_2(\psi_i^{(2)};n_i;t_i)_1\Big)dt^{\mu'}\Big\|_S\le$$

$$\le(2\pi)^{-|\mu''|}\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)(2\pi)^{|\mu'|m(S-P)/PS}\Bigg\|\int_{T^{|\mu''|}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\times$$

$$\times\prod_{i\in\mu''}\sin(n_it_i+\gamma_{n_i})dt^{\mu''}\Bigg\|_P\prod_{i\in\mu'}\delta_{p,s}(\overline{\psi}_i;n_i)\,. \qquad (3.64)$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского ([153, с.179])

$$\left[\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}^p dx\right]^{1/p}\le\int_c^d\left\{\int_a^b f^p(x,y)dx\right\}^{1/p}dy,\quad p\ge1,$$

из (3.64) получаем

$$\|Q_\mu(\Delta_\mu;x)\|_S\le(2\pi)^{m|\mu'|(s-p)/ps}\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)\|\Delta_\mu\|_P\prod_{i\in\mu'}\Delta_{p,s}(\overline{\psi}_i;n_i). \qquad (3.65)$$

Оценивая величину $P_\mu(\Delta_\mu;x)$, воспользуемся неравенством Юнга для сверток периодических функций: если $1\le p\le s\le\infty$, $q^{-1}=1-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{s}$, $y\in L_P$, $z\in L_q$, то

$$\|y*z\|_S=(2\pi)^{-1}\|y\|_P\|z\|_q\,.$$

Тогда

$$\|P_\mu(\Delta_\mu;x)\|_S\le(2\pi)^{-|\mu|}\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}(n_i)\|\Delta_\mu(x-t^\mu\|_P\left\|\prod_{i\in\mu}\sin(n_it_i+\gamma_{n_i})\right\|_q\le$$

$$\le\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\|\Delta_\mu\|_P\le\prod_{i\in\mu}K_i\delta_{P,S}(\overline{\psi}_i;n_i)\|\Delta_\mu\|_P. \qquad (3.66)$$

Выбирая $t^{*}_{\mu,n}(x)$ согласно условию

$$\inf_{t_{\mu,n}\in\Im_{\mu,n}\bigcap L_p}\left\|f^{\overline{\psi}_\mu}(x)-t_{\mu,n}(x)\right\|_p=\left\|f^{\overline{\psi}_\mu}(x)-t^{*}_{\mu,n}\right\|_p=E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_p,$$

и объединяя (3.63), (3.65) и (3.66), в силу леммы 3.3 получаем утверждение теоремы 3.4.

3.1.4. Многомерный аналог теоремы D_3 имеет следующий вид.

Теорема 3.5. *Пусть* $\pm\psi_l^{(j)}\in F,\ \ j=1{,}2;\ \ i=1,\dots,m,$ *и выполняются условия (3.52). Тогда* $\forall f\in C^{\overline{\psi}}C^0$ *и* $\forall n\in N^m$ *имеет место неравенство*

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_C\le\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k\sum_{|\mu|=k}E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\ln^+(\eta_i(n_i)-n_i)+b_n^{\overline{\psi}}(f),\qquad(3.67)$$

где

$$\left|b_n^{\overline{\psi}}(f)\right|\le K\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=k}E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\sum_{\substack{\widetilde{\mu}\subset\mu\\ \widetilde{\mu}\ne\mu}}\prod_{i\in\widetilde{\mu}}\ln^+(\eta_i(n_i)-n_i),$$

$\eta_i(n_i)$ *есть либо* $\eta_i(\psi_i^{(1)};n_i)$ *либо* $\eta_i(\psi_i^{(2)};n_i)$, *К – постоянная, не зависящая от* $n\in N^m$ *и* $f\in C^{\overline{\psi}}C^0$.

При m = 1 утверждение теоремы 3.5 совпадает с утверждением теоремы D_3 и в этом случае, как было отмечено ранее, неравенство (3.67) асимптотически точно как на всем классе $C^{\overline{\psi}}C^0$, так и на ряде важных подмножеств из $C^{\overline{\psi}}C^0$.

Доказательство теоремы 3.5 базируется на утверждениях леммы 3.3 и 3.5 и по существу повторяет доказательство теоремы 3.3.

Отправляясь от представления (3.38), в котором $f\in L^{\overline{\psi}}$, а также неравенства (3.39) леммы 3.4 и рассуждая по той же схеме, по которой доказывается теорема 3.1, используя при этом неравенство

$$\left\| \int_R g(x-t)K(t)dt \right\|_1 \le \|g\|_1 \|K\|_1,$$

получим многомерный аналог теоремы D_2, а именно.

Теорема 3.6. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_0'$, *i = 1,...,m. Тогда* $\forall f \in L^{\overline{\psi}}$ *и* $\forall n \in N^m$

$$\|\rho_n(f;x)\|_1 \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu}) \prod_{i\in\mu} \mathcal{E}_{n_i}(L^{\overline{\psi}_i}) + b_n^{\overline{\psi}}(f)_1, \tag{3.68}$$

где

$$\mathcal{E}_{n_i}(L^{\overline{\psi}_i}) \overset{df}{=} \frac{2}{\pi} \int_{n_i}^{\infty} \frac{\left|\psi_i^{(2)}(t_i)\right|}{t_i} dt_i + \frac{4}{\pi^2} \overline{\psi}_i(n_i) \ln n_i,$$

$$b_n^{\overline{\psi}}(f)_1 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_1 \sum_{\substack{\widetilde{\mu}\subset\mu \\ \widetilde{\mu}\ne\mu}} \prod_{i\in\widetilde{\mu}} \mathcal{E}_{n_i}(L^{\overline{\psi}_i}) \prod_{i\in\mu\setminus\widetilde{\mu}} K_i \overline{\psi}_i(n_i) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_1 \prod_{i\in\mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \times$$

$$\times \sum_{\widetilde{\mu}\subset\mu'} \prod_{i\in\widetilde{\mu}} \mathcal{E}_{n_i}(L^{\overline{\psi}_i}) \prod_{i\in\mu'\setminus\widetilde{\mu}} K_i \overline{\psi}_i(n_i) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_1 \prod_{i\in\mu} K_i \overline{\psi}_i(n_i),$$

где величины μ', μ'' *имеют прежний смысл,* K_i *– постоянные, не зависящие от* $n \in N^m$ *и* $f \in L^{\overline{\psi}}$.

§3.2. Асимптотика приближения ψ – дифференцируемых функций многих переменных

В этом параграфе дается асимптотика приближения ψ – дифференцируемых функций многих переменных некоторыми линейными методами суммирования рядов.

Пусть $T^m = \left[-\pi, \pi\right]^m$ – m-мерный куб, Z^m – целочисленная решетка в m-мерном евклидовом пространстве R^m, $xy = x_1 y_1 + ... + x_m y_m$, $|x| = \sqrt{xx}$, $C(T^m)$ – пространство непрерывных на T^m функций $f(x)$, 2π - периодических по каждой переменной с нормой

$$\|f\|_C = \max_{x \in T^m} |f(x)|,$$

$$S[f] = \sum_{k \in Z^m} c_k(f) e^{ikx} \tag{3.69}$$

– ряд Фурье функции $f \in C(T^m)$,

$$c_k(f) = (2\pi)^{-m} \int_{T^m} f(y) e^{-iky} dy, \;\; k \in Z^m$$

– коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Пусть $\psi(t)$ – произвольная функция, определенная при всех действительных $t > 0$,

$$\frac{1}{\psi(0)} \overset{df}{=} 0, \;\; \psi(|k|) \neq 0, \;\; k \in Z^m \setminus \{0\}.$$

Если ряд

$$\sum_{k\in Z^m}\frac{1}{\psi(|k|)}c_k(f)e^{ikx} \tag{3.70}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $C(T^m)$, которую обозначим через $f^{\psi}(x)$, то эту функцию назовем $\psi-$ производной функции $f(x)$. Множество функций $f\in C(T^m)$, удовлетворяющих таким условиям, обозначим $C^{\psi}C(T^m)$. В случае $\psi(|k|)=|k|^{-2r}$, $r\in N$, говорят, что $f\in C(T^m)$ имеет r-й обобщенный Лапласиан, а S^{r} – класс функций, имеющих r-й обобщенный Лапласиан $\left(f^{\psi}=\widetilde{\Delta}^r f,\ r\in N\right)$, при $\psi=(|k_1|+......+|k_m|^{-r})$ имеем класс функций, обладающих r-й обобщенной производной Рисса $(f^{\psi}=D^r f)$.

Пусть, далее, метод суммирования $U_n(f;\Lambda)$, $n\in N$, ряда Фурье (3.69) функций класса $C^{\psi}C(T^m)$ задан последовательностью функций $\Lambda=(\lambda_k^{(n)})$, $k\in Z^m$, $n\in N$, причем,

$$S\left[U_n(f;x;\Lambda)\right]=\sum_{k\in Z^m}\lambda_k^{(n)}c_k(f)e^{ikx}, \tag{3.71}$$

а $\mu^{(n)}=\mu_k^{(n)}$, $k\in Z^m$, $n\in N$, определяет последовательность мультипликаторов в пространстве $C(T^m)$, т. е. ряд

$$\sum_{k\in Z^m}\mu_k^{(n)}c_k(f)e^{ikx}$$

есть ряд Фурье некоторой функции $\widetilde{U}_n(f;x;\mu)\in C(T^m)$ и

$$\left\|\mu_k^{(n)}\right\|_M=\left\|\mu^{(n)}\right\|_{C\to C}=\sup_{|f|\le 1}\left\|\widetilde{U}_n(f;x;\mu)\right\|_C.$$

Если

$$\sup_{n\in N}\left\|\mu_k^{(n)}\right\|_C < \infty,$$

то последовательность $\mu^{(n)}$ называется равномерно ограниченной в $C(T^m)$. Достаточные условия равномерной ограниченности мультипликаторов в $C(T^m)$ в случае m = 1 хорошо известны (см., например, [112, с. 100]. В случае кратных рядов Фурье, когда $\mu_k^{(n)} = \mu\left(\dfrac{k}{n}\right),\ k \in Z^m,\ n \in N;$ такие условия содержатся, например, в [140]. Одно из условий заключается в принадлежности функции $\mu(u),\ u \in R^m,$ алгебре $B(R^m)$ – преобразований Фурье конечных борелевых мер на R^m:

$$\mu(x) = \int_{R^m} e^{-iux} d\nu(u),$$

с нормой

$$\|\mu\|_B = \inf \operatorname{var} \nu < +\infty .$$

Пусть, далее, $\psi_i(|k|) \neq 0,\ \dfrac{1}{\psi_i(0)} \overset{df}{=} 0,\ i = 1,2,\ k \in Z^m \setminus \{0\}$ – произвольные функции. Следуя [105] (см. также, [106, с. 35], [112, с. 145]), будем говорить, что величина ψ_1 с– предшествует величине ψ_2 и записывать $\psi_1 \overset{c}{\leq} \psi_2$, если из включения $f \in C^{\psi_2}C(T^m)$ следует существование $f^{\psi_1} \in C(T^m)$. В этом случае справедливо соотношение

$$S\left[(f^{\psi_1})^{\psi_2/\psi_1} \right] = S\left[f^{\psi_2}\right].$$

Действительно, ряды

$$\sum_{k\in Z^m}\frac{1}{\psi_i(|k|)}c_k(f)e^{ikx},\ \ i=1,2,$$

являются рядами Фурье функций $f^{\psi_1}(\cdot)$ и $f^{\psi_2}(\cdot)$, соответственно.

При i =1

$$S[f^{\psi_1}]=\sum_{k\in Z^m}c_k(f^{\psi_1})e^{ikx},$$

где

$$c_k(f^{\psi_1})=\frac{1}{\psi_i(|k|)}c_k(f),\ \ k\in Z^m\,.$$

Отсюда

$$S\left[(f^{\psi_1})^{\psi_2/\psi_1}\right]=\sum_{k\in Z^m}\frac{\psi_1(|k|)}{\psi_2(|k|)}c_k(f^{\psi_1})e^{ikx}=S[f^{\psi_2}],$$

где $\dfrac{\psi_1(0)}{\psi_2(0)}\overset{df}{=}0$.

Стало быть

$$f^{\psi_1}\in C^{\psi_2/\psi_1}C(T^m)\ \ \forall f\in C^{\psi_2}C(T^m)\,.$$

Пусть теперь ряд

$$\sum_{k\in Z^m\setminus\{0\}}\frac{\psi_1(|k|)}{\psi_2(|k|)}e^{-ikx} \tag{3.72}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой 2π – периодической по каждой переменной функции $D_\psi(x),\ D_\psi\in L(T^m),\ \psi\overset{df}{=}\dfrac{\psi_2}{\psi_1}$. Тогда $\forall f\in C^{\psi_2}C(T^m)$ ряд

$$\sum_{k\in Z^m}\frac{1}{\psi_1(|k|)}c_k(f)e^{ikx} \tag{3.73}$$

является рядом Фурье некоторой непрерывной функции $f^{\psi_1}(x)$. В самом деле, учитывая условия $f^{\psi_2}\in C\left(T^m\right)$, $D_\psi\in L\left(T^m\right)$, функция

$$I(x)=(2\pi)^{-m}\int_{T^m}f^{\psi_2}(x-t)D_\psi(t)dt$$

является непрерывной. Рассматривая для нее ряд Фурье убеждаемся, что он совпадает с рядом (3.73).

Если $\dfrac{\psi_2(|k|)}{\psi_1(|k|)}=|k|^{-r}$, $r>0$, $k\in Z^m\setminus\{0\}$, ряд (3.72) является рядом Фурье суммируемой функции D_ψ и тогда $\psi_1\overset{C}{\leq}\psi_2$, в частности, при $\psi_1(|k|)=|k|^{-r_1}$, $\psi_2(|k|)=|k|^{-r_2}$, $k\in Z^m\setminus\{0\}$, $r_1,r_2>0$, из изложенного выше следует, что $\psi_1\overset{C}{\leq}\psi_2$.

В дальнейшем нам понадобится следующий факт. Если $\mu^{(n)}$, $n\in N$, – последовательность мультипликаторов, равномерно ограниченная в $C(T^m)$ и $\forall k\in Z^m$ $\mu_k^{(n)}\to 0$ $(n\to\infty)$, то

$$\left\|\widetilde{U}_n(f;x;\mu)\right\|_C=o(1),\quad n\to\infty. \tag{3.74}$$

Действительно, в этом случае

$$\left\|\widetilde{U}_n(f;x;\mu)\right\|_C\leq K\|f\|_C\ \ \forall f\in C(T^m),$$

где K – величина, независящая от $n\in N$. Отсюда для любого полинома $T(x)$

$$\left\|\widetilde{U}_n(f;x;\mu)\right\|_C = \left\|\widetilde{U}_n(f-T;x;\mu)\right\|_C + \left\|\widetilde{U}_n(T;x;\mu)\right\|_C \le K\|f-T\|_C + \left\|\widetilde{U}_n(T;x;\mu)\right\|_C.$$

За счет надлежащего выбора Т(x) первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым. Учитывая, что при любом достаточно большом n сумма $\widetilde{U}_n(T;x;\mu)$ содержит одинаковое число членов, в силу условия $\mu_k^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$ заключаем, что

$$\left\|\widetilde{U}_n(T;x;\mu)\right\|_C = o(1),\ \ n \to \infty.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.7. *Пусть* $\psi_S(t)$, *s = 1,...,r,* $r \in N$, *– система произвольных функций, определенных при всех t > 0,* $\frac{1}{\psi_s(0)} \overset{df}{=} 0$, $\psi_s(|k|) > 0,\ k \in Z^m \setminus \{0\};$ $\varphi_s(n)$, $s = 1,...,r$, $r \in N$ *– произвольная система последовательностей действительных положительных чисел,* $\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)} = \widetilde{\lambda}_{|k|}^{(n)}\right\|$, $k \in Z^m$, $n \in N$, *– матрица чисел такая, что*

$$\widetilde{\lambda}_{|k|}^{(n)} = \sum_{s=0}^{r} a_s \frac{\varphi_s(n)}{\psi_s(|k|)} + o\left(\frac{\varphi_r(n)}{\psi_r(|k|)}\right),\ n \to \infty,\ \ \psi_0(|k|) = \varphi_0(n) = 1, \tag{3.75}$$

где a_s, $s = 0,1,...,r$ *– некоторые действительные числа, a_0 =1. Пусть, далее,*

$$\mu^{(n)} = \mu_k^{(n)} \overset{df}{=} \left(\lambda_k^{(n)} - \sum_{s=0}^{r} a_s \frac{\varphi_s(n)}{\psi_s(|k|)}\right) \frac{\psi_r(|k|)}{\varphi_r(n)} \tag{3.76}$$

порождает последовательность мультипликаторов, равномерно ограниченную в $C(T^m)$. *Тогда, если* $\psi_s \overset{c}{\le} \psi_r\ \forall s = 1,...,r-1,$ *то* $\forall f \in C^{\psi_r} C(T^m)$ *равномерно по x имеет место асимптотическое* *равенство*

$$U_n(f;x;\Lambda)-f(x)=\sum_{s=1}^{r}a_s\varphi_s(n)f^{\psi_s}(x)+o(\varphi_r(n)),\ \ n\to\infty. \qquad (3.77)$$

Полагая, в частности, $\psi_s(|k|)=|k|^{-2s}$, $k\in Z^m\setminus\{0\}, \varphi_S(n)=n^{-2S}$, $s=1,...,r,\ r\in N,\ n\in N,\ \lambda_k^{(n)}=\lambda\left(\frac{k}{n}\right)$, в условиях теоремы 3.7 получим асимптотику приближения функций класса S^r, найденную в работе [42]:

$$U_n(f;x;\Lambda)-f(x)=\sum_{s=1}^{r}a_s\,\frac{\widetilde{\Delta}^s f(x)}{n^{2s}}+o\left(\frac{1}{n^{2r}}\right),\ \ n\to\infty. \qquad (3.78)$$

Равенства вида (2.78) в случае m = 1 восходят к работам Е. В. Вороновской [13], С. Н. Бернштейна [10]. В m-мерном случае (m > 1) асимптотика приближения конкретными методами суммирования рядов исследовалась в работах [21], [30]. В частности, в классе S^r для средних типа Абеля-Пуассона

$$\lambda_k^{(n)}=\lambda\left(\frac{k}{n}\right)=\tilde{\lambda}\left(\frac{|k|}{n}\right)=e^{-\left(\frac{|k|}{n}\right)^{\alpha}},\ \alpha>0,$$

(в этом случае (см. [42]) по теореме Лефстрема [70] $\mu(u)\in B(R^m)$) асимптотика приближения установлена Б. И. Голубовым [21].

Доказательство теоремы 3.7. В силу условий теоремы ряд

$$\sum_{k\in Z^m}\mu_k^{(n)}\frac{1}{\psi_r(|k|)}c_k(f)e^{ikx}$$

$\forall f\in C^{\psi_r}C(T^m)$ является рядом Фурье некоторой функции из $C(T^m)$.

Далее, с учетом того, что $a_0=1,\ \varphi_0=\psi_0\overset{df}{=}1$

$$I_n(x)\overset{df}{=}\sum_{k\in Z^m}\mu_k^{(n)}\frac{1}{\psi_r(|k|)}c_k(f)e^{ikx}=\sum_{k\in Z^m}\left(\lambda_k^{(n)}-\sum_{s=0}^{r}a_s\frac{\varphi_s(n)}{\psi_s(|k|)}\right)\frac{1}{\varphi_r(n)}c_k(f)e^{ikx}=$$

$$=\frac{1}{\varphi_r(n)}\left(\sum_{k\in Z^m}\lambda_k^{(n)}c_k(f)e^{ikx}-\sum_{k\in Z^m}c_k(f)e^{ikx}-\sum_{s=1}^{r}a_s\varphi_s(n)\sum_{k\in Z^m}\frac{1}{\psi_s(|k|)}c_k(f)e^{ikx}\right)=$$

$$=S\left[\frac{1}{\varphi_r(n)}\left(U_n(f;x;\Lambda)-f(x)-\sum_{s=1}^{r}a_s\varphi_s(n)f^{\psi_S}(x)\right)\right].$$

Поскольку $f^{\psi_S}(x)\in C(T^m)$, s=1,….,r–1, то $U_n(f;x;\Lambda)\in C(T^m)$. В силу условия (3.75) $\mu_k^{(n)}\to o(n\to\infty)$, $k\in Z^m$. Отсюда, принимая во внимание (3.74)

$$\left\|I_n(x)\right\|_C=o(1),\ n\to\infty,$$

приходим к утверждению теоремы.

Рассмотрим вопрос об обращении теоремы 3.7. Соответствующее утверждение содержится в следующей теореме.

Теорема 3.8. *Пусть* $\Lambda=\left\|\lambda_k^{(n)}=\widetilde{\lambda}_{|k|}^{(n)}\right\|,\ \lambda_0^{(n)}=1,\ k\in Z^m,\ n\in N,$ – *матрица чисел, задающая последовательность мультипликаторов равномерно ограниченную в* $C(T^m)$ *и выполнены условия (3.75), (3.76) теоремы 3.7. Если при некотором* $r\in N$ *для* $f\in C(T^m)$ *имеет место асимптотическое равенство равномерно по x:*

$$U_n(f;x;\Lambda)-f(x)=\sum_{s=1}^{r}g_s(x)\varphi_s(n)+o(\varphi_r(n)),\ n\to\infty,\qquad(3.79)$$

где $g_s(x)\in C(T^m)$, *s=1,.....,r, то* $f\in C^{\psi_r}C(T^m)$ *и* $a_sf^{\psi_s}(x)=g_s(x)$.

Доказательство. Как и в работе [42] воспользуемся приемом Фавара [143]. В силу (3.79) при $r=1$ имеем

$$\left\| \frac{U_n(f;x;\Lambda)-f(x)}{\varphi_1(n)} \right\|_C = o(1), \;\; n\to\infty . \tag{3.80}$$

Рассмотрим суммы Бохнера-Рисса

$$\sigma_N^{\ \delta}(F;x)=\sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta} c_k(F)e^{ikx}, \;\; N\in \mathrm{N}$$

для функции

$$F(x)=\frac{U_n(f;x;\Lambda)-f(x)}{\varphi_1(n)}.$$

Учитывая, что при $\delta>\dfrac{m-1}{2}$ средние $\sigma_N^{\delta}(\cdot;x)$ регулярны, а также, что из условия (3.75) при $r=1$

$$\frac{\left(\lambda_k^{(n)}-1\right)\psi_1(|k|)}{\varphi_1(n)} = a_1+o(1), \;\; n\to\infty, \tag{3.81}$$

в силу (3.79) находим

$$\left\| \sigma_N^{\delta}\left(\frac{U_n(f;x;\Lambda)-f(x)}{\varphi_1(n)} \right) \right\|_C = \left\| \sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta} \frac{1}{\psi_1(|k|)} c_k(f)e^{ikx} \right\|_C =$$

$$= \left\| \sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta} \frac{1}{\psi_1(|k|)} c_k(f)e^{ikx} \right\|_C = o(1), \;\; n\to\infty, \;\; \delta>\frac{m-1}{2}. \tag{3.82}$$

Отсюда, вследствие равенства Парсеваля получаем

$$K\ge \int_{T^m}\left| \sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta} \frac{1}{\psi_1(|k|)} c_k(f)e^{ikx} \right|^2 dx = \sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{2\delta} \frac{1}{\psi_1^{\ 2}(|k|)} c_k^{\ 2}(f),$$

$K\equiv const>0$.

Таким образом $\forall N_0$, $0 \le N_0 \le N$,

$$\sum_{|k|\le N_0}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{2\delta}\frac{1}{\psi_1{}^2(|k|)}c_k{}^2(f)\le K .$$

Переходя к пределу по $N\to\infty$, находим

$$\sum_{|k|\in Z^m}\frac{1}{\psi_1{}^2(|k|)}c_k{}^2(f)<\infty .$$

Следовательно, существует $f^{\psi_1}(x)$ с суммируемым квадратом, $f^{\psi_1}\in L_2(T^m)$, и

$$S[f^{\psi_1}]=\sum_{|k|\in Z^m}\frac{1}{\psi_1(|k|)}c_k(f)e^{ikx} .$$

Так как $\forall f\in L_2(T^m)$ $\sigma_N^\delta(f)\to f\,(N\to\infty)$ почти всюду, вследствие (3.82) убеждаемся в ограниченности почти всюду функции $f^{\psi_1}(x)$. На основании соотношения (3.79) будем иметь

$$\left\|\sigma_N^\delta\left[\frac{U_n(f;x;\Lambda)-f(x)}{\varphi_1(n)}-g_1(x)\right]\right\|_C=\left\|\sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta}\frac{\lambda_k^{(n)}-1}{\varphi_1(n)}c_k(f)e^{ikx}-\right.$$

$$\left.-\sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta}c_k(g_1)e^{ikx}\right\|_C=$$

$$=\left\|\sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)\left[\frac{\left(\lambda_k^{(n)}-1\right)\psi_1(|k|)}{\varphi_1(n)\psi_1(|k|)}-c_k(g_1)\right]e^{ikx}\right\|_C=o(1)\,,n\to\infty .$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, с учетом (3.82) получаем

$$\left\| \sum_{|k|\le N} \left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta} \left[\frac{a_1}{\psi_1(|k|)} c_k(f) - c_k(g_1)\right] e^{ikx} \right\|_C = 0 .$$

Принимая во внимание, что

$$c_k(f^{\psi_1}) = \frac{1}{\psi_1(|k|)} c_k(f),$$

заключаем, что $a_1 c_k(f^{\psi_1}) = c_k(g_1)$, и поэтому $a_1 f^{\psi_1}$ эквивалентна g_1.

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо $\forall r \le r_0$. Доказательство её при $r = r_0 + 1$ получается путем применения предыдущих рассуждений к функции

$$U_n(f;x;\Lambda) - f(x) - \sum_{s=0}^{r} a_s f^{\psi_s}(x) \varphi_s(n) .$$

§3.3. φ– сильная аппроксимация на классах $\overline{\psi}$ – дифференцируемых функций многих переменных

В данном параграфе устанавливаются оценки средних Валле-Пуссена последовательности φ– отклонений прямоугольных сумм Фурье на классах функций $C^{\overline{\psi}} C^0(T^m)$ в терминах наилучших приближений их $\overline{\psi}$ – производных.

Приведём многомерный аналог определения множества Φ (см. например, [85]).

Пусть Φ_m – множество неубывающих и непрерывных на $[0,+\infty)$ функций $\varphi = \varphi(u)$ таких, что $\varphi(u) > 0 \ \ \forall u > 0, \ \ \varphi(0) = 0$ и

$$\varphi(2u) \le a\varphi(u), \ \ \forall u \in [0,1], \ \ a = a(\varphi) \qquad (3.83)$$

$$\varphi(u) \le A\exp(bu^{1/m}),\ \ \forall u \in [0,+\infty],\ \ b = b(\varphi)\,.$$

Пусть, далее, $\rho_{\mu,n}(f;x) = f(x) - S_{\mu,n}(f;x)$, где $S_{\mu,n}(f;x)$ – прямоугольные суммы Фурье ряда (2.15) по переменных x_i, $i \in \mu \subset \overline{m}$.

При $\mu = \overline{m}$, $S_{\overline{m},n}(f;x) \stackrel{df}{=} S_n(f;x)$, $\rho_{\overline{m},n}(f;x) \stackrel{df}{=} \rho_n(f;x)$, $\mu \subset \mu_0 \subset \overline{m}$, $\widetilde{\mu} = \mu_0 \setminus \mu$, следовательно $k^{\mu_0} = k^{\mu} + k^{\widetilde{\mu}}$, $\nu_0(n;\mu) = \{k^{\mu} : k_i \in [n_i;2n_i], i \in \mu\}$.

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.9. *Пусть* $\varphi \in \Phi_m$, $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0, \pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'_0$, $\forall i \in \overline{m}$; $\mu \subset \mu_0 \subset \overline{m}$, $\mu_1 \subset \mu_0$, $\mu_1' = \mu_1 \cap \mu$, $\mu_2 = \mu_1 \setminus \mu$ *и*

$$d(k^{\mu_2}) \stackrel{df}{=} \prod_{i \in \mu_2} c_{k_i}(\overline{\psi}_i) \ln k_i e\,.$$

Тогда $\forall f \in C^{\overline{\psi}} C^0(T^m)$ и $\forall n \in N^m$

$$\prod_{i\in\mu}(n_i+1)^{-1} \sum_{k^{\mu}\in\nu_0(n,\mu)} \varphi(|\rho_{\mu_0,k}(f;x)|) \le K\varphi\left(\sum_{\mu_1\subset\mu_0} E_{\mu_1,n^{\mu_1'}+k^{\mu_2}}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i\in\mu_1'} c_{n_i}(\overline{\psi}_i) d(k^{\mu_2})\right), \quad (3.84)$$

где

$$c_{n_i}(\overline{\psi}_i) \stackrel{df}{=} \overline{\psi}_i(n_i) + \int_{n_i}^{\infty} \frac{|\psi_i^{(2)}(t_i)|}{t_i} dt_i\,, \quad (3.85)$$

$K = K(\varphi,d,m)$ *– постоянная, не зависящая от* $n \in N^m$ *и* $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$.

Полагая в условиях теоремы 3.9 $\mu = \mu_0$ и учитывая, что $\mu_1' = \mu_1 \subset \mu$, $\mu_2 = \emptyset$, получаем такое утверждение.

Следствие 3.2. *Пусть* $\varphi \in \Phi_m$, $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0, \pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'_0$, $\forall i \in \overline{m}$. *Тогда* $\forall f \in C^{\overline{\psi}} C^0$, $\forall n \in N^m$ *и* $\forall \mu \subset \overline{m}$

$$\prod_{i\in\mu}(n_i+1)^{-1} \sum_{K^\mu \in \nu_0(n,\mu)} \varphi(|\rho_k(f;x)|) \le K\varphi\left(\sum_{\mu_1\subset\mu} E_{\mu_1,n}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i\in\mu_1} c_{n_i}(\overline{\psi}_i)\right), \quad (3.86)$$

$K = K(\varphi)$ – *постоянная, не зависящая от* $n \in N^m$ *и* $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$.

Утверждение следствия 3.1 является многомерным аналогом теоремы 2.3. Некоторые важные частные случаи теоремы 3.9, а именно, на классах $C^{\psi}_{\beta} C^0$, содержатся в работе [85].

Доказательству теоремы 3.9 предпошлем ряд вспомогательных утверждений. С этой целью обозначим через $\nu(n,\mu)$ – произвольное подмножество множества $\nu_0(n,\mu)$, а через r_i – количество элементов ортогональной проекции $\nu(n,\mu)$ на i -ю координатную ось, $i \in \mu$, и введём в рассмотрение сильные средние вида

$$h^{(q)}(f;x;\nu(n,\mu);k^{\widetilde{\mu}}) = \left\{\prod_{i\in\mu} r_i^{-1} \sum_{k^\mu \in \nu(n,\mu)} \left|\rho_{\mu_0,k}(f;x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}, q > 0 \qquad (3.87)$$

Лемма 3.7. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'_0$ $\forall i \in \mu$, $\tau \subset \mu_0 \subset \overline{m}$, $\mu_1 \subset \mu_0$, $\tau_1 = \mu \cap \tau$, $\widetilde{\mu} = \mu_1 \setminus \tau$. *Тогда* $\forall f \in C^{\overline{\psi}} C^0$ $\forall q > 0$ *и* $\forall n \in N^m$

$$h^{(q)}(f;x;\nu(n,\tau);k^{\mu_0\setminus\tau}) \le K \sum_{\mu_1\subset\mu_0} E_{\mu_1,n}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i\in\tau_1} c_{n_i}(\overline{\psi}_i) \ln\frac{n_i e}{r_i} d(k^\mu), \quad (3.88)$$

$K = K(q)$ – *постоянная, не зависящая от* $n \in N^m$ *и* $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$.

Доказательство леммы 3.7 проведем в несколько этапов.

Лемма 3.8. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0, \pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'_0 \ \ \forall i \in \mu \subset \overline{m}$. *Тогда* $\forall g \in C(T^m)\ \ \forall q > 0$ *и* $\forall n \in N^m$

$$R^{(q)}(g;x;\nu(n,\mu)) \overset{df}{=} \left\{ \prod_{i\in\mu} r_i^{-1} \sum_{k^\mu \in \nu(n,\mu)} \left| F_\mu(g;x;k^\mu) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \le K \|g\|_C \prod_{i\in\mu} c_{n_i}(\overline{\psi}_i) \ln\frac{n_i e}{r_i}, \quad (3.89)$$

где $F_\mu(\cdot)$ *– величина, определяемая равенством (3.25).*

Доказательство. Не умоляя общности будем считать, что $q \ge 2$ и $\mu = \{1,2,\ldots,s\}$, $\mu \subset \overline{m}$.

Для записи представления величины $F_1(\cdot)$ воспользуемся представлениями интегралов

$$\int_R g(x-t) I_2(\psi_i^{(1)};n;t)_0\, dt,$$

$$\int_R g(x-t) I_2(\psi_i^{(2)};n;t)_1\, dt, \quad n \in N^m,\ x \in R,$$

приведенные в [112, с. 221-230]. В таком случае

$$F_1(g;x;k_1) = \int_R g(x - t^{\{1\}}) \left[I_2(\psi_1^{(1)};n_1;t_1)_0 + I_2(\psi_1^{(2)};n_1;t_1)_1 \right] dt =$$

$$= \int_{|t_1| \le \frac{\alpha}{k_1}} g(x - t^{\{1\}}) I_2(\psi_1^{(2)};n_1;t_1)_1\, dt_1 +$$

$$+ \frac{\overline{\psi_1}(k_1)}{\pi} \int_{\frac{a_1}{k_1} \le |t_1| \le q_1\pi_1} g(x - t^{\{1\}}) t_1^{-1} \sin(k_1 t_1 + \theta_{k_1})\, dt_1 +$$

$$+ \frac{\overline{\psi_1}(k_1)}{\pi} \int_T g(x - t^{\{1\}}) A q_1(t_1) \sin(k_1 t_1 + \theta_{k_1})\, dt_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t_1|\le\frac{a_1}{k_1}} g(x-t^{\{1\}})I_3(\psi_1^{(2)};k_1;t_1)_1\,dt_1-$$

$$-\frac{\overline{\psi}_1^{(1)}(k_1)}{\pi}\int\limits_{|t_1|\le\frac{a_1}{k_1}} g(x-t^{\{1\}})\frac{\sin k_1t_1}{t_1}\,dt_1-\int\limits_R g(x-t^{\{1\}})\times$$

$$\times I_3(\psi_1^{(1)};k_1;t_1)_0\,dt_1\overset{df}{=}\sum_{j_1=1}^{6}\chi_{j_1}(g;x;k_1), \qquad (3.90)$$

где

$$A_{q_1}(t_1)=\sum_{j_1=\frac{q_1+1}{2}}^{\infty}\frac{2t_1}{t_1^{\,2}-(2\pi j)^2},$$

q_1 – нечетное число из условия $(q_1-2)\pi<\dfrac{a_1}{k_1}<q_1\pi,$

$$I_3(\psi_1^{(1)};k_1;t_1)_0=\frac{1}{t_1}\int\limits_{k_1}^{\infty}(\psi_1^{(1)}(v))'\sin vt_1\,dv,$$

$$I_3(\psi_1^{(2)};k_1;t_1)_1=\frac{1}{t_1}\int\limits_{k_1}^{\infty}(\psi_1^{(1)}(v))\cos vt_1\,dv,$$

$$\cos\theta_{k_1}=\frac{\psi_1^{(1)}(k_1)}{\overline{\psi}_1(k_1)},\ \ \sin\theta_{k_1}=\frac{\psi_1^{(2)}(k_1)}{\overline{\psi}_1(k_1)},\ \ a_1>0\,.$$

В дальнейшем числа a_i выбираются согласно лемме А, т. е. из условий

$$sign I_2(\psi_i^{(2)};k_i;t_i)=sign\,\psi_i^{(2)}(k_i),\ \ t_i\in\left(0,\frac{a_i}{k_i}\right).$$

Тогда на основании неравенства ([112, с. 236])

$$\int\limits_{|t_i|\le\frac{a_i}{k_i}} \left| I_2(\psi_i^{(2)};k_i;t_i)_1 \right| dt_i \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{k_1}^{\infty}\frac{\left|\psi_i^{(2)}(t_i)\right|}{t_i}dt_i + O(1)\overline{\psi}_i(k_i), \qquad (3.91)$$

а также соотношений ([112, с. 222, 227])

$$\int\limits_{|t_i|\ge\frac{a_i}{k_i}} \left| I_3(\psi_1^{(2)};k_1;t_1)_1 \right| dt_1 = O(1)\left|\overline{\psi}_1^{(2)}(k_1)\right|, \qquad (3.92)$$

$$\int\limits_{R} \left| I_3(\psi_1^{(1)};k_1;t_1)_0 \right| dt_1 = O(1)\left|\overline{\psi}_1^{(1)}(k_1)\right|, \qquad (3.93)$$

заключаем, что все интегралы в (3.90) абсолютно сходятся. Стало быть $F_1(g;x;k_1)$ – ограниченная функция. Точно так же ограничены и функции

$$F_2(g;x;k^{\{1,2\}}) = F_2(F_1;x;k_2) =$$
$$= \int\limits_R F_1(g;x-t^{\{2\}};k_2)\left[I_2(\psi_2^{(1)};t_2;k_2)_0 + I_2(\psi_2^{(2)};n_2;t_2)_1\right]dt_2,$$

………

$$F_s(q;x;k^{\mu}) = F_s(F_{s-1};x;k_s) =$$
$$= \int\limits_R F_{S-1}(g;x-t^{\{S\}};k^{\mu_1})\left[I_2(\psi_S^{(1)};t_S;k_S)_0 + I_2(\psi_S^{(2)};n_S;t_S)_1\right]dt_S,\ \mu_1=\{1,\ldots,s-1\}.$$

Представляя интеграл $F_2(\cdot)$ в виде (3.90), находим

$$F_2(F_1;x;k_2) = \sum_{j_2=1}^{6}\chi_{j_2}(F_1;x;k_2)$$

и, с учетом (3.109),

$$F_2(F_1;x;k_2)=\sum_{j_1=1}^{6}\sum_{j_2=1}^{6}\chi_{j_1}(\chi_{j_2}(g;x;k_2);x;k_1)=\sum_{j_1=1}^{6}\sum_{j_2=1}^{6}\chi_{j_1,j_2}(g;x;k_1;k_2). \quad (3.94)$$

На шаге s получаем

$$F_S(g;x;k^{\mu})=\int_R\ldots\int_R g(x-t^{\mu})\prod_{i\in\mu}\left[I_2(\psi_i^{(1)};t_i;k_i)_0+I_2(\psi_i^{(2)};t_i;k_i)_1\right]dt_1\ldots dt_2=$$

$$=\sum_{j_1=1}^{6}\ldots\sum_{j_S=1}^{6}\chi_{j_1}\ldots\chi_{j_S}(g;x;k^{\mu})=\sum_{j^{\mu}=e^{\mu}}^{6e^{\mu}}\chi_{j^{\mu}}(g;x;k^{\mu}), \quad (3.95)$$

$$\chi_{j^{\mu}}(\cdot)=\chi_{j_1}(.......(\chi_{j_S}(\cdot)......),\quad e=(1,...,1).$$

Применяя неравенство Минковского, с учетом (3.95) имеем

$$R^{(q)}(g;x;\nu(n,\mu))\le\sum_{j^{\mu}=e^{\mu}}^{6e^{\mu}}\left\{\prod_{i\in\mu}r_i^{-1}\sum_{k^{\mu}\in\nu(n,\mu)}\left|\chi_{j^{\mu}}(g;x;k^{\mu})\right|^q\right\}^{1/q}\stackrel{df}{=}\sum_{j^{\mu}=e^{\mu}}^{6e^{\mu}}\omega_{j^{\mu},q}(g;x;n^{\mu}). \quad (3.96)$$

Обозначим через μ_σ множество индексов координат точки j^{μ} равных σ, $\sigma=1,...,6$, $\mu=\bigcup_{\sigma=1}^{6}\mu_\sigma$.

Рассмотрим величину $\omega_{j_q^{\mu}}(\cdot)$ с индексом j^{μ}, для которого все $\mu_\sigma\ne\phi$ и положим

$$H_1=\prod_{i\in\mu_1}\left\{t_i:|t_i|\le\frac{a_i}{k_i}\right\},\ H_2=\prod_{i\in\mu_2}\left\{t_i:|t_i|\in\left[\frac{a_i}{k_i};q_i\pi\right]\right\},$$

$$H_3=T^{|\mu_3|},\ H_4=\prod_{i\in\mu_4}\left\{t_i:|t_i|\ge\frac{a_i}{k_i}\right\},$$

$$H_5 = \prod_{i \in \mu_5} \left\{ t_i : |t_i| \le \frac{a_i}{k_i} \right\}, \;\; H_6 = R^{|\mu_6|},$$

где $\prod\limits_{i \in \mu} E_i$ – произведение множеств E_i.

Применяя теорему Фубини и учитывая ограниченность величин $A_{q_i}(\cdot)$, получаем

$$\omega_{j^\mu, q}(g; x; n^\mu) \le K \prod_{i \in \mu_{2,3,5}} \overline{\psi}_i(n_i) \times$$

$$\times \left\{ \prod_{i \in \mu} r_i^{-1} \sum_{k^\mu \in \nu(n,\mu)} \left[\int\limits_{H_1} \prod_{i \in \mu_1} \left| I_2(\psi_i^{(2)}; t_i; k_i)_1 \right| dt^{\mu_1} \int\limits_{H_3} dt^{\mu_3} \int\limits_{H_4} \prod_{i \in \mu_4} \left| I_3(\psi_i^{(2)}; t_i; k_i)_1 \right| dt^{\mu_4} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \int\limits_{H_5} \prod_{i \in \mu_5} \left| \frac{\sin k_i t_i}{t_i} \right| dt^{\mu_5} \int\limits_{H_6} \prod_{i \in \mu_6} \left| I_3(\psi_i^{(1)}; k_i; t_i)_0 \right| dt^{\mu_6} \left| \int\limits_{H_2} g(x - t^\mu) \prod_{i \in \mu_2} t_i^{-1} \sin(k_i t_i + \theta_{k_i}) dt^{\mu_2} \right| \right]^q \right\}^{1/q} \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} K \prod_{i \in \mu_{2,3,5}} \overline{\psi}_i(n_i) \omega_{j^\mu, q}^{(1)}(g; x; n^\mu). \qquad (3.97)$$

На основании неравенства Минковского (см., например, [153, с. 178]):

$$\left\{ \sum_k \left(\int f_k(x) dx \right)^q \right\}^{1/q} \le \int \left(\sum_k f_k^q(x) \right)^{1/q} dx, \;\; f_k(\cdot) > 0, \;\; q > 1, \qquad (3.98)$$

полагая $\widetilde{\mu}_2 = \mu \setminus \mu_2$, имеем

$$\omega_{j^\mu, q}^{(1)}(g; x; n^\mu) \le$$

$$\leq \left\{ \prod_{i\in\mu} r_i^{-1} \sum_{k^{\tilde{\mu}_2}\in\nu(n,\tilde{\mu}_2)} \left(\int\limits_{H_1} \prod_{i\in\mu_1} \left| I_2(\psi_i^{(2)};k_i;t_i)_1 \right| dt^{\mu_1} \int\limits_{H_3} dt^{\mu_3} \int\limits_{H_4} \prod_{i\in\mu_4} \left| I_3(\psi_i^{(2)};k_i;t_i)_1 \right| dt^{\mu_4} \times \right.\right.$$

$$\times \int\limits_{\mathrm{H}_5} \prod_{i\in\mu_5} \left| \frac{\sin k_i t_i}{t_i} \right| dt^{\mu_5} \int\limits_{\mathrm{H}_6} \prod_{i\in\mu_6} \left| I_3(\psi_i^{(1)};k_i;t_i)_0 \right| dt^{\mu_6} \times$$

$$\left.\left. \times \left\{ \sum_{k^{\mu_2}\in\nu(n,\mu_2)} \left| \int\limits_{H_2} g(x-t^{\mu}) \prod_{i\in\mu_2} \frac{\sin(k_i t_i + \theta_{k_i})}{t_i} dt^{\mu_2} \right|^q \right\}^{1/q} \right)^q \right\}^{1/q} . \qquad (3.99)$$

Пусть $\mu_2 = \{i_1, i_2, ..., i_d\}$ и

$$Q_{i_1}(g;x;k_{i_1}) = \int\limits_{\frac{a_{i_1}}{k_{i_1}} \leq |t_{i_1}| \leq q_{i_1}\pi} g(x - t^{\tilde{\mu}_2} - t^{\{i_1\}}) t_{i_1}^{-1} \sin(k_{i_1} t_{i_i} + \theta_{k_{i_1}}) dt_{i_1},$$

$$Q_{i_d}(Q_{i_{d-1}};x;k_{i_d}) = \int\limits_{\frac{a_{i_d}}{k_{i_d}} \leq |t_{i_1}| \leq q_{i_d}\pi} Q_{i\,d-1}(x - t^{\tilde{\mu}_2} - t^{\{i_d\}}) t_{i_d}^{-1} \sin(k_{i_d} t_{i_d} + \theta_{k_{i_d}}) dt_{i_d} =$$

$$= \int\limits_{H_2} g(x-t^{\mu}) \prod_{i\in\mu_2} t_i^{-1} \sin(k_i t_i + \theta_{k_i}) dt^{\mu_2} . \qquad (3.100)$$

Величину $Q_{i_1}(g;x;k_1)$ представим в виде

$$Q_{i_1}(g;x;k_{i_1}) = \int\limits_{\frac{a_{i_1}}{k_{i_1}} \leq |t_{i_1}| \leq r_{i_1}^{-1}} + \int\limits_{\pi \leq |t_{i_1}| \leq q_{i_1}\pi} + \int\limits_{r_{i_1}^{-1} \leq |t_{i_1}| \leq \pi} g(x - t^{\tilde{\mu}_2} - t^{\{i_1\}}) t_{i_1}^{-1} \sin(k_{i_1} t_{i_i} + \theta_{k_{i_1}}) dt_{i_1} \stackrel{df}{=}$$

$$\stackrel{df}{=} \sum_{j_{i_1}=1}^{3} \sigma_{j_{i_1}}(g;x;k_{i_1}). \qquad (3.101)$$

Применяя (3.101) на шаге d, находим

$$Q_{i_d}(Q_{i_{d-1}};x;k_{i_d})=\sum_{j^{\mu_2}=e^{\mu_2}}^{3e^{\mu_2}}\sigma_{j^{\mu_2}}(g;x;k^{\mu_2}), \tag{3.102}$$

где $\sigma_{ji_d}(...(\sigma_{ji_1}(\cdot))...)$.

Принимая во внимание (3.100) – (3.102), получаем

$$\omega_{j^{\mu}}^{(1,1)}(g;x;n^{\mu})\overset{df}{=}\left\{\sum_{k^{\mu_2}\in\nu(n,\mu_2)}\left|\int_{H_2}g(x-t^{\mu})\prod_{i\in\mu_2}t_i^{-1}\sin(k_it_i+\theta_{k_i})dt^{\mu_2}\right|^q\right\}^{1/q}\le$$

$$\le\sum_{j^{\mu}=e^{\mu_2}}^{3e^{\mu_2}}\left\{\sum_{k^{\mu_2}\in\nu(n_2,\mu_2)}\left|\sigma_{j^{\mu_2}}(g;x;k^{\mu_2})\right|^q\right\}^{1/q}\overset{df}{=}\sum_{j^{\mu_2}=e^{\mu_2}}\alpha_{j^{\mu_2}}(g;x;n^{\mu_2}). \tag{3.103}$$

Обозначим через η_σ множество индексов координат точки j^{μ_2} равных σ, $\sigma=1,2,3$; $\mu_2=\bigcup_{\sigma=1}^{3}\eta_\sigma$. Пусть η_σ не пусты и

$$G_1=\prod_{i\in\eta_i}\left\{t_i:|t_i|\in\left[\frac{a_i}{k_i};r_i^{-1}\right]\right\},\ G_2=\prod_{i\in\eta_2}\{t_i:|t_i|\in[\pi,q_1\pi]\},$$

$$G_3=\prod_{i\in\eta_3}\{t_i:|t_i|\in[r_i,\pi]\},\ \eta_0=\mu_2\setminus\eta_3.$$

Вследствие неравенства (3.98), находим

$$\alpha_{j^{\mu_2}}(g;x;n^{\mu_2})\le\left\{\sum_{k^{\eta_0}\in\nu(n,\eta_0)}\left|\int_{G_1}\prod_{i\in\eta_1}\left|t_i^{-1}\right|dt^{\eta_1}\int_{G_2}dt^{\eta_2}\left\{\sum_{k^{\eta_3}\in\nu(n,\eta_3)}\right|\int_{G_3}g(x-t^{\mu})\times\right.\right.$$

$$\times \prod_{i\in\eta_3} \frac{\sin(k_i t_i + \theta_{k_i})}{t_i} dt^{\eta_3} \Bigg|^q \Bigg\}^{1/q} \Bigg\}^{1/q} . \qquad (3.104)$$

Положим

$$z(t^{\eta_3}) = \begin{cases} g(x - t^{\mu}) \prod\limits_{i\in\eta_3} |t_i|^{-1}, \ t^{\eta_3} \in G_3; \\ 0, \qquad\qquad\qquad t^{\eta_3} \in T^{|\eta_3|} \setminus G_3, \end{cases}$$

и продолжим $z(\cdot)\ 2\pi$ – периодически. В силу теоремы Хаусдорфа-Юнга [35, с. 153] находим

$$\left\{ \sum_{k^{\eta_3} \in \nu(n,\eta_3)} \left| \int_{T^{|\eta_3|}} z(t^{\eta_3}) \prod_{i\in\eta_3} \sin(k_i t_i + \theta_{k_i}) dt^{\eta_3} \right|^q \right\}^{1/q} \le \left\{ \int_{G_3} \left| g(x - t^{\mu}) \prod_{i\in\mu_3} r_i^{-1} \right|^{q'} dt^{\eta_3} \right\}^{1/q'} \le$$

$$\le K \|g\|_C \prod_{i\in\eta_3} r_i^{1/q'}, \ \ q' = \frac{q}{q-1}. \qquad (3.105)$$

Ввиду (3.105) из (3.104) вытекает оценка

$$\alpha_{j^{\mu_2}}(g;x;n^{\mu_2}) \le K\|g\|_C \prod_{i\in\mu_2} r_i^{1/q} \max_{k^{\eta_3}\in\nu(n,\eta_3)} \left| \prod_{i\in\eta_1} \ln\frac{k_i}{a_i r_i} \right| \le K_1 \|g\|_C r_i^{1/q} \prod_{i\in\eta_1} \ln\frac{n_i e}{r_i}. \qquad (3.106)$$

Согласно (3.103), (3.106), а также (3.91) – (3.93) получаем

$$\omega^{(1)}_{j^{\mu},q}(g;x;n^{\mu}) \le K_2 \|g\|_C \prod_{i\in\mu_{1,4,6}} c_{n_i}(\overline{\psi}_i) \prod_{i\in\mu_2} \ln\frac{n_i e}{r_i}. \qquad (3.107)$$

Вследствие соотношений (3.96), (3.97) и (3.107) приходим к неравенству (3.103), чем и завершается доказательство леммы 3.8.

Лемма 3.9. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_0'$, $\tau \subset \mu \subset \overline{m}$. *Тогда* $\forall g \in C(T^m)$ $\forall q > 0$ *и* $\forall n \in N^m$

$$\left\{\prod_{i\in\tau} r_i^{-1} \sum_{k^\tau \in \nu(n,\tau)} \left|F_\mu(g;x;k^\mu)\right|^q\right\}^{1/q} \le K\|g\|_C \prod_{i\in\tau} c_{n_i}(\overline{\psi}_i)\ln\frac{n_i e}{r_i} \prod_{i\in\mu} c_{k_i}(\overline{\psi}_i)\ln k_i e, \quad (3.108)$$

где $\mu_1 = \mu \setminus \tau$.

Доказательство. Если $\tau = \mu$, то $\mu_1 = \emptyset$. Тогда

$$\prod_{i\in\mu_1} c_{k_i}(\overline{\psi}_i)\ln k_i e = 1 .$$

В силу неравенства Минковского

$$\left\{\prod_{i\in\tau} r_i^{-1} \sum_{k^\tau \in \nu(n,\tau)} \left|F_\mu(g;x;k^\mu)\right|^q\right\}^{1/q} \le \sum_{j^\mu = e^\mu}^{4e^\mu} \left\{\prod_{i\in\tau} r_i^{-1} \sum_{k^\tau \in \nu(n,\tau)} \left|\chi_{j\tau}(\chi_{j^{\mu_1}}(g_1;x;k^\tau)\right|^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le K \sum_{j^\mu = e^\mu}^{4e^\mu} \prod_{i\in\tau} c_{n_i}(\overline{\psi}_i)\ln\frac{n_i e}{r_i} \left\|\chi_{j^{\mu_1}}(g;x;k^{\mu_1})\right\|_C . \quad (3.109)$$

Пусть теперь B_i, $i \in \mu$, обозначает одно из множеств

$$H_1^{(i)} = \left\{t_i : |t_i| \le \frac{a_i}{k_i}\right\}, \; H_2^{(i)} = \left\{t_i : |t_i| \in \left[\frac{a_i}{k_i}; q_i\pi\right]\right\},$$

$$H_3^{(i)} = T, \; H_4^{(i)} = \left\{t_i : |t_i| \ge \frac{a_i}{k_i}\right\}, \; H_5^{(i)} = R ,$$

$$
Z_i(t_i)=\begin{cases}
I_2(\psi_i^{(1)};k_i;t_i)_1, & B_i=H_1^{(i)};\\
\dfrac{\overline{\psi_i}(k_i)}{\pi}t_i^{-1}\sin(k_it_i+\theta_{k_i}), & B_i=H_2^{(i)};\\
\dfrac{\overline{\psi_i}(k_i)}{\pi}A_{q_i}(t_i)\sin(k_it_i+\theta_{k_i}), & B_i=H_3^{(i)};\\
\pi^{-1}I_3(\psi_i^{(2)};k_i;t_i)_i, & B_i=H_4^{(i)};\\
\pi^{-1}(\psi_i^{(1)}(k_i)t_i^{-1}\sin k_it_i, & B_i=H_1^{(i)};\\
\pi^{-1}I_3(\psi_i^{(1)};k_i;t_i)_0, & B_i=H_5^{(i)}.
\end{cases}
$$

Положим $\mu_1=\{i_1,.....,i_{|\mu_1|}\}$. Тогда

$$
\chi_{j^{\mu_1}}(g;x;k^{\mu_1})=\int\limits_{B_{i_1}}Z_{i_1}(t_{i_1})dt_{i_1}\ldots\int\limits_{B_{i_{|\mu_1|}}}g(x-t^{\mu_1})z_{i_{|\mu_1|}}(t_{i_{|\mu_1|}})dt_{i_{|\mu_1|}}\;.
$$

Вследствие (3.91) – (3.93) получаем

$$
\int\limits_{B_{i_\sigma}}\left|Z_{i_\sigma}(t_{i_\sigma})\right|dt_{i_\sigma}\le K\overline{\psi}_{i_\sigma}(k_{i_\sigma})\begin{cases}1, & B_{i_\sigma}=H_1^{(i_\sigma)},H_3^{(i_\sigma)},H_4^{(i_\sigma)},H_5^{(i_\sigma)}.\\ \ln k_{i_\sigma}e, & B_{i_\sigma}=H_2^{(i_\sigma)}.\end{cases}
$$

Отсюда с учетом (3.109) получаем (3.108).

Рассуждая, как и при доказательстве лемм 3.8 и 3.9, получаем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.10. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)}\in\mathfrak{m}_0,\quad \pm\psi_i^{(2)}\in\mathfrak{m}_0',\ \ \forall i\in\mu,\tau\subset\mu\subset\overline{m}$. *Тогда* $\forall g\in C(T^m)$ $\forall q>0$ *и* $\forall n\in N^m$

$$
\left\{\prod_{i\in\tau}r_i^{-1}\sum_{k^\tau\in\nu(n,\tau)}\left|Q_\mu(g;x;k^\mu)\right|^q\right\}^{1/q}\le K\|g\|_C\prod_{i\in\tau}c_{k_i}(\overline{\psi}_i)\prod_{i\in\tau_1}\ln\frac{n_ie}{r_i}\prod_{i\in\widetilde{\mu}}c_{k_i}(\overline{\psi}_i)\ln k_ie,\quad(3.110)
$$

$\tau_1=\tau\bigcap\mu_1,\ \ \widetilde{\mu}=\mu\setminus\tau$.

Доказательство леммы 3.7. Используя представление (3.38), в силу леммы 3.3 будем иметь

$$\rho_{\mu,k}(f;x)=\sum_{j=1}^{|\mu|}(-1)^{j+1}\sum_{|\mu_1|=j}F_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};x;k^{\mu_1})+\sum_{j=1}^{|\mu|}(-1)^{j+1}\sum_{\substack{|\mu_1|=j\\ \mu_1\subset\mu}}P_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};x;k^{\mu_1})+$$

$$+\sum_{j=2}^{|\mu|}(-1)^{j+1}\sum_{\substack{|\mu|=j\\ \mu_1\subset\mu}}Q_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};x;k^{\mu_1}),\tag{3.111}$$

где $\Delta_{\mu_1}(x)=f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}(x)-t^*_{\mu_1,n}(x),\ t^*_{\mu_1,n}\in\mathfrak{I}_{\mu_1,n}$,

$$E_{\mu_1,n}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}})=\left\|f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}(x)-t^*_{\mu_1,n}(x)\right\|_C.\tag{3.112}$$

В силу неравенства Минковского, с учетом (3.111), находим

$$h_q(f;\nu(n;\tau);k^{\mu\tau})\le\sum_{j=1}^{|\mu|}\sum_{\substack{|\mu_1|=j\\ \mu_1\subset\mu}}\left\{\prod_{i\in\tau}r_i^{-1}\sum_{k^\tau\in\nu(n,\tau)}\left|F_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};x;k^{\mu_1})\right|^q\right\}^{1/q}+$$

$$+\sum_{j=1}^{|\mu|}\sum_{|\mu_1|=j}\left\{\prod_{i\in\tau}r_i^{-1}\sum_{k^\tau\in\nu(n,\tau)}\left|P_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};x;k^{\mu_1})\right|^q\right\}^{1/q}+$$

$$+\sum_{j=2}^{|\mu|}\sum_{\substack{|\mu_1|=j\\ \mu_1\subset\mu}}\left\{\prod_{i\in\tau}r_i^{-1}\sum_{k^\tau\in\nu(n,\tau)}\left|Q_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};x;k^{\mu_1})\right|^q\right\}^{1/q}.$$

Отсюда на основании лемм 3.9 и 3.10, с учетом (3.112) и представления величины $P_\mu(\cdot)$, получаем неравенство (3.88) из леммы 3.7.

Доказательство теоремы 3.9. Пусть $\widetilde{\mu}=\mu_0\setminus\mu$,

$$\alpha(f;n^{\mu};k^{\tilde{\mu}}) = \sum_{\mu_1 \subset \mu_0} E_{\mu_1, n^{\mu'_1}+k^{\mu_2}}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i \in \mu'_1} c_n(\overline{\psi}_i) d(k^{\mu_2}).$$

Из оценки (3.18), приведенной в теореме 3.1 следует неравенство

$$\left\| \rho_{\mu_0,k}(f;x) \right\|_C \le K \sum_{\mu_1 \subset \mu_0} E_{\mu_1,k}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i \in \mu_1} c_{k_i}(\overline{\psi}_i) \ln k_i e.$$

Если $\alpha(f;n^{\mu};k^{\tilde{\mu}}) = 0$, то $E_{\mu_1,k}(f^{\overline{\psi}_{\mu}}) = 0 \quad \forall \mu_1 \subset \mu_0, \; k \ge n,$ следовательно, $\left\| \rho_{\mu_0,k}(\cdot) \right\|_C = 0 \;\; k \ge n$ и, с учетом определения множества Φ_m, убеждаемся в справедливости соотношения (3.84).

Пусть $\alpha(f;n^{\mu};k^{\tilde{\mu}}) > 0, \;\; j \in N$,

$$\nu(n^{\mu};k^{\tilde{\mu}};j) = \left\{ k^{\mu_0} \in \nu_0(n^{\mu};k^{\tilde{\mu}}) : (j-1)\alpha(f;n^{\mu};k^{\tilde{\mu}}) \le \left\| \rho_{\mu_0,k}(f;x) \right\| \le j\alpha(f;n^{\mu};k^{\tilde{\mu}}) \right\},$$

$|\nu(\cdot)|$ – количество элементов множества $\nu(\cdot)$. Поскольку функция $\varphi(\cdot)$ не убывает, то

$$\prod_{i \in \mu}(n_i+1)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k^{\mu} \in \nu(n^{\mu};k^{\tilde{\mu}};j)} \varphi(|\rho_{\mu_0,k}(f;x)|) \le$$

$$\le \prod_{i \in \mu}(n_i+1)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(j\alpha(f;n^{\mu};k^{\tilde{\mu}}))\, |\nu(n^{\mu};k^{\tilde{\mu}};j)|, \qquad (3.113)$$

где предполагается, что если при некотором $j \;\; \nu(n^{\mu};k^{\tilde{\mu}};j) = \emptyset,$ то $\sum_{k^{\mu} \in \nu(n^{\mu};k^{\tilde{\mu}};j)} = 0.$ Пусть $\left|\nu(n^{\mu};k^{\tilde{\mu}};j)\right| = \prod_{i \in \mu} r_i \ge 1,$ где r_i – количество элементов ортогональной проекции $\nu(n^{\mu};k^{\tilde{\mu}};j)$ на i-ю координатную ось, $i \in \mu$. Полагая в неравенстве (3.88) леммы 3.7 $q = 1,$ находим

$$\alpha(f;n^{\mu};k^{\tilde{\mu}})(j-1) \le K\prod_{i\in\mu}\ln\frac{n_i e}{r_i}\alpha(f;n^{\mu};k^{\tilde{\mu}})\,.$$

Пользуясь известным неравенством Коши:

$$\left(\prod_{i=1}^{s} a_i\right)^{1/s} \le s^{-1}\sum_{i=1}^{s} a_i,\ \ a_i > 0,$$

и полагая при этом $a_0 = (2A)^{-1}$ и $|\mu| = s$, получаем

$$\prod_{i\in\mu} r_i \le K_1\prod_{i\in\mu}(n_i e)e^{-s(ja_0)^{1/s}}\ . \tag{3.114}$$

В силу (3.114) из (3.113) следует

$$\prod_{i\in\mu}(n_i+1)^{-1}\sum_{k^{\mu}\in\nu_0(n;\mu)}\varphi(|\,\rho_{\mu_0,k}(f;x)\,|) \le K\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(j\alpha)e^{-s(ja_0)^{1/s}}\ . \tag{3.115}$$

Для оценки правой части неравенства (3.115) приведём многомерный аналог неравенства В. Тотика (2.69) (см., например, [85]): пусть $m\in N$, $\varphi\in\Phi_m$, b-число из определения функции $\varphi\in\Phi_m$, a_0 такое, что $\sigma_m = a_0(m(2b)^{-1})^m < 1$, $s\in N$ и $g(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(jz)\exp\left(-s(ja_0)^{1/s}\right)$. Тогда, если $s = m$, то $\forall z\in[0,\sigma_m]$

$$g(z) \le A\varphi(z)\,, \tag{3.116}$$

если же $s < m$, то (3.116) выполняется $\forall z\in[0,\sigma_m]$, где σ – фиксированное число, а величина $A = A(\sigma)$ не зависит от z, причем, в случае $z\in[\sigma_m,\sigma]$ при $s < m$ величина A имеет вид:

$$A = A_0\varphi(A_1\sigma^{\frac{m}{m-s}}),\ \ A_1 \equiv const > 0\,.$$

В силу (3.116) из (3.115) выводим оценку

$$\prod_{i\in\mu}(n_i+1)^{-1}\sum_{k^{\mu}\in\nu_0(n,\mu)}\varphi(\left|\rho_{\mu_0,k}(f;x)\right|)\le K_2\varphi(\alpha(f;n^{\mu};k^{\tilde{\mu}})),$$

где $K_2=K\varphi(K_3(d(k^{\mu_2}))^{m/m-s}$, $K_3>0,$ при $s<m$.

Теорема 3.9 полностью доказана.

Замечание. Из неравенства (3.86) вытекает ряд важных оценок. Так, в частности, если положим $\varphi(u)=u,$ то очевидным образом из (3.86) найдём оценку отклонений средних Валле-Пуссена кратных рядов Фурье, а также получим неравенство между наилучшим приближением искомой функции $f\in C^{\overline{\psi}}C^0(T^m)$ и наилучшим приближением ее $\overline{\psi}$ – производной $f^{\overline{\psi}}\in C^0(T^m)$.

ГЛАВА IV

СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ В ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В этой главе устанавливаются аппроксимационные свойства величин α - средних степенных отклонений частичных сумм рядов Фабера в областях с кусочно-гладкой границей в терминах мажорант модулей непрерывности. Показывается неулучшаемость полученных результатов на некоторых классах функций и на множестве таких областей. Находятся поточечные оценки группы отклонений сумм Фабера от аналитической в Ω и непрерывной в $\overline{\Omega}$ функции $f(z)$ в терминах величин $\Omega_k(f;z)$, связанных с модулем непрерывности функции $f(z)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$. В областях Фабера рассматриваются соотношения между α - средними последовательности φ-отклонений интегралов типа Коши $Kf(z)$ и наилучшими приближениями обобщенных ψ- производных функций $f^*(w) = f(\Psi(w))$, $|w| = 1$. В конце главы приводятся результаты относительно аппроксимационных свойств сумм Валле-Пуссена в пространствах Харди.

§4.1. Сильная аппроксимация аналитических функций в областях с кусочно-гладкой границей

Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ - расширенная комплексная плоскость, Ω - ограниченная область с жордановой границей $\Gamma(\partial\Omega = \Gamma)$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$, D_∞ - внешность в $\overline{\mathbb{C}}$ единичного круга: $D_\infty = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$, $\overline{D}_\infty$ - замыкание D_∞, $T = \{w : |w| = 1\}$ - единичная окружность, $z = \Psi(w)$ - функция Римана, отображающая конформно и однолистно область D_∞ на область $\Omega_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ и нормированная условием

$$\lim_{w\to\infty}\frac{\Psi(w)}{w} = \alpha > 0\ ,\ \Psi(\infty) = \infty,$$

$w = \Phi(z)$ - функция, обратная к $z = \Psi(w)$,

$$\Gamma_{1+1/n} = \left\{z : \left|\Phi(z)\right| = 1 + 1/n\right\}$$

- n-я линия уровня области Ω,

$$\rho_{1+1/n}(z) = \min_{\zeta\in\Gamma_{1+1/n}}\left\{\left|\zeta - z\right|\right\},\ \ z \in \Gamma,$$

- расстояние от точки $z \in \Gamma$ до n-й линии уровня $\Gamma_{1+1/n}$. Пусть, далее, $A_c(\overline{\Omega})$ - множество функций $f(z)$, аналитических в Ω и непрерывных в $\overline{\Omega}$.

Ограниченная жорданова область Ω называется областью типа (C) (см., например, [4], [27]), если для функции $z = \Psi(w)$ выполняются условия: существуют $r \in N$, $w_j \in T$ и $\alpha_j \in (0,2)$, $j = 1,2,\ldots,r$, такие, что имеет место равенство

$$\Psi'(w) = \lambda(w)\prod_{j=1}^{r}\left(1 - \frac{w_j}{w}\right)^{\alpha_j - 1},\ \forall w \in D_\infty,$$

где $\lambda(w)$ - непрерывная и отличная от нуля на $\overline{D_\infty}$ функция, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию $\omega(\lambda;t) \le Kt$, где K - некоторая положительная постоянная. Как известно ([24-28], [68]), области типа (C) включают в себя кроме многоугольников и области с жордановыми границами, состоящими из конечного числа дуг окружностей или аналитических дуг.

Будем говорить, что Ω - область типа (C') (см., например, [4]), если она является областью типа (*C*), а числа α_ν, $\nu = 1,2,...,r$, из определения области типа (*C*) удовлетворяют условиям

$$\alpha_\nu \geq \frac{1}{2}\max\left\{1;\ \max_{1\leq j\leq r}\alpha_j\right\},\ \nu = 1,2,...,r.$$

Пусть

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k F_k(z) \qquad (4.1)$$

- ряд Фабера функции $f(z)$, заданной на $\overline{\Omega}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi(e^{-it}))e^{-ikt}dt,\quad k=0,1,\ldots$$

- коэффициенты Фабера функции $f(z)$, $S_n(f;z)$ - частичная сумма ряда (4.1) и

$$\mathrm{H}_n^{(q)}(f;z) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(z) - S_k(f;z)\right|^q\right\}^{1/q},\ \text{q>0}. \qquad (4.2)$$

Сначала сформулируем утверждение, содержащее оценку величины $\mathrm{H}_n^{(q)}(f;z)$ в точках границы области типа (C'). С этой целью обозначим через $\omega(t)$ - неубывающую мажоранту модуля непрерывности $\omega(f;t)$ функции $f(z)$ в области $\overline{\Omega}$: $\omega(f;t) \leq \omega(t)$.

Теорема 4.1. *Пусть* Ω *- область типа* (C'), *функция* $f \in A_C(\overline{\Omega})$ *и её модуль непрерывности на* $\overline{\Omega}$ *имеет неубывающую мажоранту* $\omega(t)$, *для которой при некотором* $1 < p \leq 2$ *и некотором* $\gamma > \frac{2}{p} - 1$

$$\lim_{\delta\to 0+}\frac{\omega(\rho_{1+\delta}(z))}{\delta^{1/p-\gamma}}=\infty\,,\ z\in\Gamma\,, \tag{4.3}$$

монотонно возрастая. Тогда $\forall n\in N$ *и* $\forall q_1\in[0,q]$, $q=\dfrac{p}{p-1}$, *в точке* $z\in\Gamma$

$$\mathrm{H}_n^{(q_1)}(f;z)\le K\omega(\rho_{1+1/n}(z)), \tag{4.4}$$

$K=K(q,\gamma)$ - *величина, равномерно ограниченная по* $n\in N$, $f\in A_C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. На основании стандартных рассуждений (см., например, [4], [26, 27]) получаем представление

$$\rho_k(f;z)=f(z)-S_k(f;z)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(t)\left\{\int_\Gamma\frac{f(\zeta)-f(\zeta[t])}{\zeta-z}d\zeta\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{0}^{\pi}D_k(t)\left\{\int_\Gamma\frac{F(\zeta)-F(\zeta[t])}{\zeta-z}d\zeta\right\}dt\,, \tag{4.5}$$

где

$$\zeta[t]=\zeta[e^{-it}]=\Psi(\Phi(\zeta)e^{-it})\,,\ \ F(\zeta)=f(\zeta)-f(\zeta[-t])\,,$$

$D_k(t)$ - ядро Дирихле.

Положим

$$\mathrm{I}(z;t)=\int_\Gamma\frac{F(\zeta)-F(\zeta[t])}{\zeta-z}d\zeta\,.$$

Принимая во внимание (4.5), в силу неравенства Минковского имеем

$$\mathrm{H}_n^{(q)}(f;z) \le \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{1/n} D_k(t)\mathrm{I}(z;t)dt \right|^q \right\}^{1/q} +$$

$$+\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{1/n}^{\pi} D_k(t)\mathrm{I}(z;t)dt \right|^q \right\}^{1/q} = \mathrm{I}_{n,1}^{(q)}(z) + \mathrm{I}_{n,2}^{(q)}(z)\,. \tag{4.6}$$

Известно (см., например, [24]), что

$$\left|\mathrm{I}(z;t)\right| \le K\omega(f;\rho_{1+1/n}(z))\,. \tag{4.7}$$

В силу (4.7) имеем

$$\mathrm{I}_{n,1}^{(q)}(z) \le \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^{1/n} n\left|\mathrm{I}(z;t)\right|dt \right)^q \right\}^{1/q} \le Kn\int_0^{1/n} \omega(\rho_{1+t}(z))dt \le K\omega(\rho_{1+1/n}(z)). \tag{4.8}$$

Оценивая слагаемое $\mathrm{I}_{n,2}^{(q)}(z)$, представим ядро $D_k(t)$ в виде

$$D_k(t) = \frac{\sin kt}{2tg\, t/2} + \frac{1}{2}\cos kt\,.$$

В этом случае

$$\mathrm{I}_{n,2}^{(q)}(z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{1/n}^{\pi} \frac{\mathrm{I}(z;t)}{2tg\, t/2} \sin ktdt + \int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{2}\mathrm{I}(z;t)\cos ktdt \right|^q \right\}^{1/q}.$$

Введем вспомогательные функции

$$\Phi^{(1)}(z,t,n)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{I}(z;t)}{2tg\, {t}/{2}}, & t\in[{1}/{n},\pi];\\ 0, & t\in[-\pi,\pi]\setminus[{1}/{n},\pi],\end{cases}$$

$$\Phi^{(2)}(z,t,n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{I}(z;t), & t\in[{1}/{n},\pi];\\ 0, & t\in[-\pi,\pi]\setminus[{1}/{n},\pi],\end{cases}$$

$$\Phi^{(i)}(z,t+2\pi,n)=\Phi^{(i)}(z,t,n),\ \ i=1,2\,.$$

В принятых обозначениях получаем равенства

$$I_{n,2}^{(q)}(z)=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi^{(1)}(z,t,n)\sin kt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi^{(2)}(z,t,n)\cos kt\,dt\right|^{q}\right\}^{1/q}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k(\Phi^{(1)})+a_k(\Phi^{(2)})\right|^{q}\right\}^{1/q},$$

где $a_k(g)$, $b_k(g)$ - коэффициенты Фурье функции $g(\cdot)$.

Используя неравенство Минковского для сумм, имеем

$$\mathrm{I}_{n,2}^{(q)}(z)\le\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k(\Phi^{(1)})\right|^{q}\right\}^{1/q}+\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k(\Phi^{(2)})\right|^{(q)}\right\}^{1/q}\stackrel{df}{=}i_{n,1}^{(q)}(z)+i_{n,2}^{(q)}(z).\quad(4.9)$$

Учитывая неравенство

$$2tg\frac{t}{2}\ge t\,,\ \ 0\le t<\pi\,,$$

соотношение (4.7) и условие (4.3), в силу теоремы Хаусдорфа-Юнга находим

$$i_{n,1}^{(q)}(z) = \frac{1}{4\pi n^{1/q}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k(\Phi^{(1)})\right|^q\right\}^{1/q} \leq \frac{1}{4\pi n^{1/q}}\left\{\int_{1/n}^{\pi}\left|\frac{I(z;t)}{2tg\ t/2}\right|^p dt\right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{K}{n^{1/q}}\left\{\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega^p(\rho_{1+t}(z))t^{1-p\gamma}}{t^{1-p\gamma}t^p}dt\right\}^{1/p} \leq \frac{K_1}{n^{1/q}}\left\{\frac{\omega^p(\rho_{1+1/n}(z))}{n^{p\gamma-1}}\int_{1/n}^{\pi}t^{1-p\gamma-p}dt\right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{K_2}{n^{1/q}}\omega(\rho_{1+1/n}(z))n^{1-1/p} = K_2\omega(\rho_{1+1/n}(z)), \tag{4.10}$$

$$K_2 = K_2(q,\gamma),\ \ q = \frac{p}{p-1},\ z \in \Gamma .$$

Аналогично

$$i_{n,2}^{(q)}(z) \leq K_1\omega(\rho_{1+1/n}(z)),\ z \in \Gamma,\ K_1 = K_1(q,\gamma). \tag{4.11}$$

Сопоставляя оценки (4.10), (4.11) и (4.9), получаем

$$I_{n,2}^{(q)}(z) \leq K\omega(\rho_{1+1/n}(z)),\ z \in \Gamma . \tag{4.12}$$

Учитывая (4.8), (4.12), (4.6), а также неравенство (В.9), приходим к требуемому соотношению (4.4).

Положим теперь

$$R_{\nu,n}^{(q)}(f;z) = R_{\nu,n}^{(q)}(f;z;\alpha) = \left(\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\left|\rho_k(f;z)\right|^q\right)^{1/q},\ n \in N, \tag{4.13}$$

где $\alpha = (\alpha_k(\nu))$, $k \in N$,- некоторая последовательность неотрицательных функций, заданных на некотором множестве.

Теорема 4.2. *Пусть выполняются все условия теоремы 4.1 и* $\alpha = (\alpha_k(\nu))$ *- последовательность неотрицательных функций такая, что при каждом фиксированном* $\nu \in V$ *последовательность* *чисел* $\alpha_k(\nu)$ *не возрастает по индексу* $k \in N$. *Тогда для любого* $n \in N$ *в точке* $z \in \Gamma$, *определяемой равенством (4.3), имеет место неравенство*

$$R_{\nu,n}^{(q)}(f;z) \le K\left\{n\alpha_n(\nu)\omega^q\left(\rho_{1+1/n}(z)\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\omega^q\left(\rho_{1+1/k}(z)\right)\right\}^{1/q}, \quad (4.14)$$

$$q=\frac{p}{p-1},\ K=K(q,\gamma),\quad f\in A_c(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. Представляя величину (4.13) в виде

$$R_{\nu,n}^{(q)}(f;z)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1}\alpha(\nu)\left|\rho_k(f;z)\right|^q,$$

а также учитывая, что в силу (4.4)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\rho_k(f;z)\right|^q \le 2K^q\omega^q(\rho_{1+1/n}(z)),$$

получаем

$$R_{\nu,n}^{(q)}(f;z)\le\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(\nu)\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1}\left|\rho_k(f;z)\right|^q\right\}^{1/q}\le\left\{2K^q\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{2^i n}(\nu)2^i n\omega^q(\rho_{1+1/2^i n}(z))\right\}^{1/q}=$$

$$=K_1\left\{n\alpha_n(\nu)\omega^q(\rho_{1+1/n}(z))+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{2^i n}(\nu)2^i n\omega^q(\rho_{1+1/2^i n}(z))\right\}^{1/q}\le$$

$$\le K_1\left\{n\alpha_n(\nu)\omega^q(\rho_{1+1/n}(z))+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\alpha_k(\nu)\omega^q(\rho_{1+1/k}(z))\right\}^{1/q}=$$

$$=K_1\left\{n\alpha_n(\nu)\omega^q(\rho_{1+1/n}(z))+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\omega^q(\rho_{1+1/k}(z))\right\}^{1/q},$$

$K_1=K_1(q,\gamma)$.

Теорема 4.2 доказана.

Полагая в (4.14) $n=1$, находим

$$R_{\nu}^{(q)}(f;z)=R_{\nu,1}^{(q)}(f,z)\le K\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\nu)\omega^q(\rho_{1+1/k}(z))\right\}^{1/q}, \tag{4.15}$$

$\nu\in V$, $z\in\Gamma$.

Из неравенства (4.15) получаем оценки для достаточно широкого спектра α - средних последовательности отклонений $\left|\rho_k(f;z)\right|^q$, в частности, если $\alpha_k(\nu)=\alpha_k(r)=(1-r)r^{k-1}$, $0<r<1$, найдем оценку для средних Абеля последовательности отклонений $\left|\rho_k(f;z)\right|^q$:

$$A_r^{(q)}(f;z)=\left((1-r)\sum_{k=1}^{\infty}r^{k-1}\left|\rho_k(f;z)\right|^q\right)^{1/q}\le K\left\{(1-r)\sum_{k=1}^{\infty}r^{k-1}\omega^q(\rho_{1+1/k}(z))\right\}^{1/q},$$

$$z\in\Gamma .$$

В случае, когда $\alpha_k(\nu)=\alpha_k(n)=\alpha_k^{(n)}=(k\ln(n+1))^{-1}$, $1\le k\le n$, $\alpha_k^{(n)}=0$, $k>n$, получаем оценку для логарифмических средних степенных отклонений:

$$L_n^{(q)}(f;z)=\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left|\rho_k(f;z)\right|^q\right)^{1/q}\le K\left\{\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\omega^q(\rho_{1+1/k}(z))\right\}^{1/q},$$

$$z\in\Gamma .$$

Пусть, далее, $\Omega=D$ - единичный круг, $\partial D=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. Тогда Ω - область типа (C'), $\rho_{1+\delta}(z)=\delta$ и в качестве ряда Фабера получим ряд Тейлора. Положим,

$$\mathrm{H}_{\omega}=\left\{f\in A_C(\overline{D}):\omega(f,t)\le\omega(t)\right\},$$

где мажоранта $\omega(t)$ является модулем непрерывности. Тогда из теоремы 4.2 вытекает такое утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть модуль непрерывности* $\omega(t)$ *удовлетворяет условиям:*

1) *при некотором* $\gamma > \dfrac{2}{p} - 1,\ 1 < p \le 2,$

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\omega(\delta)}{\delta^{1/p - \gamma}} = \infty \text{ монотонно возрастая;}$$

2) $\exists B \equiv const > 0$ *такая, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(1/k) \le Bn\omega(1/n). \tag{4.16}$$

Если последовательность неотрицательных функций $\alpha = (\alpha_k(\nu))$ *такова, что при каждом фиксированном* $\nu \in V$ *числа* $\alpha_k(\nu)$ *не возрастают по индексу* $k \in N$, *то* $\forall n \in N$

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(\nu)\omega^q(1/k) \right\}^{1/q} \le \sup_{f \in H\omega} \sup_{z \in \partial D} R_{\nu,n}^{(q)}(f;z) \le$$

$$\le K \left\{ n\alpha_n(\nu)\omega^q(1/n) + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(\nu)\omega^q(1/k) \right\}^{1/q}, \tag{4.17}$$

где $q = \dfrac{p}{p-1}$, $K = K(q,\gamma)$ *- величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$, $\nu \in V$ *и не зависит от последовательности* α.

Доказательство. Положим

$$f_0(z) = M\sum_{k=1}^{\infty} (\omega(1/k) - \omega(1/(k+1)))z^k,\ |z| \le 1,\ M \equiv const > 0.$$

Ясно, что $f_0 \in A_C(\overline{D})$ и

$$E_n(f_0) \le M \sup_{z\in \overline{D}} \sum_{k=n}^{\infty} (\omega(1/k) - \omega(1/k+1)) z^k \le$$

$$\le M \sum_{k=n}^{\infty} (\omega(1/k) - \omega(1/k+1)) = M\omega(1/n).$$

В силу известного неравенства С.Б. Стечкина [122] и условия (4.16), получаем

$$\omega(f_0; 1/n) \le \frac{K}{n} \sum_{k=1}^{n} E_k(f_0) \le \frac{KM}{n} \sum_{k=1}^{n} \omega(1/k) \le KMB\omega(1/n).$$

Определим константу M как $M = (KB)^{-1}$. Тогда

$$\omega(f_0; 1/n) \le \omega(1/n),\ f_0 \in \mathrm{H}\omega.$$

Далее, поскольку

$$\rho_n(f_0;1) = \sum_{k=n}^{\infty} (\omega(1/k) - \omega(1/k+1)) = \omega(1/n),$$

то

$$\sup_{f\in \mathrm{H}\omega} \sup_{z\in\partial D} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) |\rho_k(f;z)|^q \ge \sup_{z\in\partial D} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) |\rho_k(f_0;z)|^q \ge$$

$$\ge \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) |\rho_k(f_0;1)|^q = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) \omega^q(1/n).$$

Замечание. *Если ограничиться случаем единичного круга D, то соотношения (4.14) и (4.17) можно получить без привлечения условия (4.3).*

В самом деле, в этом случае можно воспользоваться неравенством (2.17) для непрерывных 2π-периодических функций, если учесть, что

$$\rho_n(f;z)=\rho_n\left(f;e^{i\tau}\right)=\varphi(\tau)-S_n(\varphi;\tau)+i(\psi(\tau)-S_n(\psi;\tau))$$

и то, что $\omega(\varphi;\delta)\le\omega(f;\delta)$, $\omega(\psi;\delta)\le\omega(f;\delta)$.

Отсюда приходим к неравенству

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\rho_k(f;z)\right|^q\right\}\le K(q)\omega(f;{}^1\!/\!_n),\ \forall z\in\partial D.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся по схеме доказательств неравенств (4.14) и (4.17).

§4.2. Группы отклонений сумм Фабера в областях с кусочно-гладкой границей

4.2.1. Установим оценку скорости сходимости группы отклонений функции $f\in A_C(\overline{\Omega})$ от сумм Фабера, определяемой равенством

$$D_n(f;z)=D_n(f;z;\alpha)=\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(\nu)\rho_k(f;z)\right| \tag{4.18}$$

в каждой граничной точке области Ω типа (C').

Имеет место такое утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть Ω - область типа (C') и последовательность $\alpha=(\alpha_k(\nu))$, $k\in N$, $\nu\in V$, такова, что $\alpha_k(\nu)\ge 0$ и при каждом фиксированном $\nu\in V$ числа $\alpha_k(\nu)$ не возрастают по индексу k. Тогда $\forall f\in A_C(\overline{\Omega})$ при всех $n\in N$ и $z\in\Gamma$ выполняется неравенство*

$$D_n(f;z)\le K\frac{\alpha_n(\nu)}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt, \tag{4.19}$$

где K - *положительная величина, равномерно ограниченная по* $z \in \Gamma$, $n \in N$, $\nu \in V$, $f \in A_C(\overline{\Omega})$ *и не зависит от последовательности* α, $\omega(t) = \omega(f;t)$ *– модуль непрерывности функции* $f(z)$ *на* $\overline{\Omega}$.

Замечание. *Полагая*

$$V_m^{2m}(f;z) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=m}^{2m} S_k(f;z)$$

видим, что $V_m^{2m}(f;z)$, $m \in N$, *есть сумма Валле-Пуссена* $V_{n-p}^{n}(f;z)$, *в которой* $n = 2m$, $p = m$. *Тогда в условиях теоремы 4.3, в силу (4.19)* $\forall f \in A_C(\overline{\Omega})$ *и* $\forall z \in \Gamma$ *при* $\alpha_k(\nu) \equiv 1$, $\nu \in V$, *получаем неравенство*

$$\left| f(z) - V_m^{2m}(f;z) \right| \le \frac{K}{m} \int_{1/m}^{\pi} \frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2} dt \,. \qquad (4.20)$$

Оценка (4.20) ранее была установлена в работе [4].

Доказательство теоремы 4.3. Вследствие представления (4.5)

$$D_n(f;z) = \left| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} \frac{\alpha_k(v)}{4\pi^2 i} \int_0^{\pi} D_k(t) \left\{ \int_{\Gamma} \frac{F(\varsigma) - F(\varsigma[t])}{\varsigma - z} dt \right\} \right| \le$$

$$\le \left| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} \frac{\alpha_k(v)}{4\pi^2 i} \int_0^{1/n} D_k(t) I(z;t) dt \right| + \left| \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} \frac{\alpha_k(v)}{4\pi^2 i} \int_{1/n}^{\pi} D_k(t) I(z;t) dt \right| \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} D_{n,1}(f;z) + D_{n,2}(f;z) \,. \qquad (4.21)$$

Используя неравенство (4.7), находим

$$D_{n,1}(f;z) \le \frac{K}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\int_0^{1/n} n\omega(\rho_{1+t}(z))dt \le K\alpha_n(v)\omega(\rho_{1+1/n}(z)). \quad (4.22)$$

Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\left|\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(\nu)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right| \le \frac{K\alpha_n(\nu)}{t}, \ \nu \in V,$$

С учетом (4.7) имеем

$$D_{n,2}(f;z) = \frac{1}{4\pi^2(n+1)}\left|\int_{1/n}^{\pi}\frac{I(z;t)}{2\sin t/2}\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)tdt\right| \le$$

$$\le \frac{K\alpha_n(v)}{n+1}\int_{1/n}^{\pi}\omega(\rho_{1+t}(z))\left|\sum_{k=n}^{2n}\alpha_k(v)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right|dt \le \frac{K\alpha_n(v)}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt.$$

Вследствие (4.22) и (4.23) из (4.21) находим

$$D_n(f;z) \le K\alpha_n(v)\left[\omega(\rho_{1+1/n}(z)) + \int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right]. \quad (4.24)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt \ge \frac{1}{n}\omega(\rho_{1+1/n}(z))\int_{1/n}^{\pi}t^{-2}dt \ge \frac{\pi-1}{\pi}\omega(\rho_{1+1/n}(z)),$$

из (4.24) окончательно выводим

$$D_n(f;z) \le \frac{K\alpha_n(v)}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt.$$

4.2.2. Введем в рассмотрение следующие величины

$$\Omega_k(z)=\Omega_k(f;z)=\sup_{m\ge k}\frac{1}{m}\int\limits_{1/m}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\,,\quad k\in N\,,\quad z\in\Gamma\,,\quad (4.25)$$

$$G_n(f;z)=G_n(f;z;\alpha)=\left|\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\rho_k(f;z)\right|\,,\;n\in N\,.\qquad (4.26)$$

Ниже устанавливается поточечная оценка скорости сходимости ряда (4.26) в терминах величин $\Omega_k(z)$.

Теорема 4.4. *Пусть* Ω *– область типа* (C')*, последовательность* $\alpha=(\alpha_k(v))$*,* $v\in V$ *неотрицательна и не возрастает по индексу* k*. Тогда для любой функции* $f\in A_C(\overline{\Omega})$ *при всех* $n\in N$ *и* $z\in\Gamma$ *выполняется неравенство*

$$G_n(f;z)\le K\left\{n\alpha_n(v)\Omega_n(z)+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\Omega_k(z)\right\},\qquad (4.27)$$

где K*- положительная постоянная, независящая от* $z\in\Gamma$*,* $n\in N$*,* $v\in V$*,* $f\in A_C(\overline{\Omega})$ *и последовательности* α*.*

Доказательство. Заметим, что при каждом фиксированном $z\in\Gamma$ величина $\Omega_k(z)$ не возрастает по $k\in N$. Используя неравенство (4.19), находим

$$G_n(f;z)=\left|\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1}\alpha_k(v)\rho_k(f;z)\right|\le\sum_{i=0}^{\infty}\left|\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1}\alpha_k(v)\rho_k(f;z)\right|\le$$

$$\le K\left\{\sum_{i=0}^{\infty}(2^i n)\frac{\alpha_{2^i n}(v)}{2^i n}\int\limits_{1/2^i n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\}=K\left\{\sum_{i=o}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)\int\limits_{1/2^i n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\}=$$

$$= K\left\{\alpha_n(v)\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + 2\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{2^i n}(v)2^{i-1}n\frac{1}{2^i n}\int_{1/2^i n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\} \le$$

$$\le K_1\left\{\alpha_n(v)\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\alpha_{2^i n}(v)\frac{1}{2^i n}\int_{1/2^i n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\}.$$

Учитывая определение величин $\Omega_k(z)$, получаем

$$G_n(f;z) \le \left\{\alpha_n(v)\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\alpha_{2^i n}(v)\frac{1}{2^i n}\int_{1/2^i n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\} =$$

$$= K\left\{\alpha_n(v)\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\alpha_2{}^i n(v)\Omega_{2^i n}(z)\right\} \le$$

$$\le K\left\{n\alpha_n(v)\sup_{m\ge n}\frac{1}{m}\int_{1/m}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\Omega_k(z)\right\}, \quad z\in\Gamma,$$

чем и завершается доказательство теоремы 4.4.

При $n=1$ из (4.27) вытекает оценка

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(v)\rho_k(f;z)\right| \le K\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(v)\Omega_k(z)\right\},\ \ z\in\Gamma,\ \ v\in V. \qquad (4.28)$$

Пусть выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(v) = 1 \quad \forall v\in V$$

и обозначим

$$U_\nu(f;z) = U_\nu(f;z;\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\nu) S_k(f;z).$$

Тогда в условиях теоремы 4.4, с учетом (4.28) получаем

$$\left| f(z) - U_\nu(f;z) \right| \le K \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\nu) \Omega_k(z) \right\}, \quad z \in \Gamma \ , \tag{4.29}$$

где K - величина, равномерно ограниченная по $z \in \Gamma$, $\nu \in V$ и $f \in A_C(\overline{\Omega})$.

§4.3. φ - сильная аппроксимация интегралов типа Коши в областях Фабера

В этом параграфе устанавливается скорость φ - сильной аппроксимации интегралов типа Коши суммами Фабера в областях, ограниченных замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми.

Интеграл типа Коши

$$Kf(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\varsigma)}{\zeta - z} d\zeta$$

определяется своей плотностью f и границей $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω. Если Ψ - функция, отображающая конформно и однолистно область $|w| > 1$ на дополнение Ω, то функция $f^*(w) = f(\Psi(w))$, как функция переменной $w(|w| = 1)$ учитывает как свойства самой функции $f(\cdot)$, так и особенности строения границы $\partial\Omega$. Поэтому аппроксимационные свойства интегралов типа Коши $Kf(z)$ также зависят от $f^*(\cdot)$. Этот факт отмечался и неоднократно использовался многими авторами, в частности, в монографиях В.К. Дзядыка [26], В.И. Смирнова и Н.А. Лебедева [99], П.К. Суетина [124] и др. Как правило, результаты по приближениям формулировались в терминах областей

Ω и самих функций $f(\cdot)$. Ниже используется подход, предложенный А.И. Степанцом [113] в задачах приближения интегралов типа Коши посредством алгебраических полиномов, построенных на базе полиномов Фабера с помощью фиксированных Λ- методов суммирования рядов Фабера. Этот подход состоит в том, что рассматриваемые классы функций определяются условиями, налагаемые на функции f^*, и оценки приближений функций $Kf(z)$ выражаются в явном виде через величины наилучших приближений обобщенных ψ - производных функций f^* при помощи тригонометрических полиномов.

4.3.1. В дальнейшем будем следовать обозначениям и определениям, принятым в [113]. Каждому интегралу типа Коши $K\varphi_*(z)$ с ограниченной плотностью $\varphi_*(z)$ поставим в соответствие ряд Фабера

$$K\varphi_*(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k F_k(z), \tag{4.30}$$

где

$$f_k = \widehat{(\varphi_* \circ \Psi)}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi_* \circ \Psi)(e^{it}) e^{-ikt} dt, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$(\varphi_* \circ \Psi)(e^{it}) = \varphi_*(\Psi(e^{it})).$$

Пусть $L_p(\Gamma)$, $1 \le p < \infty$, - пространство суммируемых функций φ_*, определенных на кривой Γ, с конечной нормой

$$\|\varphi_*\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |\varphi_*(\varsigma)|^p |d\zeta|\right)^{1/p},$$

где $|\Gamma|$- длина кривой Γ, $L_\infty(\Gamma)$ - пространство функций, существенно ограниченных на Γ, с нормой

$$\|\varphi_*\|_{L_\infty(\Gamma)} = ess\sup_{\varsigma\in\Gamma}|\varphi_*(\zeta)|.$$

Пусть, далее,

$$L_p(\Gamma,\Phi') = \left\{\varphi_* \in L_1 : \varphi_*(\Phi')^{1/p} \in L_p(\Gamma)\right\},$$

$$\|\varphi_*\|_{L_p(\Gamma,\Phi')} = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |\varphi_*(\zeta)|^p\, |\Phi'(\zeta)|\,|d\zeta|\Big)^{1/p},$$

$$L_\infty(\Gamma,\Phi') = L_\infty(\Gamma),$$

$$L_1(\Gamma,\Phi')_+ = \left\{\varphi_* \in L_1(\Gamma,\Phi') : S[\varphi_* \circ \Psi] = \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{\varphi_* \circ \Psi})(k)e^{ikt}\right\}$$

$$L_p(\Gamma,\Phi')_+ = L_1(\Gamma,\Phi')_+ \cap L_p(\Gamma,\varphi'),\ \ 1 < p \le \infty,$$

$$K_p(\Omega)_+ = \left\{K\varphi_*(z) : z \in \Omega : \varphi_* \in L_p(\Gamma,\Phi')_+\right\},$$

$L_1(\mathrm{T})_+$ - множество функций $f(e^{it})$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|\,dt < \infty$$

с рядом Фурье степенного типа

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt},$$

$C(\mathrm{T})$ - множество всех непрерывных на T функций f с нормой

$$\|f\|_{C(\mathrm{T})} = \max_t |f(e^{it})|.$$

Множество H_p функций f, каждая из которых является аналитической в круге D и удовлетворяет при заданном $p \in (0,\infty)$ условию

$$\|f\|_{\mathrm{H}p} = \sup_{0<\rho<1} (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{it}) \right|^p dt)^{1/p} < \infty ,$$

называется пространством Харди.

Через H_∞ обозначается множество ограниченных аналитических в круге функций с нормой $\|f\|_{\mathrm{H}_\infty} = \sup_{z\in D} |f(z)|$.

Множество функций f, аналитических в области D_∞ и таких, что $|f(\infty)| < \infty$, для которых функция $g(w) = f(w^{-1})$, принадлежит к H_p, $p \in (0,\infty)$, обозначается через $\mathrm{H}_p(D_\infty)$.

В соответствии с [113, с.261] обозначим через $\{\psi(k)\}$, $\psi(0)=1$, произвольную последовательность комплексных чисел. Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) \hat{f}(k) e^{ikt}$$

является рядом Фурье некоторой функции $g(t) \in L_1(\mathrm{T})_+$, то её называют ψ - интегралом функции f и обозначают $I^\psi f$. Множество ψ - интегралов всех функций $f \in L_1(T)_+$ обозначают через $L^\psi(T)_+$; если $\mathfrak{N} \subset L_1(T)_+$, то $L^\psi \mathfrak{N} (T)_+$ - множество ψ - интегралов всех функций из $\mathfrak{N} \in L_1(T)_+$. Если для данной функции F указана функция $f \in L_1(T)_+$ такая, что почти всюду на T выполняется равенство $F(e^{it}) = I^\psi f(e^{it})$, то f называют ψ-производной функции F, при этом пишут $f = D^\psi f = F^\psi$. Пусть, далее,

$$L_p^\psi(\mathrm{T})_+ = L^\psi L_p(\mathrm{T})_+ \cap L_p(\mathrm{T}),\ 1 \le p \le \infty ,$$

$$C^\psi(\mathrm{T})_+ = L^\psi(\mathrm{T})_+ \cap C(\mathrm{T}) ,$$

$$L_p^\psi(\Gamma,\Phi')_+ = \left\{ f \in L_p(\Gamma,\Phi')_+ : \varphi_* \circ \Psi \in L_p^\psi(\mathrm{T})_+ \right\},\ 1 \le p \le \infty$$

$$K_p^{\psi}(\Omega)_+ = \left\{ K\varphi_*(z) : z \in \Omega : f \in L_p^{\psi}(\Gamma, \Phi')_+ \right\}.$$

Если $f = K\varphi_*$, то по определению полагаем

$$f(z[e^{it}]) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_*(\zeta[e^{it}])}{\zeta - z} d\zeta ,$$

$$f^{\psi}(z[e^{it}]) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_*^{\psi}(\zeta[e^{it}])}{\zeta - z} d\zeta ,$$

где $\varsigma[e^{it}] = \Psi(\Phi(\zeta)e^{it})$, $\zeta \in \Gamma$, $t \in R$.

Пусть $\mathfrak{M}$- множество выпуклых убывающих к нулю последовательностей чисел $\{\psi(k)\}$, $k = 1,2,...$ В дальнейшем, как и прежде, считаем, что последовательности $\psi(k) \in \mathfrak{M}$, являются сужениями на множестве N натуральных чисел некоторых положительных выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности функций $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t \geq 1$. Множество таких функций также обозначим через $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M}_0 = \{ \psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi;t) \leq K \quad \forall t \geq 1 \}$$

$$F = \{ \psi \in \mathfrak{M} : \eta'(\psi;t) \leq K < \infty \},$$

где $\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, $\mu(t) = \mu(\psi;t) = \dfrac{t}{\eta(t) - t'}$.

Объектами исследования являются группы отклонений

$$h_{n,r}^{(q)}(f;z) = \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \rho_{k_j}(f;z) \right|^q \right\}^{1/q}, \ q > 0, \tag{4.31}$$

$$n \leq k_1 < ... < k_r \leq \eta(n) = \eta(\psi_1; n);$$

$$\mathrm{H}_{n,\varphi}(f;z)=\gamma_n^{-1}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}\varphi(|\rho_k(f;z)|),\ \gamma_n=[\eta(n)]-n+1, \tag{4.32}$$

$[\alpha]$ - целая часть числа α, $z\in\Omega$, а также α - средние φ - отклонений

$$\mathrm{H}_{\nu,\varphi}^{(n)}(f;z;\alpha)=\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\varphi(|\rho_k(f;z)|),\ \ z\in\Omega, \tag{4.33}$$

где

$$\rho_n(f;z)=f(z)-S_{n-1}(f;z)=f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}f_kF_k(z),$$

$\varphi(u)$ - непрерывная неотрицательная на $[0,+\infty)$ функция, $\alpha=(\alpha_k(\nu))$, $k\in N$, $\nu\in V$, - последовательность неотрицательных функций, заданных на некотором множестве V.

Вопросы, связанные с аппроксимационными свойствами величин (4.32), (4.33) на классах $K_{\infty}^{\psi}(\Omega)_+$ редуцируются к аналогичным вопросам на единичной окружности величин

$$\mathrm{H}_{n,\varphi}(f;e^{i\theta})=\gamma_n^{-1}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}\varphi(|\rho_k(f;e^{i\theta})|), \tag{4.34}$$

$$\mathrm{H}_{\nu,\varphi}^{(n)}(f;e^{i\theta};\alpha)=\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(\nu)\varphi(|\rho_k(f;e^{i\theta})|), \tag{4.35}$$

$$\rho_n(f;e^{i\theta})=f(e^{i\theta})-\sum_{k=0}^{n-1}\hat{f}(k)e^{ik\theta}.$$

Данное замечание основывается на следующем утверждении.

Предложение A([113,с. 266]). *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, $f \in K_p^{\psi}(\Omega)_+$, $1 \le p < \infty$, *и кривая* Γ *такова, что* $\Psi' \in \mathrm{H}_q(D_\infty)$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, *где* $\mathrm{H}_q(D_\infty)$ *- пространство Харди. Тогда*

$$\forall z \in \Omega \quad f(z[\cdot]) \in C^{\psi}(T)_+,$$

причем $(f(z[\cdot]))^{\psi} = f^{\psi}(z[\cdot])$.

Это предложение позволяет сводить изучение величин (4.32), (4.33) на классах $K_p^{\psi}(\Omega)_+$ к изучению величин (4.34), (4.35) на классах $C^{\psi}(T)_+$.

Действительно, пусть $f \in K_p^{\psi}(\Omega)_+$ и $S_n(z)$ - некоторый алгебраический многочлен. Тогда $f(z[\cdot]) \in C^{\psi}(T)_+$. Рассмотрим ряд

$$g_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi(\left|f(z[e^{it}]) - S_{k-1}(z[e^{it}])\right|),$$

где $S_n(z[\cdot])$ - тригонометрический многочлен и предположим, что он равномерно сходится относительно t. В этом случае, как известно,

$$\lim_{t\to 0} g_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi(\left|f(z) - S_{k-1}(z)\right|),$$

и, значит,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi(\left|f(z) - S_{k-1}(z)\right|) \le \max_t g_n(t), \quad z \in \Omega, \ v \in V.$$

Положим, далее,

$$E_n(f^{\psi}(z[\cdot]))_{C(T)} = \inf_{T_{n-1,z} \in \mathfrak{I}_{n-1}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_*^{\psi}(\zeta[\cdot])}{\zeta - z} d\zeta - T_{n-1,z}(\cdot) \right\|_{C(T)}, \quad (4.36)$$

$z \in \Omega$, $\Im_{n-1}$ –множество функций вида

$$T_{n-1,z} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(z) e^{ikt} ,$$

$$E_n(\varphi_*)_\infty = \inf_{\tau_k} \left\| (\varphi_* \circ \Psi)(\cdot) - \sum_{|k| \le n-1} \tau_k(\cdot) e_k \right\|_\infty ,$$

где τ_k - произвольные числа, $e_k(w) = w^k$, т.е. $E_n(\varphi)_\infty$ - величина наилучшего приближения функции $\varphi \circ \Psi(\cdot)$ тригонометрическими многочленами порядка $n-1$ в пространстве $L_\infty(T)$ существенно ограниченных на T функций с нормой

$$\|\varphi\|_\infty = ess \sup_t |\varphi(e^{it})|.$$

Область $\Omega \underset{\neq}{\subset} C$ называется областью Фабера, если оператор Фабера

$$T_\Omega(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \Psi'(e^{it}) e^{it} / (\Psi(e^{it}) - z) dt ,$$

определенный в пространстве H_∞ ограниченных аналитических в круге D функций f, является ограниченным. Как показано в [113, с. 294], [121] в области Фабера для любого $z \in \Omega$ справедливо неравенство

$$E_n(h(z[\cdot]))_{C(T)} \le K E_n(\varphi_*)_\infty \quad \forall n \in N \tag{4.37}$$

при условии, что $h = K\varphi_* \in K_\infty(\Omega)_+$.

4.3.2. Перейдем к рассмотрению свойств величин (4.34), (4.35) на классах $C^\psi(T)_+$. Сначала докажем одно вспомогательное утверждение, которое представляет, по-видимому, и самостоятельный интерес.

Лемма 4.1. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и, кроме, того, выполняются условия*

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\psi_1;t) - t}{\eta(\psi_2;t) - t} \le K < \infty \quad \forall t \ge 1. \tag{4.38}$$

Пусть, далее, $n, r, k_j \in N$, $j = 1,2,...,r$;

$n \le k_1 < k_2 < ... < k_r \le \eta(n) = \eta(\psi_1; n)$.

Тогда $\forall f \in C^{\psi}(T)_+$, $\forall q > 0$ *и* $\forall e^{i\theta}$

$$h_{n,r}^{(q)}(f; e^{i\theta}) \overset{df}{=} \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \rho_{k_j}(f; e^{i\theta}) \right|^q \right\}^{1/q} \le \left(\frac{1}{\pi} \ln^+ \frac{\eta(n) - n}{r} + K_q \right) |\psi(n)| E_n(f^{\psi})_{C(T)}, \tag{4.39}$$

где $K_q = K(q) = K + \left(\frac{q-1}{\pi} \right)^{\frac{q-1}{q}}$, $q \ge 2$, $\ln^+ x = \max\{0, \ln x\}$, K *- абсолютная положительная константа,* $|\psi(n)| = \left(\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n) \right)^{1/2}$

.

Доказательство. Если $\eta(\psi_1; n) < n + 1$, то, очевидно,

$$h_{n,r}^{(q)}(f, e^{i\theta}) = \left| \rho_n(f; e^{i\theta}) \right|. \tag{4.40}$$

В этом случае (4.39) следует из (4.40) и неравенства (см., например, [113, с.290])

$$\left\| \rho_n(f; e^{i\theta}) \right\|_{C(T)} \le \left(\frac{1}{\pi} \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(f^{\psi})_{C(T)}, \tag{4.41}$$

$\eta(n) = \eta(\psi_1; n)$, $n \in N$.

Далее считаем $\eta(\psi_1; n) \ge n + 1$. Воспользуемся представлением ([113, с. 275, 282], [121])

$$\rho_k(f;e^{i\theta})=\frac{\psi(k)}{2\pi i}\int\limits_{a_k\le|t|\le\pi/2}\delta_n(f^{\psi};e^{i(\theta+t)})\frac{e^{-ikt}}{t}dt+O(1)|\psi(k)|\|\delta_n(f^{\psi})\|_{C(T)}\quad,\ (4.42)$$

где $\delta_n(f^{\psi};e^{i\tau})=f^{\psi}(e^{i\tau})-T_{n-1}(e^{i\tau})$, $a_n=(\eta(n)-n)^{-1}$.

В качестве полинома $T_{n-1}(\cdot)$ выбираем полином $T^*{}_{n-1}(\cdot)$, осуществляющий наилучшее приближение функции $f^{\psi}(\cdot)$. Не умаляя общности считаем $q\ge 2$. Положим

$$d_{k,n}(f^{\psi};e^{i\theta})=\begin{cases}(2\pi i)^{-1}\displaystyle\int\limits_{a_k\le|t|\le r^{-1}}(f^{\psi},e^{i(\theta+t)})\frac{e^{-ikt}}{t}dt, & a_k\ne r^{-1},\\ 0, & a_k=\mathrm{r}^{-1}.\end{cases}$$

Тогда

$$h_{n,r}^{(q)}(f;e^{i\theta})\le|\psi(n)|\left(\left\{r^{-1}\sum_{j=1}^{r}\left|(2\pi i)^{-1}\int\limits_{r^{-1}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}\delta_n(f^{\psi};e^{i(\theta+t)})\frac{e^{-ik_jt}}{t}dt\right|^q\right\}^{1/q}+\right.$$

$$\left.+\left\{r^{-1}\sum_{j=1}^{r}\left|d_{k_j,n}(f^{\psi};e^{i\theta})\right|^q\right\}^{1/q}\right)+O(1)|\psi(n)|E_n(f^{\psi})_{C(T)}\overset{def}{=}|\psi(n)|(U_{n,1}(f;e^{i\theta})+$$

$$+U_{n,2}(f;e^{i\theta}))+O(1)|\psi(n)|E_n(f^{\psi})_{C(T)}.\qquad(4.43)$$

Замечая, что

$$\left|d_{k_j,n}(f^{\psi};e^{i\theta})\right|\le\pi^{-1}E_n(f^{\psi})_{C(T)}\left|\ln\frac{\eta(k_j)-k_j}{r}\right|,$$

с учетом оценок (см., например [112, с. 377])

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(k)-k}{\eta(k')-k'} \le K_2 < \infty\,, \quad \forall k,k' \in [n,\eta(n)], \quad \forall n \in N\,, \tag{4.44}$$

находим

$$U_{n,2}(f^{\psi};e^{i\theta}) \le \pi^{-1}E_n(f^{\psi})_{C(T)}(K + \ln^{+}\frac{\eta(n)-n}{r})\,. \tag{4.45}$$

Пусть, далее,

$$\Delta_n(e^{i\theta};t) = \begin{cases} \delta_n(f^{\psi};e^{i(\theta+t)})t^{-1}, & r^{-1} \le |t| \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & [-\pi,\pi] \setminus \left\{ r^{-1} \le |t| \le \dfrac{\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

$c_k = c_k(\Delta_n)$ - коэффициенты Фурье функции $\Delta_n(\cdot)$ по системе $\{e^{ik\tau}\}$, $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ Тогда в силу теоремы Хаусдорфа-Юнга имеем

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^q\right)^{1/q} \le \left((2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_n(e^{i\theta};t)\right|^{q'}\right)^{1/q'} \le \pi^{-1/q'}E_n(f^{\psi})_{C(T)}\left(\int_{r^{-1}}^{\pi/2} t^{-q'}dt\right)^{1/q'} \le$$

$$\le \frac{E_n(f^{\psi})_{C(T)}\,r^{1-1/q'}}{\pi^{1/q'}(q'-1)^{1/q'}} = \left(\frac{q-1}{\pi}\right)^{(\frac{q-1}{q})} E_n(f^{\psi})_{C(T)}\,r^{1/q}\,, \tag{4.46}$$

$$1/q + 1/q' = 1\,.$$

Таким образом, с учетом (4.46) находим

$$U_{n,1}(f;e^{i\theta}) \le \left(\frac{q-1}{\pi}\right)^{\frac{(q-1)}{q}} E_n(f^{\psi})_{C(T)}\,,\; q \ge 2\,. \tag{4.47}$$

Принимая во внимание (4.47), (4.45) и (4.43) приходим к утверждению леммы.

Замечание. Поскольку равенство (4.42) выполняется также в случае**,** когда $a_n = (\eta(\psi_2;n)-n)^{-1}$**,** лемма 4.1 справедлива и тогда, когда $\eta(n)=\eta(\psi_2;n),\quad \gamma_n=[\eta(\psi_2;n)]-n+1$. Более того, как показано в [112, с. 378, 393], если $\psi_1,\psi_2\in F$ и выполнено условие (4.38), то $|\psi|\in F$ и найдутся такие константы K_1,K_2, что

$$0<K_1\le\frac{\eta(|\psi|;t)-t}{\eta(\psi_1;t)-t}\le K_2\ ,\quad \forall t\ge 1,$$

$$0<K_1\le\frac{\eta(|\psi|;t)-t}{\eta(\psi_2;t)-t}\le K_2\ ,\ \forall t\ge 1.$$

Отсюда следует, что (4.42) будет выполняться и тогда, когда $a_n=(\eta|\psi|;n)-1)^{-1}$. На этом основании приходим к выводу, что лемма 4.1 справедлива и тогда, когда $\eta(n)=\eta(|\psi|;n)$, $\gamma_n=[\eta(|\psi|;n)]-n+1$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть* $\psi=\psi_1+i\psi_2$, $\psi_1,\psi_2\in F$ *и, кроме того, выполняется условие (4.38). Тогда, если* $\varphi\in\Phi$, *то* $\forall f\in C^{\psi}(T)_+$ *и* $\forall e^{i\theta}$

$$\mathrm{H}_{n,\varphi}(f;e^{i\theta})\le K\varphi(|\psi(n)|E_n(f^{\psi})_{C(T)}),\qquad(4.48)$$

где $\eta(n)=\eta(\psi_1;n)$, $\gamma_n=[\eta(\psi_1;n)]-n+1$, $K=K(\varphi)$ *– постоянная, не зависящая от* $n\in N,e^{i\theta}$ *и* $f\in C^{\psi}(T)_+$.

Доказательство. Если $E_n(f^{\psi})_{C(T)}=0$, то $f(\cdot)=T_{n-1}(\cdot)$ и

$$S_k(T_{n-1};e^{i\theta}) = T_{n-1}(e^{i\theta}) \quad \forall k \geq n .$$

Тогда в силу определения множества Φ неравенство (4.48) становится очевидным.

Пусть $E_n(f^{\psi})_{C(T)} > 0$, $\beta_n = |\psi(n)|E_n(f^{\psi})_{C(T)}$. Если $\eta(\psi_1;n) < n+1$, то

$$\mathrm{H}_{n,\varphi}(f;e^{i\theta}) = \varphi(|\rho_n(f;e^{i\theta})|) .$$

Отсюда с учетом неравенства (4.41) и свойств функции $\varphi \in \Phi$ получаем

$$\mathrm{H}_{n,\varphi}(f;e^{i\theta}) \leq \varphi(K\beta_n) .$$

Выберем $p \in N$ так, чтобы $K < 2^p$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$, существует $n_0 \in N$ такое, что для любого $n > n_0$

$$\beta_n < \min\left\{2^{-p+1},(2ab)^{-1}\right\}.$$

Из определения множества Φ заключаем, что

$$\varphi(K\beta_n) \leq \varphi(2^p\beta_n) \leq a^p\varphi(\beta_n),\ \beta_n < 1,\ n > n_0 .$$

Откуда

$$\mathrm{H}_{n,\varphi}(f;e^{i\theta}) \leq a^p\varphi(\beta_n),\ \ n > n_0,\ \ a = a(\varphi) .$$

Если же $n \leq n_0$, то (4.48) достигается за счет соответствующего выбора константы.

Пусть $\eta(n) > n+1$, $n > n_0$, $\eta(n) = \eta(\psi_1;n)$ и положим

$$B_{n,\sigma}^{\theta} = \left\{k \in [n,\eta(n)] : (\sigma-1)\beta_n \leq \left|\rho_k(f;e^{i\theta})\right| \leq \sigma\beta_n\right\},\ \ \sigma \in N ,$$

$\mu_{n,\sigma}^{\theta}$ - количество всех элементов множества $B_{n,\sigma}^{\theta}$. Поскольку функция $\varphi(n)$ не убывает, то

$$\mathrm{H}_{n,\varphi}(f;e^{i\theta})=\gamma_n^{-1}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k\in B_{n,\sigma}^{\theta}}\varphi(\left|\rho_k(f;e^{i\theta})\right|)\le$$

$$\le\gamma_n^{-1}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi(\sigma\beta_n)\mu_{n,\sigma}^{\theta},\ \ \gamma_n=[\eta(n)]-n+1, \qquad (4.49)$$

где предполагается, что если при некотором $\sigma\in N$ $B_{n,\sigma}^{\theta}=\{\emptyset\}$, то $\sum\limits_{B_{n,\sigma}^{\theta}}=0$. Пусть $\mu_{n,\sigma}^{\theta}\ge 1$, k_j - все элементы множества $B_{n,\sigma}^{\theta}$. Тогда, используя неравенство (4.39) леммы 4.1, в котором $r=\mu_{n,\sigma}^{\theta}$, $q=1$, получаем

$$\mu_{n,\sigma}^{\theta}\le\gamma_n e^{1-\sigma/C}, \qquad (4.50)$$

где C- константа при величине

$$\ln^{+}\frac{\eta(n)-n}{r}\left|\psi(n)\right|E_n(f^{\psi})_{C(T)}$$

в соотношении (4.39).

Вследствие неравенства (2.69) и соотношений (4.49), (4.50) приходим к утверждению теоремы.

Следующее утверждение содержит оценку величины $\mathrm{H}_{v,\varphi}^{(n)}(f;e^{i\theta};\alpha)$, определяемой равенством (4.35).

Теорема 4.6. *Пусть* $\psi=\psi_1+i\psi_2$, $\psi_1,\psi_2\in F$ *и выполняются условия (4.38). Тогда, если* $\varphi\in\Phi$ *и последовательность* $\alpha=\alpha_k(v)\ge 0$, $v\in V$, *такова, что для любого* $v\in V$ *числа* $\alpha_k(v)\left|\psi(k)\right|$ *не возрастают, то* $\forall f\in C^{\psi}(T)_{+}$ $\forall e^{i\theta}$ *и* $\forall v\in V$

$$\mathrm{H}_{v,\varphi}^{(n)}(f;e^{i\theta};\alpha)\le K\{\alpha_n(v)(\eta(n)-n)\varphi(\left|\psi(n)\right|E_n(f^{\psi})_{C(T)})+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(v)\varphi(|\psi(k)|E_n(f^{\psi}))\Bigg\},\qquad (4.51)$$

где $K=K(\varphi)$ *– постоянная, не зависящая от* $n\in N$, $v\in V$, $e^{i\theta}$ *и* $f\in C^{\psi}(T)_+$, $\eta(t)=\eta(|\psi|;t)$.

Доказательство. Положим $n_0=n$,

$$n_j=\begin{cases}[\eta(n_{j-1})], & n_{j-1}<[\eta(n_{j-1})];\\ [\eta(n_{j-1})]+1, & n_{j-1}=[\eta(n_{j-1})],\end{cases}$$

$$j\in N,\ \ \eta(t)=\eta(|\psi|;t),\ \ \gamma_{n_j}=[\eta(n_j)]-n_j+1\overset{df}{=}\Delta_j(|\psi|).$$

Известно (см., например, [112, с. 393]), что

$$\frac{\Delta_j(\overline{\psi})}{\Delta_{j-1}(\overline{\psi})}\le K_*<\infty,\ \ j=1,2,\ldots\qquad (4.52)$$

Обозначим

$$I=\Big\{j\in N:\Delta_j(|\psi|)\le 2K_*\Big\},$$

$$I_*=\Big\{j\in N:\Delta_j(|\psi|)>2K_*\Big\},$$

$$J_{n_j}(f;e^{i\theta})=\sum_{k=n_l}^{[\eta(n_j)]}\alpha_k(v)\varphi(|\rho_k(f;e^{i\theta})|).$$

В принятых обозначениях $\forall v\in V$, $\forall e^{i\theta}$

$$\mathrm{H}_{v,\varphi}^{(n)}(f;e^{i\theta};\alpha)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=n_j}^{[\eta(n_j)]}\alpha_k(v)\varphi(|\rho_k(f;e^{i\theta})|)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}J_{n_j}(f;e^{i\theta})=\sum_{j\in I}J_{n_j}(f;e^{i\theta})+\sum_{j\in I_*}J_{n_j}(f;e^{i\theta}).\qquad (4.53)$$

Если $j \in I$, то в силу того, что ([112, с. 377])

$$\eta(k) - k \le K(\eta(n_j) - n_j) \ \ \forall k \in [n_j, \eta(n_j)] \quad (|\psi| \in F)$$

находим

$$\eta(k) - k < K([\eta(n_j)] - n_j + 1) = K\Delta_j(|\psi|) \le 2K_* K \overset{df}{=} K_1,$$

т.е. $\eta(k) - k < K_1$. В этом случае, вследствие неравенства (4.41) и свойств функции $\varphi \in \Phi$, получаем

$$\varphi(|\rho_k(f;e^{i\theta})|) \le \varphi(K_2|\psi(k)|E_k(f^\psi)_{C(T)}) \le$$

$$\le K_3\varphi(|\psi(k)|E_k(f^\psi)C(T)).$$

Откуда

$$J_{n_j}(f;e^{i\theta}) \le K_4 \sum_{k=n_j}^{[\eta(n_j)]} \alpha_k(v)\varphi(|\psi(k)|E_k(f^\psi)_{C(T)}), \ \ \forall j \in I.$$

Таким образом

$$\sum_{j\in I} J_{n_j}(f;e^{i\theta}) \le K_4 \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi(|\psi(k)|E_k(f^\psi)_{C(T)}). \tag{4.54}$$

Пусть $j \in I_*$. Тогда с учетом (4.52) будем иметь

$$2K_* < \Delta_j(|\psi|) \le K_*\Delta_{j-1}(|\psi|).$$

Отсюда $\Delta_{j-1}(|\psi|) > 2$, т.е. $[\eta(n_{j-1})] - n_{j-1} + 1 > 2$, $[\eta(n_{j-1})] > n_{j-1} + 1 > n_{j-1} \quad (n_j = [\eta(n_{j-1})])$. Поэтому

$$n_{j-1} + 1 < n_j \le \eta(n_{j-1}). \tag{4.55}$$

Далее, поскольку числа $\alpha_k(v)|\psi(k)|$ не возрастают, то $\forall k \in [n_j, [\eta(n_j)]]$ и $\forall v \in V$

$$\alpha_k(v)=\frac{\alpha_k(v)|\psi(k)|}{|\psi(k)|}\le\frac{\alpha_{n_j}(v)|\psi(n_j)|}{|\psi(\eta(n_j))|}=\frac{2\alpha_{n_j}(v)|\psi(\eta(n_j))|}{|\psi(\eta(n_j))|}=2\alpha_{n_j}(v). \qquad (4.56)$$

Согласно неравенству (4.48), с учетом (4.56) получаем

$$J_{n_j}(f;e^{i\theta})\le 2\alpha_{n_j}(v)\sum_{k=n_j}^{[\eta(n_j)]}\varphi(|\rho_k(f;e^{i\theta})|)\le$$

$$\le K\alpha_{n_j}(v)\Delta_j(|\psi|)\varphi(|\psi(n_j)|E_{n_j}(f^{\psi})_{C(T)}). \qquad (4.57)$$

Принимая во внимание (4.52), из (4.57) следует

$$J_{n_j}(f;e^{i\theta})\le K_1\alpha_{n_j}(v)\Delta_{j-1}(|\psi|)\varphi(|\psi(n)|E_{n_j}(f^{\psi})_{C(T)})\le$$

$$\le K_2\alpha_{n_j}(v)\sum_{k=n_{j-1}}^{[\eta(n_{j-1})]}\varphi(|\psi(k)|E_k(f^{\psi})_{C(T)}). \qquad (4.58)$$

Далее $\forall k\in[n_{j-1},[\eta(n_{j-1})]]\quad \forall v\in V$

$$\alpha_{n_j}(v)\le\frac{\alpha_k(v)|\psi(k)|}{|\psi(n_j)|}\le\frac{\alpha_k(v)|\psi(n_{j-1})|}{|\psi(\eta(n_{j-1}))|}=$$

$$=\frac{2\alpha_k(v)|\psi(\eta(n_{j-1}))|}{|\psi(\eta(n_{j-1}))|}=2\alpha_k(v). \qquad (4.59)$$

Из (4.58) в силу (4.59) вытекает неравенство

$$J_{n_j}(f;e^{i\theta})\le K_3\sum_{k=n_{j-1}}^{[\eta(n_{j-1})]}\alpha_k(v)\varphi(|\psi(k)|E_k(f^{\psi})_{C(T)}). \qquad (4.60)$$

Если в сумме $\sum\limits_{j\in I_*}$ содержится слагаемое с индексом $j=0$, то, выделяя его отдельно, из (4.60) получаем

$$\sum_{j\in I_*} J_{nj}(f;e^{i\theta}) \le K_4 \Big\{\alpha_n(v)(\eta(n)-n)\varphi(|\psi(n)|E_n(f^\psi)_{C(T)})+$$

$$+\sum_{j\in I_*\setminus\{0\}} \sum_{k=n_{j-1}}^{[\eta(n_{j-1})]} \alpha_k(v)\varphi(|\psi(k)|E_k(f^\psi)_{C(T)})\Big\} =$$

$$= K_4 \Big\{\alpha_n(v)(\eta(n)-n)\varphi(|\psi(n)|E_n(f^\psi)_{C(T)})+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi(|\psi(k)|E_k(f^\psi)_{C(T)})\Big\}. \tag{4.61}$$

Объединяя оценки (4.61), (4.54) и (4.55) приходим к требуемому соотношению (4.51).

Из полученных выше результатов с учетом предложения А и неравенства (4.51) непосредственно следуют такие утверждения.

Лемма 4.2. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и выполняются условия (4.38). Пусть, далее,* $n, r, k_j \in N$, $j = 1,\dots,r$,

$$n \le k_1 < k_2 < \dots < k_r \le \eta(n) = \eta(\psi_1; n).$$

Тогда, если $\Omega \underset{\neq}{\subset} \mathbb{C}$ *- область Фабера, то* $\forall f \in K_\infty^\psi(\Omega)_+$ $(f = K\varphi_*)$, $\forall q > 0$

$$\sup_{z\in\Omega} h_{n,r}^{(q)}(f;z) \le \left(\frac{1}{\pi}\ln^+\frac{\eta(n)-n}{r} + K(q)\right)|\psi(n)|E_n(\varphi_*)_\infty. \tag{4.62}$$

Теорема 4.7. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$, $\varphi \in \Phi$ *и выполняются условия (4.38). Тогда, если* $\Omega \underset{\neq}{\subset} \mathbb{C}$ *- область Фабера, то* $\forall f \in K_\infty^\psi(\Omega)_+$ $(f = K\varphi_*)$, $\forall n \in N$

$$\sup_{z\in\Omega} \mathrm{H}_{n,\varphi}(f;z) \le K\varphi(|\psi(n)|E_n(\varphi_*)_\infty), \tag{4.63}$$

$K = K(\varphi)$ - *постоянная, не зависящая от* $n \in N$, $z \in \Omega$ *и* $f \in K_\infty^\psi(\Omega)_+$.

Теорема 4.8. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и выполняются условия (4.38). Тогда, если* $\varphi \in \Phi$, $\alpha = (\alpha_k(v) \geq 0)$, $v \in V$, *такова, что для любого* $v \in V$ *числа* $\alpha_k(v)|\psi(k)|$ *не возрастают,* $\Omega \underset{\neq}{\subset} \mathbb{C}$ *- область Фабера, то* $\forall f \in K_\infty^\psi(\Omega)_+$ $(f = K\varphi_*)$ *и* $\forall n \in N$

$$\sup_{z\in\Omega} \mathrm{H}_{v,\varphi}^{(n)}(f;z;\alpha) \leq K\{\alpha_n(v)(\eta(n)-n)\varphi(|\psi(n)|E_n(\varphi_*)_\infty) +$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi(|\psi(k)|E_k(\varphi_*)_\infty)\Big\}, \quad \eta(t) = \eta(|\psi|;t), \tag{4.64}$$

где $K = K(\varphi)$ – *постоянная, не зависящая от* $n \in N$, $v \in V$, $f \in K_\infty^\psi(\Omega)_+$, *и от последовательности* α.

Полагая в (4.64) $n = 1$, в условиях теоремы 4.7 будем иметь

$$\sup_{z\in\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi(\rho_k(f;z)) \leq K\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi(|\psi(k)|E_k(\varphi_*)_\infty)\right\}. \tag{4.65}$$

В частности, если $V \overset{df}{=} N$ и

$$\alpha_k(v) = \alpha_k(n) = \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} n^{-1}, & 1 \leq k \leq n; \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

то в условиях теоремы 4.7 имеем

$$\sup_{z\in\Omega} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(|\rho_k(f;z)|) \leq K\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(|\psi(k)|E_k(\varphi_*)_\infty)\right\}, K = K(\varphi).$$

Используя представление ([см., например, 113, с. 273])

$$\rho_k(f;e^{i\theta}) = -\psi(n)S_{n-1}(f^\psi - T_{n-1};e^{i\theta}) + \mathrm{O}(1)|\psi(n)|\|f^\psi - T_{n-1}\|_{C(T)},$$

где $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, $f \in C^{\psi}(T)_+$ и методы доказательств предыдущих результатов приходим к такому утверждению.

Теорема 4.9. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, $\varphi \in \Phi$, *и последовательность* $\alpha = (\alpha_k(v) \geq 0)$, $k \in N$, $v \in V$, *такова, что* $\alpha_k(v)|\psi(k)|$ *не возрастают. Тогда, если* $\Omega \underset{\neq}{\subset} C$ *- область Фабера, то* $\forall f \in K_\infty^{\psi}(\Omega)_+$ $(f = K\varphi_*)$, $\forall n \in N$ *и* $\forall v \in V$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{z\in\Omega} \mathrm{H}_{v,\varphi}^{(n)}(f;z;\alpha) \leq K\{\alpha_n(v)n\varphi(|\psi(n)|E_n(\varphi_*)_\infty) +$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\varphi(|\psi(k)|E_k(\varphi_*)_\infty)\}, \tag{4.66}$$

$K = K(\varphi)$ *– постоянная, не зависящая от* $n \in N$, $v \in V$ *и* $f \in K_\infty^{\psi}(\Omega)_+$.

§4.4. Суммы Валле-Пуссена в пространствах Харди

Данный параграф содержит ряд утверждений, установленных В.В. Савчуком, М.В. Савчук [96] относительно аппроксиамционных свойств сумм Валле-Пуссена функций из пространства Харди, связанных с теорией сильной суммируемости кратных рядов Тейлора.

4.4.1. Пусть m - произвольное натуральное число $\mathbb{C}^m$, Z_+^m – множество всех упорядоченных наборов $\mathrm{z} = (z_1, ..., z_m)$ соответственно m комплексных и целых неотрицательных чисел, $D^m = \{\mathrm{z} \in \mathbb{C}^m : \max|z_i| < 1\}$ – единичный поликруг и $T^m = \{\mathrm{z} \in C^m : |z_j| = 1,\ j = 1,...,m\}$ – граница поликруга D^m.

Предположим, что $f(\mathbf{z}) = f(z_1, ..., z_m)$ – комплекснозначная функция, определенная в D^m, дифференцируемая как функция $2m$

действительных переменных $x_1, y_1; ...; x_m, y_m$, где $z_j = x_j + y_j$ $(j = 1,...,m)$. Положим по определению

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

Функция $f = f(\mathrm{z})$ называется голоморфной в D^m, если $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 0$ $(j = 1,...,m)$ в каждой точке D^m.

Обозначим $Hol(D^m)$ множество всех функций, голоморфных в D^m, а через $H_1(D^m)$ – пространство Харди, которое состоит из всех функций $f(\mathrm{z}) \in Hol(D^m)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_1 \overset{df}{=} \sup_{0<\rho<1} \int_{T^m} |f(\rho\mathrm{w})| d\sigma(\mathrm{w}) < \infty$$

где $\rho\mathrm{w} \overset{df}{=} (\rho w_1,...,\rho w_m)$ и $\sigma \overset{df}{=} \sigma_m$ – нормированная мера Лебега на $T^m \left(\sigma(T^m) = 1\right)$. Пусть функция $f \in Hol(D^m)$ и

$$\sum_{\mathrm{k}\in Z_+^m} \widehat{f}(\mathrm{k})\mathrm{z}^k, \quad \mathrm{z}^{\mathrm{k}} \overset{df}{=} z_1^{k_1}...z_m^{k_m} \tag{4.67}$$

– её кратный ряд Тейлора.

Обозначим через $S_n^{\Delta}(f)$, $V_{n,p}^{\Delta}(f)$, $0 \le p \le n$ и $\sigma_n^{\Delta}(f)$ соответственно треугольные частные сумы, суммы Валле-Пуссена и суммы Фейера порядка *n*, $n \in Z_+^1$, ряда (4.67), т.е.

$$S_n^{\Delta}(f)(\mathrm{z}) \overset{df}{=} \sum_{|\mathrm{k}|\le n} \widehat{f}(\mathrm{k})\mathrm{z}^{\mathrm{k}} = \sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(f)(\mathrm{z}),$$

где

$$F_v\left(f\right)\!\left(\mathrm{z}\right)\overset{df}{=}\sum_{\left|\mathrm{k}\right|=n}\widehat{f}\left(\mathrm{k}\right)\mathrm{z}^{\mathrm{k}}\ ,\ \left|\mathrm{k}\right|\overset{df}{=}k_1+\ldots+k_m\,,$$

$$V_{n,p}^{\Delta}\left(f\right)\!\left(z\right)\overset{df}{=}\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}S_k^{\Delta}\left(f\right)\!\left(\mathrm{z}\right)=\sum_{k=0}^{n-p}F_k\left(f\right)\!\left(\mathrm{z}\right)+\sum_{k=n-p+1}^{n}\left(1-\frac{k-n+p}{p+1}\right)F_k\left(f\right)\!\left(\mathrm{z}\right),$$

$$\sigma_n^{\Delta}\left(f\right)\!\left(\mathrm{z}\right)\overset{df}{=}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k^{\Delta}\left(f\right)\!\left(\mathrm{z}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)F_k\left(f\right)\!\left(\mathrm{z}\right).$$

Ясно, что $V_{n,0}^{\Delta}\left(f\right)=S_n^{\Delta}\left(f\right)$, $V_{n,n}^{\Delta}\left(f\right)=\sigma_n^{\Delta}\left(f\right)$.

В одномерном случае символ Δ употребляться не будет.

Пусть $0\le p\le n$, $n\in Z_+^1$. Положим

$$A_{n,p}\overset{df}{=}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k+1}\,,$$

$$R_{n,p}^{\Delta}\left(f\right)\overset{df}{=}\frac{1}{A_{n,p}}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k+1}V_{k,p}^{\Delta}\left(f\right).$$

Из результатов работы [94] и известных соотношений для сумм Валле-Пуссена функций одной переменой следует, что для любого $m\in N$ и $p(n)=o(n)$, $n\to\infty$,

$$\left\|V_{n,p(n)}^{\Delta}\right\|_1\overset{df}{=}\sup_{f\in H_1\left(D^m\right)}\frac{\left\|V_{n,p}^{\Delta}\left(f\right)\right\|_1}{\left\|f\right\|_1}=\frac{1}{\pi}\ln\frac{n+1}{p(n)+1}+O(1),\quad n\to\infty,$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n. Отсюда легко получить соотношение

$$\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|V_{k,p}^{\Delta}\left(f\right)\right\|_1=O\!\left(\ln^2\frac{n+1}{p+1}\right),\quad \forall n>p\ge 0.$$

Ниже показывается, что показатель степени 2 может быть отброшен. Более того показывается, что такая оценка является характеристической для пространства Харди.

Теорема 4.10. *Пусть* $m \in N$ *и* $f(\mathrm{z}) \in Hol(D^m)$. *Следующие утверждения равносильны*

1) $f \in H_1$,

2) $\sup\limits_{p \in Z_+^1} \sup\limits_{n \ge p} \frac{1}{A_{n,p}} \sum\limits_{k=p}^{n} \frac{1}{k+1} \left\| V_{k,p}^{\Delta}(f) \right\|_1 < \infty$,

(4.68)

3) Для некоторо $p \in Z_+^1$ $\sup\limits_{n \ge p} \left\| R_{n,p}^{\Delta}(f) \right\|_1 < \infty$. (4.69)

Замечание. В доказательстве импликации 1) $\Rightarrow$2) будет показано, что существует константа С такая, что $\forall f \in H_1(D^m)$, $m \in N$,

$$\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k+1} \left\| V_{k,p}^{\Delta}(f) \right\|_1 \le C \|f\|_1 \begin{cases} \ln \frac{n+2}{p+1}, n > p \ge 0 \\ \frac{1}{p+1}, n = p \end{cases} . \tag{4.70}$$

Пусть $L_1(T^m)$ – пространство суммируемых на T^m функций $f = f(\mathrm{z})$ с нормой

$$\|f\|_{L_1} = \int_{T^m} |f| d\sigma$$

и

$$H_1(T^m) \overset{df}{=} \left\{ f \in L_1(T^m) : \int_{T^m} f(\mathrm{w}) \mathrm{w}^{-\mathrm{k}} d\sigma(\mathrm{w}) = 0 \ \ \forall \mathrm{k} \notin Z_+^m \right\}.$$

Исходя из теоремы 4.10 будет установлено утверждение, которое является интересным с точки зрения суммируемости рядов Тейлора.

Теорема 4.11. Пусть $m \in N$, $f \in H_1(D^m)$ *и* $0 \le p(n) \le n$. *Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{A_{n,p(n)}} \sum_{k=p(n)}^{n} \frac{1}{k+1} \left\| f - V_{k,p(n)}^{\Delta}(f) \right\|_1 = 0 . \tag{4.71}$$

и, вследствие последнего,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{A_{n,p(n)}}\sum_{k=p(n)}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|V^{\Delta}_{k,p(n)}(f)\right\|_1=\|f\|_1. \qquad (4.72)$$

Следствие 4.2. *Пусть* $m\in N$, $f\in H_1(D^m)$ *и* $p=p(n)$, $n\in N$ *– последовательность целых чисел таких, что* $0\le p(n)\le n$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-R_{n,p(n)}(f)\right\|_1=0.$$

Действительно,

$$\left\|f-R_{n,p(n)}(f)\right\|_1=\left\|\frac{1}{A_{n,p(n)}}\sum_{k=p(n)}^{n}\frac{1}{k+1}\left(f-V^{\Delta}_{k,p(n)}(f)\right)\right\|\le$$

$$\le\frac{1}{A_{n,p(n)}}\sum_{k=p(n)}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|f-V^{\Delta}_{k,p(n)}(f)\right\|_1.$$

Следствие 4.3. *Пусть* $m\in N$ *и* $f\in H_1(D^m)$. *Тогда*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\|f-S^{\Delta}_{n}(f)\right\|_1=0. \qquad (4.73)$$

В самом деле, пологая в теореме 2 $p(n)=0$, $n\in N$, получаем соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{A_{n,0}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|f-S^{\Delta}_{k}(f)\right\|_1=0\quad\forall f\in H_1, \qquad (4.74)$$

откуда и следует (4.73).

Соотношения (4.70) и (4.74) в случае, когда $m=1$, $p=0$ можно найти в [102]. Эти же соотношения содержатся как частный случай в основных результатах работ [7, 8]. Теоремы 4.10, 4.11 и их следствия для частичных сумм S_k в одномерном случае – это результаты работы Pavlovic M.A. (publ. L'Institut Mathem. Nouvelleserie. – 1995. – 58 (72). – p. 149-152).

В случае $m=2$, $p=0$ аналогом (4.70) является соотношение установленное в [142]: для данного $\alpha>0$ существует константа C_α, зависящая только от α и такая, что $\forall f\in H_1$

$$\sum_{(k,l)\in\Gamma_\alpha}\frac{\left\|S_{k,l}(f)\right\|_1}{kl}\le C_\alpha\|f\|_1\ln n\cdot\ln m,\quad \forall n,m\ge 2, \tag{4.75}$$

где $S_{k,l}(f)(\mathrm{z})\overset{df}{=}\sum_{\nu_1=0}^{k}\sum_{\nu_2=0}^{l}\widehat{f}(\nu_1,\nu_2)z_1^{\nu_1}z_2^{\nu_2}$ – прямоугольная частичная сумма ряда (4.67) и $\Gamma_\alpha\overset{df}{=}\left\{(k,l)\in Z_+^2: k\le n, l\le m, 2^{-\alpha}\le k/l\le 2^{\alpha}\right\}$.

Соотношение (4.75) в общем случае, когда $m\ge 2$ для квадратных частичных сумм

$$S_n(f)(\mathrm{z})=\sum_{|\mathrm{k}|_\infty\le n}\widehat{f}(\mathrm{k})\mathrm{z}^{\mathrm{k}},$$

где $|k|_\infty=\max(k_1,...,k_m)$, $n\in N$, следует из результатов работы [9].

4.4.2. Для доказательства теоремы (4.10) понадобится такая лемма.

Лемма. *Пусть* $p\in Z_+^1$. *Тогда* $\forall\rho\in(0,1)$

$$\mathrm{I}_p(\rho)\overset{df}{=}\frac{1}{p+1}\int_{T_1}\frac{\left|1-(\rho w)^{p+1}\right|}{|1-\rho w|^2}d\sigma(w)<\frac{1}{\rho^{p+1}}\cdot\ln\frac{1+\rho^{p+1}}{1-\rho^{p+1}}.$$

Доказательство. Хорошо известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x^k\quad \forall x\in D^1, \tag{4.76}$$

где

$$\alpha_k\overset{df}{=}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},\ k\in N.$$

С помощью тождества

$$\frac{\sqrt{1-x^{p+1}}}{1-x}=\frac{1-x^{p+1}}{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^{p+1}}}$$

и равенства (4.76) получим разложение

$$\frac{\sqrt{1-x^{p+1}}}{1-x}=\frac{1-x^{p+1}}{1-x}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x^{(p+1)k}\right)=\frac{1-x^{p+1}}{1-x}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{1-x^{p+1}}{1-x}x^{(p+1)k}=$$

$$=\sum_{v=0}^{p}x^{v}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sum_{v=(p+1)k}^{(p+1)k+p}x^{v},\ \forall x\in D^1.$$

Используя равенство Парсеваля, получаем

$$(p+1)\mathrm{I}_p(Q)=\int_{T^1}\frac{\sqrt{1-\rho^{p+1}w^{p+1}}}{1-\rho w}\cdot\frac{\sqrt{1-\rho^{p+1}\overline{w}^{\,p+1}}}{1-\rho\overline{w}}d\sigma(w)=$$

$$=\sum_{v=0}^{p}p^{2v}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\sum_{v=(p+1)k}^{(p+1)k+p}\rho^{2v}=\frac{1-\rho^2(p+1)}{1-\rho^2}\times$$

$$\times\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\rho^{2(p+1)k}\right)=\frac{1-\rho^{2(p+1)}}{1-\rho^2}\mathrm{I}_0\left(\rho^{p+1}\right).$$

Оценка интеграла $\mathrm{I}_0\left(\rho^{p+1}\right)$ хорошо известна (см., например, [124, с.219]):

$$\mathrm{I}_0\left(\rho^{p+1}\right)<\frac{1}{\rho^{p+1}}\ln\frac{1+\rho^{p+1}}{1-\rho^{p+1}}.$$

Очевидно также, что

$$\frac{1-\rho^{2(p+1)}}{1-\rho^2}=\left(1+\rho^2+\ldots+\rho^{2p}\right)<p+1.$$

Эти соотношения в сочетании с установленными выше приводят к утверждению леммы.

Доказательство теоремы 4.10. 1) $\Rightarrow$ 2). Зафиксируем $\rho\in(0,1)$, $z\in D^m$ и рассмотрим функцию $g:D^1\to\mathbb{C}$, определяемую правилом

$$g(w) = f(z\rho w)\frac{1-(\rho w)^{p+1}}{(p+1)(1-\rho w)^2}, \; w \in D^1. \tag{4.77}$$

Покажем, что $\forall w \in D^1$

$$g(w) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)\sigma_k^{\Delta}(f)\rho^k w^k + \sum_{k=p}^{\infty} V_{k,p}^{\Delta}(f)(z)\rho^k w^k. \tag{4.78}$$

Для этого заметим, что для любой функции $h \in Hol(D^1)$

$$\frac{h(w)}{(1-w)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_1(h)(1)w^k \;\; \forall w \in D^1 \tag{4.79}$$

и

$$V_{k,p}(h)(w) = \frac{1}{p+1}\big((k+1)\sigma_k(h)(w) - (k-p)\sigma_{k-p-1}(h)(w)\big). \tag{4.80}$$

Действительно, если

$$h(w) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{h}(k)w^k \quad \forall w \in D^1,$$

то по правилу умножения степенных рядов

$$\frac{h(w)}{(1-w)^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{h}(k)w^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)w^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\widehat{h}(\nu)(k+1-\nu)\right)w^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\sum_{\nu=0}^{k}\left(1-\frac{\nu}{k+1}\right)\widehat{h}(\nu)\right)w^k \; \forall w \in D^1,$$

что и доказывает (4.79). Равенство (4.80) легко получить исходя из определения сумм $V_{n,p}$ и σ_n.

С помощью равенства (4.79) и (4.80) имеем

$$h(w)\frac{1-w^{p+1}}{(p+1)(1-w)^2} =$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k(h)(1)w^k-\frac{1}{p+1}\sum_{k=p+1}^{\infty}(k-p)\sigma_{k-p-1}(h)(1)w^k=$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)\sigma_k(h)(1)w^k+\sum_{k=p}^{\infty}V_{k,p}(h)(1)w^k\quad\forall w\in D^1.$$

Отсюда легко получить равенство (4.78), полагая $h(w)=g(\mathrm{z}w)$, и учитывая то, что

$$g(\mathrm{zw})=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(f)(\mathrm{z})w^k\quad\forall w\in D^1,\ \forall z\in D^m.$$

Понятно, что функция g, определенная правилом (4.77), является голоморфной в замкнутом круге $\overline{D^1}$, а также, принадлежит к H_1.

Учитывая разложение (4.78), применим к функции g неравенство Харди (см. напр., [16, с.98])

$$\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1}\left|\sigma_k^{\Delta}(f)(\mathrm{z})\right|\rho^k+\sum_{k=p}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left|V_{k,p}^{\Delta}(f)(\mathrm{z})\right|\rho^k\le\pi\|g\|_1.$$

Первую сумму в этом соотношении положим равной нулю при $p=0$. Отсюда $\forall n\ge p$ вытекает неравенство

$$\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k+1}\left|V_{k,p}^{\Delta}(f)(\mathrm{z})\right|\rho^k\le\pi\|g\|_1=\frac{\pi}{p+1}\int_{T^1}\left|f(\mathrm{z}\rho w)\frac{\left|1-(\rho w)^{p+1}\right|}{|1-\rho w|^2}d\sigma(w)\right|,$$

откуда в свою очередь следует оценка

$$\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|V_{k,p}^{\Delta}(f)\right\|_1\rho^k\le\frac{\pi}{p+1}\int_{T^1}\frac{\left|1-(\rho w)^{p+1}\right|}{|1-\rho w|^2}d\sigma(w)\int_{T^m}|f(\mathrm{z}\rho w)|d\sigma(\mathrm{z})\le\pi\|f\|_1\mathrm{I}_p(\rho).$$

Применяя к интегралу $\mathrm{I}_p(\rho)$ лемму, доказанную выше, получим оценку

$$\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|V_{k,p}^{\Delta}(f)\right\|_1\le\pi\|f\|_1\frac{1}{\rho^{n+p+1}}\ln\frac{1+\rho^{p+1}}{1-\rho^{p+1}}. \qquad (4.81)$$

Поскольку $\left\| V_{p,p}^{\Delta}(f) \right\|_1 = \left\| \sigma_p^{\Delta}(f) \right\|_1$, то в соответствии с теоремой Ландау-Фейера, по которой $\left\| \sigma_p \right\|_1 \le 1$, и с теоремой 1 работы [94]

$$\frac{1}{p+1} \left\| V_{p,p}^{\Delta}(f) \right\|_1 \le \left\| \sigma_p^{\Delta} \right\|_1 \le \| f \|_1, \ \forall p \in Z_+^1 .$$

Таким образом, имеем оценку

$$\frac{1}{p+2} \left\| V_{p+1,p}^{\Delta}(f) \right\|_1 = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \left\| (p+2)\sigma_{p+1}^{\Delta}(f) - \sigma_0^{\Delta}(f) \right\|_1 \le,$$

$$\le \left\| \sigma_{p+1}^{\Delta}(f) \right\|_1 + \left\| \sigma_0^{\Delta}(f) \right\|_1 \le 2 \| f \|_1 . \tag{4.83}$$

Первые две слагаемые в сумме, стоящей в левой части (4.81), ограничены для всех $p \in Z_+^1$. Вследствие этого далее считаем, что $n \ge p+2$. Для данного n, $n \ge p+2$, полагая $\rho = 1 - \frac{p+1}{n^2}$, оценим правую часть соотношения (4.81):

$$\frac{1-\rho^{2(p+1)}}{(p+1)\rho^{n+p+1}(1-p^2)} \ln \frac{1+\rho^{p+1}}{1-\rho^{p+1}} = \left(1 - \frac{p+1}{n^2}\right)^{-n-p-1} \ln \frac{n^{2(p+1)} + (n^2-p-1)^{p+1}}{n^{2(p+1)} - (n^2-p-1)^{p+1}} \le$$

$$\le \left(\frac{n^2}{n^2-p-1} \right)^{n+p+1} \ln \frac{n^2}{p+1} \le$$

$$\le 2 \left(\frac{(p+2)^2}{(p+2)^2 - p - 1} \right)^{2p+3} \ln \frac{n}{p+1} \le 2e^2 \ln \frac{n}{p+1}, \ \forall p \in Z_+^1 . \tag{4.84}$$

Здесь были использованы те факты, что последовательность

$$(a_n), \ n = p+2, \ldots, a_n = \left(\frac{n^2}{n^2-p-1} \right)^{n+p+1}$$

монотонно возрастает и является ограниченной сверху числом e^2.

Объединяя оценки (4.81) – (4.84), получим

$$\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|V_{k,p}^{\Delta}(f)\right\|_1 \le \|f\|_1 C\ln\frac{n+2}{p+1} \quad \forall p\in Z_+^1,\ \forall n\ge p, \qquad (4.85)$$

где C – константа независящая от n и p.

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\ln n<\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k+1} \quad \forall n\ge 2,$$

то

$$\ln\frac{n+2}{p+1}<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k+1}<A_{n,p} \quad \forall p\in N,\ \forall n\ge p,$$

и в силу (4.82), (4.83), (4.85) вытекает (4.68).

2) $\Rightarrow$3). Эта импликация очевидна.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\mathfrak{B}\left(T^m\right)$ – борелевская σ-алгебра подмножеств T^m. Напомним, что комплекснозначным зарядом называется конечная комплексная σ-аддитивная функция μ, определенная на $\mathfrak{B}\left(T^m\right)$ и такая, что $\mu(\emptyset)=0$.

Пусть $E\in\mathfrak{B}\left(T^m\right)$ и $C(E)$ – банахово пространство непрерывных комплекснозначных функций f на E с нормой $\|f\|_{C(E)}=\max\limits_{z\in E}|f(z)|$.

Через $|\mu|(E)$ будем обозначать вариацию заряда μ на $E\in\mathfrak{B}\left(T^m\right)$ и будем под этим понимать норму линейного функционала

$$f\mapsto\Phi_\mu(f)\overset{df}{=}\int_E f d\mu,\ f\in C(E).$$

Если $E=T^m$, то $|\mu|(E)=|\mu|\left(T^m\right)$ – полная вариация заряда μ.

Пусть p – параметр, для которого выполняется (4.69). Положим

$$\mu_n(E)\overset{df}{=}\int_E R_{n,p}^{\Delta}(f)(\mathrm{w})d\sigma(\mathrm{w}).$$

Условие (4.69) обеспечивает равномерную ограниченность вариации суммы абсолютно непрерывных относительно меры Лебега зарядов (μ_n), $n = p,\dots$,

$$\sup_{n\ge p}|\mu_n|(T^m) \le \sup_{n\ge p}\left\|R^{\Delta}_{n,p}(f)\right\|_1 \overset{df}{=} K < \infty . \tag{4.86}$$

Будем рассматривать заряды μ_n как элементы сопряженного к $C(T^m)$ пространства $C^*(T^m)$. Это корректно по теореме Ф. Рисса (см., напр., [155 с. 112]) об общем виде непрерывного линейного функционала в $C(T^m)$.

В этом смысле, согласно (4.86), семейство функционалов (μ_n), $n = 1,2,\dots$, принадлежит кругу радиуса *K* пространства $C^*(T^m)$ и, поскольку этот круг является компактом в слабой топологии $C^*(T^m)$ (см.. напр., [155 с. 223]), то найдется последовательность функционалов (μ_{n_j}), $j = 1,2,\dots$, которая будет слабо сходиться к некоторому функционалу μ, то есть $\mu_{n_j} \to \mu (j \to \infty)$. В терминах зарядов, опять таки по теореме Ф. Рисса, последнее означает, что

$$\lim_{j\to\infty}\int_{T^m} g R^{\Delta}_{n_j,p}(f)\, d\sigma = \int_{T^m} g\, d\mu \quad \forall g \in C(T^m).$$

Кроме того, для функции $g(\mathrm{w}) = \mathrm{w}^l$, $l \in Z^m_+$,

$$\lim_{j\to\infty}\int_{T^m} \mathrm{w}^l R^{\Delta}_{n_j,p}(f)(\mathrm{w})\, d\sigma(\mathrm{w}) = \int_{T^m} \mathrm{w}^l\, d\mu(\mathrm{w}). \tag{4.87}$$

Покажем, что предел в левой части этого соотношения равен $\widehat{f}(l)$. В силу преобразования Абеля, находим

$$R^{\Delta}_{n,p}(f) = \frac{1}{A_{n,p}}\sum_{k=0}^{n-p}\frac{1}{k+p+1}V^{\Delta}_{k+p,p}(f) =$$

$$= V^{\Delta}_{n,p}(f) - \frac{1}{A_{n,p}}\sum_{k=0}^{n-p} A_{k+p-1}\left(V^{\Delta}_{k+p,p}(f) - V^{\Delta}_{k+p-1,p}(f)\right) =$$

$$= V_{n,p}^{\Delta}(f) - \frac{1}{p+1}\sum_{k=p}^{n-1}\left(1-\frac{A_{k+p-1}}{A_{n,p}}\right)S_{k+1}^{\Delta}(f) + \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{n-p-1}\left(1-\frac{A_{n,k+1}}{A_{n,p}}\right)S_{k}^{\Delta}(f).$$

Для всех $n,\ n \ge \max(l,p) + p + 2$, где $l = |1|$

$$\int_{T^m} \mathrm{w}^l R_{n,p}^{\Delta}(f)\,d\sigma(\mathrm{w}) = \int_{T^m} \mathrm{w}^l V_{n,p}^{\Delta}(f)(\mathrm{w})\,d\sigma(\mathrm{w}) -$$

$$-\frac{1}{p+1}\sum_{k=p}^{n-1}\left(1-\frac{A_{n,k+1}}{A_{n,p}}\right)\int_{T^m} \mathrm{w}^l S_{k+1}^{\Delta}(f)(\mathrm{w})\,d\sigma(\mathrm{w}) = \hat{f}(1)\alpha_n(l),$$

где

$$\alpha_n(l) \overset{df}{=} \begin{cases} 1, & l \le p, \\ 1-\dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=p}^{l-1}\left(1-\frac{A_{n,k+1}}{A_{n,p}}\right), & l \ge p+1. \end{cases}$$

Поскольку $\alpha_n(l) \to 1$ при $n \to \infty$, то соотношение (4.87) принимает вид

$$\hat{f}(1) = \lim_{j\to\infty}\int_{T^m} \mathrm{w}^1 R_{n_j,p}^{\Delta}(f)(\mathrm{w})\,d\sigma(\mathrm{w}) = \int_{T^m} \mathrm{w}^1 d\mu(\mathrm{w}).$$

Отсюда

$$f(\mathrm{z}) = \sum_{\mathrm{k}\in Z_+^m} \hat{f}(k)\mathrm{z}^{\mathrm{k}} = \int_{T^m} C(\mathrm{w},\mathrm{z})\,d\mu(\mathrm{w}) \quad \forall z \in D^m,$$

где

$$C(\mathrm{w},\mathrm{z}) \overset{df}{=} \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-\overline{w}_j z_j},$$

то есть голоморфная функция f представляется интегралом типа Коши-Стильтьеса заряда μ.

Поскольку

$$\int_{T^m} \mathrm{w}^{\mathrm{l}} d\mu(\mathrm{w}) = 0 \quad \forall \mathrm{l} \notin Z_+^m, \tag{4.88}$$

то по теореме братьев Рисс (см., напр., [97, теорема 5]) заряд μ является абсолютно непрерывным относительно меры Лебега, то есть существует суммируемая на T^m функция h такая, что

$$f(z) = \int_{T^m} h(\mathrm{w}) C(\mathrm{w}, \mathrm{z}) d\sigma(\mathrm{w}) \quad \forall z \in D^m.$$

Условие (4.88) позволяет утверждать ([97]), что с другой стороны

$$f(\mathrm{z}) = \int_{T^m} h(\mathrm{w}) P(\mathrm{w}, \mathrm{z}) d\sigma(\mathrm{w}),$$

где

$$P(\mathrm{w}, \mathrm{z}) \overset{df}{=} \prod_{j=1}^{m} \frac{1 - |z_j|^2}{|1 - \overline{w}_j z_j|^2}.$$

В силу хорошо известного факта

$$\int_{T^m} |f(\rho \mathrm{z})| d\sigma(z) \le \|h\|_1 \quad \forall \rho \in (0,1),$$

то есть $f \in H_1$.

Теорема доказана.

Доказательства теоремы 4.11. Докажем сначала частный случай, когда $p(n) = n$. При этом $V^{\Delta}_{n,p(n)}(f) = \sigma^{\Delta}_n(f)$ и соотношение (4.71) принимает вид

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sigma^{\Delta}_n(f) \right\|_1 = 0 \tag{4.90}$$

Это соотношение хорошо известно при $m = 1$.

В многомерном случае доказательство (4.90) можно свести к одномерному случаю с помощью таких рассуждений.

Рассмотрим функцию одной переменой

$$h(w) \overset{df}{=} f(\rho \mathbf{z} w), \; w \in D^1, \; z \in T^m, \; \rho \in (0,1)$$

Используя известную технику оценивая одномерных интегралов с дельта-образными ядрами (см., напр.. [23, с. 37]), получаем

$$\int_{T^1}\left|f(\rho zw)-\sigma_n^{\Delta}(f)(\rho zw)\right|d\sigma(w)=\int_{T^1}\left|h(w)-\sigma_n(h)(w)\right|d\sigma(w)=$$

$$=\int_{T^1}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(h\left(we^{-it}\right)-h(w)\right)K_n(t)dt\right|d\sigma(w)\le$$

$$\le\sup_{|t|<\delta}\|h_t-h\|_1+2\|h\|_1\sup_{|t|\ge\delta}K_n(t),\delta>0,$$

где

$$h_t(w)=h\left(we^{-it}\right)$$

и

$$K_n(t)\overset{df}{=}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,\ \ t\in[-\pi,\pi].$$

Теперь $\forall\varepsilon>0$ и $\rho\in(0,1)$ найдется такое $\delta>0,$ что

$$\int_{T^m}\left|f(\rho z)-\sigma_n^{\Delta}(f)(\rho z)\right|d\sigma_m(z)=\int_{T^m}d\sigma_m(z)\int_{T^1}\left|f(\rho zw)-\sigma_n^{\Delta}(f)(\rho zw)\right|d\sigma(w)=$$

$$=\int_{T^m}\left(\sup_{|t|<\delta}\|h_t-h\|_1+2\|h\|_1\sup_{|t|\ge\delta}K_n(t)\right)d\sigma_m(z)\le$$

$$\le\sup_{|t|<\delta}\int_{T^m}\left|f\left(ze^{it}\right)-f(z)\right|d\sigma_m(z)+\|f\|_1\sup_{|t|\ge\delta}K_n(t)\le\varepsilon+\|f\|_1\sup_{|t|\ge\delta}K_n(t).$$

Вследствие того, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{|t|\ge\delta}K_n(t)\right)=0,$$

отсюда вытекает (4.90).

Равенство (4.90) , кроме этого означает, что множество алгебраических многочленов является плотным в H_1.

Поскольку соотношение (4.71) выполняется для любого алгебраического многочлена, то вследствие плотности многочленов в H_1 оно будет выполняться и для любой функции из H_1. Действительно, для любого алгебраического многочлена P_N по теореме 4.10

$$\frac{1}{A_{n,p(n)}}\sum_{k=p(n)}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|f-V_{k,p(n)}^{\Delta}(f)\right\|_1=$$

$$=\frac{1}{A_{n,p(n)}}\sum_{k=p(n)}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|f-P_N+P_N-V_{k,p(n)}^{\Delta}(P_N)+V_{k,p(n)}(P_N-f)\right\|_1\leq$$

$$\leq\left\|f-P_N\right\|_1+\frac{1}{A_{n,p(n)}}\sum_{k=p(n)}^{n}\frac{1}{k+1}\left\|P_N-V_{k,p(n)}^{\Delta}(P_N)\right\|_1+C\left\|f-P_N\right\|_1.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов.-М.: Изд-во иностр. лит., 1963. - 359 с.
2. *Alexits G., Kralik D.* Über die Approximation mit Starken de la Vallee – Poussinshen Mitteln //Acta Math. Scien. Hung. - 1965. –XVI. – p. 43 - 49.
3. *Alexits G., Kralik D.* Über die Approximation im Starken Sinne // Acta Scient. Math. Szeged. – 1965. - **26**, № 1 - 2. – p. 93 - 101.
4. *Алибеков Г. А., Трофименко В.И.* Суммирование рядов Фабера методами Валле-Пуссена, Рогозинского и Джексона в областях с кусочно-гладкой границей // Иссл. по теории приближения функций. – Киев: Инс-т математики АН УССР, 1991. – с. 4 – 12.
5. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
6. *Белинский Э.С.*О суммируемости рядов Фурье средних арифметических с пропусками // Теория приближения функций: Труды межд. конф. по теории приближения функций, Киев, 31 мая- 5 июня 1983г. – М.: Наука 1987. – с. 48 – 49.
7. *Белинский Э.С.* Сильная суммируемость периодических функций и теоремы вложения // Докл. АН –1993. – **332**, № 2. – с.133 – 134.
8. *Belinskii E.S.* Strong summability of Fourier series of periodic function from $H^p (0 < p \le 1)$ //Constr. Approx. -1996, – **12**, №2. –p. 187-195.
9. *Belinskii E.S.* Strong summability of the Marcinkiewicz mean in the integral metric and related questions // J. Austral. Math. Soc. – 1998. – **65**, № 3. – p. 303 – 312.

10. *Бернштейн С.Н.* Добавление к статье Е.В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С.Н. Бернштейна». – Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. - 1954. – **2**. – с. 155 – 158.
11. *Bugrov Ja*. On linear summation methods of Fourier series // Anal. math. – 1979. – **5**. – p. 119 – 134.
12. *Ch. – J. dela Vallee – Poussin.* Sur la meilleure approximation des fonction d'une variable recle par des expression d'order donne // Comptes rendus Acad. Sci. Paris. – 1918. – **166**. – p. 799 – 802.
13. *Вороновская Е.В.* Определение асимптотического вида приближения функций полиномами. С.Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. – 1932. - № 4. – с. 79 – 85.
14. *Габисония О.Д.* О точках сильной суммируемости рядов Фурье // Мат. заметки. – 1973. – **14**. - № 5. – с. 615 – 626.
15. *Габисония О.Д.* Вопросы сходимости и суммирования кратных рядов Фурье. Сухум. – 1986. – 263с.- Дис. …д-ра физ.-мат наук.
16. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: МИР, 1984 – 469 с.
17. *Гоголадзе Л.Д.* О (H,k)- суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье // Изв. Акад. наук СССР. – 1977. – **41**. – с. 889 – 908.
18. *Гоголадзе Л.Д.* О сильной суммируемости простых и кратных тригонометрических рядов // Некоторые вопросы теории функций. - Тбилиси, 1981. – **2**. – с. 5 – 50.
19. *Гоголадзе Л.Д.* О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функциях. – Тбилиси. – 1984. – 256. – Дис. … д-ра физ.-мат. наук.
20. *Гоголадзе Л.Д.* О сильной суммируемости почти всюду // Мат. сб. – 1988. – **135**, № 2. – 158 – 168.
21. *Голубов Б.И.* Об асимптотике кратных сингулярных интегралов для дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 5. – с. 749 – 762.

22. *Голубов Б.И.* Кратные ряды и интегралы Фурье // Итоги науки и техники. – М.: 1982. –**19**, - с. 3 – 54.
23. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963 – 311 с.
24. *Дзядык В.К.* К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С.М. Никольского I // Изв. АН СССР. – 1962. – **26**, № 6. – с. 796 – 824.
25. *Дзядык В.К.* К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях и о проблеме С.М. Никольского II // Изв. АН СССР. – 1963. – **27**, № 5. – с. 1135 – 1164.
26. *Дзядык В.К.* Введение в теории равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1966. - 672 с.
27. *Дзядык В.К., Алибеков Г.А.* Суммирование рядов Фабера линейными методами Рисса и Фейера в областях с кусочно-гладкой границей. – Киев, 1989. – 54 с. – (Препр/АН УССР. Ин-т математики; 89.41).
28. *Дзядык В.К., Алибеков Г.А.* О линейных методах суммирования рядов Фабера в областях с кусочно-гладкой границей // Труды межд. конф. по теории приближения функций (Киев, 31 мая – 5 июня 1983 г.) – М.: Наука, 1987. – с. 150 – 151.
29. *Du Bois Reimond.* Üntersuchungen über die convergenz und Divergens der Fouriershen Darstellungs formeln // Abh. Acad. Munchen. – 1876. – **12**. – p. 1 – 103.
30. *Дьячков А.М.* Асимптотика сингулярных интегралов и дифференциальные свойства функций // Моск. Ун-т. – М., 1986. – 52 с. - Деп. в ВИНИТИ 09.06.86, № 7383 - В86.
31. *Ефимов А.В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. – 1948. – **12**. – с. 259 – 278.
32. *Жукина Е.И.* Обратные теоремы и теоремы вложения. - Киев, 1987. – 96с. Дис. … канд. физ.-мат. наук.

33. *Zygmund A.* On the convergense and summability of power series on the circle of convergence // Proc. London Math. Soc. - 1941. – **47**. - p. 326 – 350.
34. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – В 2т. – М.: Мир, 1965. – т. 1. – 615 с.
35. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. - В 2т. – М.: Мир, 1965. – т.2. - 538 с.
36. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды – М.: Наука, 1984. – 459с.
37. *Kolmogoroff A.* Sur l'orde de grandeur des coefficients de la series de Fourier-Lebesque // Bull. de l'Acad Polonaise. Serie A. Sci. Matem. - 1923. – p. 83 - 86.
38. *Kolmogoroff A.* Une serie de Fourier-Lebesque divergente partout // Compt. Rendus. - 1926. – **183**. - 1327 – 1328.
39. *Конягин С.В.* О расходимости последовательности частных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье // Труды мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **190**. – с. 102 – 126.
40. *Krotov V.G.* Strong approximation bu Fourier series and differentiability properties of functions // Analysis Math. – 1978. – **4**. – p. 199 – 214.
41. *Krotov V.G., Leindler L.* On the strong summability of Fourier serier and the class H^{ω} // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1978. – **40**. – p. 93 – 98.
42. *Кузнецова О.И.* Асимптотическое приближение гладких функций // Теор. отобр. и прибл. функций. – Киев: Наук. Думка, 1989. – с. 75 – 81.
43. *Кузнецова О.И.* К вопросу о сильном суммировании по кругам // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – с. 629 – 634.
44. *Ласурия Р.А.* О характеристике точек степенной сильной суммируемости ортогональных разложений по общим полиномиальным системам. – Киев, 1994. – 44 с. (Преп./ НАН Украины; Ин-т математики; 94.14).
45. *Ласурия Р.А.* Приближение функций, заданных на всей действительной оси, операторами типа Фейера в обобщен-

ной гёльдеровой метрике // Тезисы докладов научной сессии проф.-препод. состава, посвящённой 20-летию образования Абхазского госуниверситета, Сухум, 1999. – с.5-8.

46. *Ласурия Р.А.* О порядке наилучших приближений (ψ, β) - дифференцируемых функций // Сборник научных трудов АГУ: Тезисы докладов научной конференции, посвященной 20-летию образования Абхазского госуниверситета, Сухум, 1999. – с. 32 – 36.

47. *Ласурия Р.А.* О приближении периодических функций линейными средними сумм Фурье в обобщенной гёльдеровой метрике // Докл. АМАН. – 2000. – **5**. - № 1. – с. 24 – 39.

48. *Ласурия Р.А.* Оценки группы уклонений в обобщённой гёльдеровой метрике // Укр. мат. журн. – 2001. – 53. - № 9. – с. 1210 – 1212.

49. *Ласурия Р.А.* Приближение функций в обобщенной гёльдеровой метрике. – Сухум: Изд-во АГУ, 2001. – 65 с.

50. *Ласурия Р.А.* Равномерные оценки группы отклонений $\overline{\psi}$ - интегралов суммами Фурье и сильная суммируемость рядов Фурье // Теория приближений и гармонич. анализ: Труды Укр. мат. конгр. – 2001. - Киев: Ин-т математики НАН Украины , 2002. - с. 114 – 122.

51. *Ласурия Р.А.* Об одной обратной задаче теории сильной аппроксимации // Докл. АМАН. – 2002. – **6**. - № 1. – с. 14 – 17.

52. *Ласурия Р.А.* (φ, λ) - сильная суммируемость рядов Фабера внутри комплексной области // Теорія наближення функцій та суміжні питання – Київ.: Ін-т математики НАН України, 2002. – 233 с. – с. 96 – 106.

53. *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$ - дифференцируемых функций (небольшая гладкость) // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – с. 911 – 918.

54. *Ласурия Р.А*. Оценки группы отклонений сумм Фабера на классах ψ - интегралов // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**. - № 4. – с. 451 – 461.
55. *Ласурия Р.А.* Приближение ψ - дифференцируемых функций кратными суммами Фурье в интегральной метрике // Analysis Mathematica. – 2004. – **30**. - № 3. – с. 207 – 221.
56. *Ласурия Р.А.* Сильная суммируемость рядов Фабера и оценки скорости сходимости группы уклонений в замкнутой области с кусочно-гладкой границей // Укр. мат. журн. - 2005. – **57**. - № 2. – с. 187 – 197.
57. *Ласурия Р.А.* Оценки группы φ-отклонений и сильная суммируемость рядов Тейлора функций классов $A^{\psi}H_{\infty}(D)$ //Мат. заметки. – 2008. – т. 83. вып. 5. – С. 696-704.
58. *Ласурия Р.А.* Асимптотика приближения ψ - дифференцируемых функций многих переменных // Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування: Міжн. наук. конф. (Ужгород, 18 – 23 венесня, 2006 р.) Тези доп. – Ін-т математики НАН Украіни, 2006. – с. 56 – 58.
59. *Ласурия Р.А.* Структурные свойства классов (ψ,β)- дифференцируемых функций, связанные с Φ - сильной аппроксимацией. // Труды Абх.гос. ун-та – Сухум: АГУ, 2008. – с. 7-10.
60. *Ласурия Р.А.* Асимптотика приближения ψ - дифференцируемых функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2008. –60, №8. –с. 1051-1057.
61. *Ласурия Р.А.* О приближении функций, заданных на всей действительной оси, операторами типа Фейера в обобщенной гёльдеровой метрике. // Мат. заметки. – 2007. – 181, В.4. – с. 547 – 552.
62. *Lebesgue H.* Recherches sur la convergence des series de Fourier // Math. Ann. – 1905. – **61**. – p. 251 – 280.

63. *Lebesgue H.* Sur les integrales singulieres // Ann. De Toulouse. – 1909. – **1**. - p. 25 – 117.
64. *Leindler L.* On a problem of strong summability of Fourier series // Acta Math. Scien. Hung. – 1968. – p. 87 – 94.
65. *Leindler L., Nikisin E.* Note on strong approximation bu Fourier series // Acta Math. Acad. Sci. Hung. - 1973. – **24**. – p. 223 – 227.
66. *Leindler L.* Strong approximation of Fourier series and structural properties of functions // Acta Math. Acad. Sci. Hung. - 1979. – **33**, № 1. – p. 105 – 125.
67. *Leindler L.* Strong approximation bu Fourier series.– Budapest, 1985.–210p.
68. *Лебедев Н.А., Широков Н.А.* О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами // Изв. АН Арм. ССР. – 1971. – **6**. - № 47. – с. 311 – 341.
69. *Liflyand E.P.* On the Lebesgue constants of Cesaro means of spherical harmonic expansions // Acta Sci. Math. – 1998. – **64**. – c. 215 – 222.
70. *Lӧfstrӧm J.* Some theoreme on interpolation spaces with application to approximation in L_p // Math. Ann. – 1967. – **172**, № 3. – C. 176 – 196.
71. *Long Jui-lin.* Sommes partielles de Fourier des functions borness // Bull. Sci. Math. – 1981. – **105**. – p. 367 – 391.
72. *Marcinkievicz J.* Sur la summability forte des series de Fourier // J. London Math. Soc. – 1939. – **14**. – p. 162 – 168.
73. *Marcinkievicz J.* Collected papers. W-wa: PWN, 1964.
74. *Mahapatra P.N.,* Chandra P. Degree of approximation of function in the Holder metric // Acta Math. Hung. - 1983. – **41**. – p. 67 – 76.
75. *Nagy B. Cz.* Mėthodes de summation des seriės de Fourier // Acta Sci. Math. Szeged. – 1950. – **12**. – pars B. – p. 204 – 210.

76. *Никольский С.М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. – 1948. – **12**. – с. 259 – 278.
77. *Новиков И.Я., Родин В.А.* Характеризация точек p- сильной суммируемости тригонометрических рядов Фурье // Изв. ВУЗов. – 1988. – **9**. – с. 58 – 62.
78. *Осиленкер Б.П.* О линейных методах суммирования разложений функций классов $L_{\mu}^{p}(1 \le p \le \infty)$ по ортонормированным системам полиномиального вида // Изв. АН СССР. – 1968. – **32**, № 4. – 756 – 771.
79. *Осиленкер Б.П.* О суммировании полиномиальных разложений Фурье функций классов $L_{\mu(x)}^{p}$ $(p \ge 1)$ // Докл. АН СССР. – 1972. – **202**, № 3. – с. 529 – 531.
80. *Oskolkov K.I.* On strong summability of Fourier serier and differentiability of functions // Anal. Math. – 1976. – 2. – p. 41 – 47.
81. *Осколков К.И.* О сильной суммируемости рядов Фурье // Труды мат. ин-та АН СССР. – 1984. – **172**. – с. 280 – 290.
82. *Пачулиа Н.Л.* Сильная суммируемость рядов Фурье (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989 – **41**, № 6. – с. 808 – 814.
83. *Пачулиа Н.Л.* Оценки сильных средних уклонений рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. – 1989. – **134**, № 2. – с. 249 – 252.
84. *Пачулиа Н.Л.* О точках сильной суммируемости рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. – 1989. – **133**, № 3. - с. 494 – 496.
85. *Пачулиа Н.Л.* Исследования по экстремальным задачам теории сильного суммирования рядов и интегралов Фурье, Сухум – Киев, 1991. – 296 с. – Дис. …д-ра физ.-мат. наук.
86. *Пачулиа Н.Л.* О точках сильной суммируемости рядов Фурье // Укр.мат. журн. – 1994. – **46**. –с. 1955-1964.
87. *Prösdorf S.* Zur Konvergens der Fourierreihen Hölderstiger Funktionen // Math. Nachr. – 1975. – **69**. – s. 7 – 14.

88. *Riesz M.* Sur les functions conjuguėes // Math. Zeit. – 1927. – **27**. – p. 218 – 244.
89. *Родин В.А.* BMO – сильные средние рядов Фурье // Функ. анализ и его прил. - 1989. – **23**, вып. 2. – с. 73 – 74.
90. *Родин В.А.* Метрические свойства интегрируемой функции и сильная суммируемость двойных рядов Фурье // Деп. в ВИНИТИ 20.08.90 № 6302. – В90. – М.; 1990. – 39 с.
91. *Родин В.А.* Пространство BMO и сильные средние рядов Фурье // Anal. Math. – 1990. – **16**, № 4. – с. 291 – 302.
92. *Родин В.А.* О мажорантных операторах сильного суммирования рядов Фурье // Укр. мат. журн. - 1990. – **42**, № 5. – с. 710 – 713.
93. *Родин В.А.* Осцилляция частных сумм и коэффициенты ряда Фурье интегрируемой функции. – Новосибирск. – 1993. – 363 с. Дис. … д-ра физ.-мат. наук.
94. *Савчук В.В., Савчук М.В.* Норми мультиплікаторів і наікращі наближения голоморфних функций багатьох змшнних //Укр. мат. журн. – 2002. –**54**, №12. – с. 1669-1679.
95. *Савчук В.В. Швидкість* збіжності ряду Тейлора для деяких классів аналітичних функцій // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – с. 1001 – 1003.
96. *Савчук В.В., М.В. Савчук.* Декілька тверджень про суми Валле-Пуссена функцій з простору Гарді // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т.2, № 2. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – 238 – 257.
97. *Савчук В.В.* Забражения голоморфних функцій багатьох змінных інтегралами типу Коші – Стільтьеса // Укр. Мат. журн. –2006. – 58, №4. – с. 522-542.
98. *Salem R*. On strong summability of Fourier series // Amer. J. Math. – 1955. - **77** , p. 393 – 403.
99. *Смирнов В.И., Лебедев Н.А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1964. – 483с.

100. *Sidon S.* Hinreichende Bedingungen fur den Fourier- charakter einer trigonomentrischen Reihe // J. London Math. Soc. – 1939. – **14**, № 2. – p. 158 – 166.
101. *Shipp F.* // Acta Sci. Math. – 1969. – **30**. – p. 77 – 87.
102. *Smith B.* A strong convergence theorem for $\mathrm{H}^1(T)$ // Lecture Notes in Mathematics. – Berlin – New-York: Springer, 1983. – **995**. – p. 169 – 173.
103. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 340 с.
104. *Степанец А.И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР. – 1984. – **277**, № 5. – с. 1074 – 1077.
105. *Степанец А.И.* Отношение порядка для (ψ,β) - производных // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 5. – с. 645 – 648.
106. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. Думка, 1987 – 268 с.
107. *Степанец А.И.* Приближение интегралов типа Коши в жордановых областях // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 6. – с. 809 – 833.
108. *Степанец А.И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$ - интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8, - с. 1069 – 1113.
109. *Степанец А.И.* Приближение $\overline{\psi}$ - интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – с. 274 – 291.
110. *Степанец А.И.* Приближение $\overline{\psi}$ - интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Укр. мат. жарн. – 1998. – **50,** № 3. – с. 388 – 400.
111. *Степанец А.И.* Скорость сходимости группы отклонений на множествах $\overline{\psi}$ -интегралов // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 2. – с. 1673 – 1693.

112. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2т. – Киев: Ин-т маетматики НАН Украины, 2002. – т.1. – 426 с.
113. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2003. – т. 2. – 468 с.
114. *Степанец А.И., Ласурия Р.А.* Сильная суммируемость ортогональных разложений суммируемых функций. I // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – с. 260 – 277.
115. *Степанец А.И., Ласурия Р.А.* Сильная суммируемость ортогональных разложений суммируемых функций. II // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – с. 393 – 405.
116. *Степанец А.И., Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье и φ-сильные средние их уклонений на классах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №8. – с. 1075-1093.
117. *Степанец А.И., Ласурия Р.А.* Характеристика точек сильной суммируемости рядов Фурье по системам функций полиномиального вида // Тез. докл. межд. конф. "Функциональные пространства и теория приближений, нелинейный анализ", Москва, 1995. – с. 158.
118. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Группы отклонений на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1988. -**40**, № 1. – с. 101 – 105.
119. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1990. -**43**, № 4. – с. 545 – 555.
120. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Сильные средние уклонений опреторов Фурье // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, №9. – с. 1225-1231.
121. *Степанец А.И., Савчук В.В.* Приближение интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – с. 706 – 740.
122. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. – 1951. – **15**. – с. 219 – 242.

123. *Стечкин С.Б.* О приближении периодических функций суммами Фейера // Труды ин-та математики АН СССР. – 1961. – **62**. – с. 48 – 60.
124. *Суетин П.К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
125. *Szabados J.* On a problem of Leindler concerning strong approximation by Fourier Series // Anal. Math. – 1976/ - **2**. – p. 155 – 161.
126. *Takanashi S.* On the lacunary Fourier series // Tohoku Math. J. – 1967. – **19**. – p. 79 – 85.
127. *Tandori K.* Über die Cesaroche summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. II // Acta Math. Sci. Hung. – 1954. – **5**, № 3 – 4. - p. 236 – 253.
128. *Tandori K.* Über die starke summation von Fourierreihen // Acta Sci. Math. – 1955. – **16**/ - p. 65 – 73.
129. *Tandori K.* Berichtigung Arbeit “Über die starke summation von Fourierreihen” // Ibid. – 1968. - **29**, № 3-4.
130. *Теляковский С.А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов Фурье // Изв. АН СССР. – 1964. – **28**. – с. 1209 – 1236.
131. *Теляковский С.А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами //Мат. сб. – 1964. – 63 (105) №3. – с. 426-444.
132. *Tikam Singh.* The approximation of continuous functions in the Holder metric // Мат. Весн. – 1991. – **43**. – с. 111 – 118.
133. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
134. *Топурия С.Б.* Ряды Фурье-Лапласа на сфере. – Тб.: Изд-во тб. ун-та, 1987. – 356 с.
135. *Totik V.* On the modules of continuity connection with a problem of Szabados concerning strong approximation // Anal. Math. – 1978. – **4**. – p. 145 – 152.

136. *Totik V.* On structural properties of function arising from strong approximation of Fourier series // Acta Sci. Math. – 1979. – **41**. – p. 227 – 251.
137. *Totik V.* On the strong approximation of Fourier series // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1980. – **35**. – p. 157 – 172.
138. *Totik V.* Notes on Fourier series: strong approximation // J. approxim. theory. – 1985. – **43**. – p. 105 – 111.
139. *Тригуб Р.М., Загородний Н.А.* Об одном вопросе Салема // Теория функицй и отображений. – Киев: Наук. Думка. – 1979. – с. 97 – 101.
140. *Тригуб Р.М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами на торе // Изв. АН СССР. – 1980. – **44**, № 6. – с. 1378 – 1409.
141. *Ульянов П.Л. А.Н. Колмогоров* и расходящиеся ряды Фурье // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, вып. 2 (232). – с. 51 – 90.
142. *Wiesz F.* Strong summability for two-parametr Walsh-Fourier and trigonometric –Fourier series // Stud. Math. – 1996. – **117**, № 2. – p. 173 – 194.
143. *Favard F.* Sur la saturation des procedes summation // Journ. math. pur. appl. – 1957. – 36, № 4. – p. 359 – 372.
144. *Fejer L.* Untersuchungen über Fouriesche Reihen // Ann. Math. – 1904. – **58**. – p. 501 – 569.
145. *Фомин Г.А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 1. – с. 144 – 152.
146. *Фомин Г.А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье, подобных методу Бернштейна-Рогозинского // Изв. АН СССР. – 1967. – **31**. – с. 335 – 348.
147. *Фомин Г.А.* Некоторые свойства ортогональных разложений в L^2 // Прикл. вопр. мат. анализа. – Тула. –1972. – с. 141-154.

148. *Freud G.* Über die Sättigungsklasse der starken Approximation durch Teilsummen der Fourierschen Reihe // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1969. – **20**. – p. 275 – 281.
149. *Fridli S., Schipp F.* Strong sumability and Sidon type inequalities // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1995. – **60**. – p. 277 – 289.
150. *Hardi G., Littlewood J.* Sur la serie de Fourier d'une function a caure summable // Comput. Revs. – 1913. – 153. – 1307 – 1309.
151. *Hardi G., Littlewood J.* On the strong summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. – 1926. – **26**. – p. 233 – 286.
152. *Hardi G., Littlewood J.* The strong summability of Fourier series // Fund. Math. – 1935. – **25**. – p. 162 – 189.
153. *Харди Г., Литтлвуд., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
154. *Hardi G.* On the summability of Fourier's series // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**, № 2. – p. 13 – 28.
155. *Хейман У.,* Кенеди П. Субгармонические функции. –М.: МИР, 1980 – 304с.
156. *Шмайсер Х.-Ю., Зикель В.* О сильной суммируемости кратных рядов Фурье и гладкости функций // Anal. Math. – 1982. – **8**. – с. 57 – 70.
157. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье: В 2т. – М.: МИР, 1985. – Т.1, 260 с.
158. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье: В2т. – М.: МИР, 1985. Т.2. 399 с.

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Ласурия Роберт Андреевич

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ И АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Компьютерный набор и верстка
Чолокян С. Э.
Гицба А. Ш.

Формат 60х90/16. Тираж 500. Физ. печ. лист 16,25.