Абхазский государственный университет

Физико-математический факультет
кафедра математического анализа

Сичинава Н.К., Хупория Н.З., Ласурия Р.А.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Учебно-методическое пособие

Сухум
2019 г.

Сичинава Нона Калистратовна, Ласурия Роберт Андреевич, Хупория Нонна Зурабовна. **Дифференциальное исчисление функции одной переменой.**

Предлагаемое пособие предназначено для студентов различных специальностей ВУЗов, изучающих разделы математического анализа. Целью данного пособия является приобретение студентами практических навыков по методам дифференциального исчисления функций одной действительной переменной. Пособие может быть использовано для самостоятельной и для контрольных работ, для типовых расчетов по данной теме. Пособие разбито на параграфы, в каждом из которых дается необходимая теоретическая справка и разбор типовых примеров.

Рецензент: академик Пачулиа Н.Л.

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом АГУ

2-ое издание

Содержание

§ 1 Задачи, приводящие к понятию производной.

Пример 1. Определить среднюю скорость движения тела за промежуток времени $2 \le t \le 2 + \Delta t$, если закон движения задан формулой $s = t^2 - 3t + 5$, где t – время (в секундах), s – расстояние (в метрах). Подсчитать среднюю скорость для: $a)\ \Delta t = 0{,}1\,сек$; б) $\Delta t = 0{,}01\,сек$; в) $\Delta t = 0{,}001\,сек$; г) $\Delta t = 0{,}0001$ сек. Найти мгновенную скорость в момент $t_0 = 3$.

Решение: т.к. $v_{ср} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, $v_{мгн} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$,

где

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = (t + \Delta t)^2 - 3(t + \Delta t) + 5 - (t^2 - 3t + 5) =$$
$$= t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - 3t - 3\Delta t + 5 - t^2 + 3t - 5 = 2t\Delta t - 3\Delta t + (\Delta t)^2$$

$$v_{ср} = \frac{2t\Delta t - 2\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 2t - 3 + \Delta t,\ v_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0}(2t - 3 + \Delta t) = 2t - 3$$

Результаты расчётов занесём в таблицу:

t	Δ t	2t-3	$v_{ср}$
2	0,1	1	1,1
2	0,01	1	1,01
2	0,001	1	1,001
2	0,0001	1	1,0001

Из рассмотрения таблицы видно, что при t=2 со стремлением Δt к 0 средняя скорость $v_{ср}$ приближается к скорости, равной $v_{мгн}$.

Пример 2. Количество радиоактивного вещества в момент времени t выражается формулой $m = M(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$, где T – период полураспада, а M – первоначальное количество вещества в момент времени $t = 0$. Найти мгновенную скорость распада вещества в момент времени t_0.

Решение: Найдём среднюю скорость распада за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$. В момент t_0 количество вещества было $m_0 = M(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}$, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ стало $m = M(\frac{1}{2})^{\frac{t_0 + \Delta t}{T}}$. Поэтому за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$.

Количество вещества изменилось на $\Delta m = M(\frac{1}{2})^{\frac{t_0+\Delta t}{T}} - M(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}$

(Δm<0, т.к. количество радиоактивного вещества уменьшается). Средняя скорость распада за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ равна:

$$v_{ср}=\frac{\Delta m}{\Delta t}=M\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{t_0+\Delta t}{T}}-(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}}{\Delta t}=M\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{\Delta t}{T}}-1}{\Delta t}.$$

Поэтому мгновенная скорость распада выражается формулой

$$v_{мгн}=\lim_{\Delta t\to 0}v_{ср}=\lim_{\Delta t\to 0}M\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{\Delta t}{T}}-1}{\Delta t}=M(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{\Delta t}{T}}-1}{\Delta t}=$$

$$=M(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\frac{\Delta t}{T}\ln\frac{1}{2}}-1}{\Delta t}=M(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{-\ln 2\cdot\frac{\Delta t}{T}}-1}{\Delta t}=$$

$$=M(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}\lim_{\Delta t\to 0}e^{-\ln 2\frac{\Delta t}{T}}\cdot(-\frac{\ln 2}{T})=M(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}(-\frac{\ln 2}{T})=-\frac{M\ln 2}{T}(\frac{1}{2})^{\frac{t_0}{T}}=$$

$$=-\frac{m_0\ln 2}{T},$$

т.е. скорость радиоактивного распада в момент времени t_0 пропорциональна количеству вещества в этот момент времени.

Пример 3. Точка совершает гармонические колебания по закону $x=15\sin 3t$. Найти мгновенную скорость точки в момент времени t_0.

Решение: В момент времени t_0 координата точки равнялась $x_0=15\sin 3t_0$, а в момент времени $t_0+\Delta t$ она равнялась $x+\Delta x=15\sin 3(t_0+\Delta t)$. Поэтому путь, пройденный за промежуток времени $(t_0;t_0+\Delta t)$ равен

$$\Delta x = 15\sin 3(t_0 + \Delta t) - 15\sin 3t_0 = 30\cos 3(t_0 + \frac{\Delta t}{2})\sin 3\frac{\Delta t}{2},$$

а средняя скорость точки за этот же промежуток времени равна:

$$v_{ср} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 30\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\frac{\sin^3\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t}.$$

Следовательно, мгновенная скорость точки в момент времени t_0 равна:

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t\to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t\to 0} 3\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\sin 3\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t} =$$

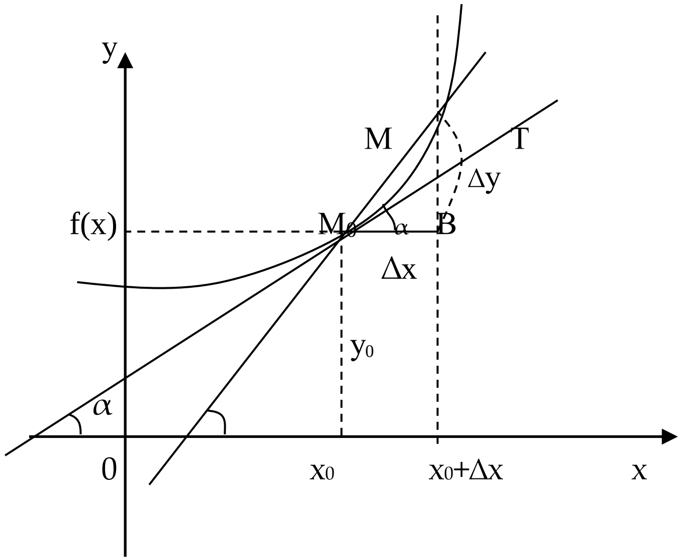
$$= 30\lim_{\Delta t\to 0}\cos 3\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{3}{2}\sin 3\frac{\Delta t}{2}}{3\frac{\Delta t}{2}} = 45\cos t_0.$$

<u>Пример 4.</u> Найти угол наклона касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$y - y_0 = k(x - x_0)$, где k угловой коэффициент и $k = tg\alpha$.

Как видно из рисунка

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



где φ – угол наклона секущей M_0M , и

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi, \text{ так как}$$

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{/}(x_0)$$

Задачи для самостоятельной работы.

1. Точка движется по прямой согласно закону $s = 3t^2 + 2t$. Найти скорость точки в моменты $a)$ $t = 3\,сек,$ б) $t = 4\,сек$.
2. Тело движется вдоль прямой Os по закону s=t+sint. Найти скорость движения при $t = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Свободно падающее тело (в пустоте) движется по закону $s = \frac{gt^2}{2}$. Найти скорость движения за промежуток времени от t_0 =10сек до $(t + \Delta t)$, полагая Δt =1сек и скорость падения в момент времени а) t =10сек б) t =12 сек.
4. Найти мгновенную скорость прямолинейно движущейся точки, если её координата в момент времени t выражается формулой $x = t^4 + 4t^2 - 2t - 1$.
5. Найти мгновенную угловую скорость вращающегося тела, если в момент времени t угол поворота $\varphi = 2t^3 - 3t + 1$.
6. Пусть в электрической цепи течёт постоянный ток. Дать определение переменного тока в момент времени t и вычислить его, если количество электричества, протекшее в цепи за промежуток времени [0;t], равна Q(t).
7. Радиус круга равномерно увеличивается со скоростью v. С какой скоростью увеличивается площадь круга (начальное значение радиуса равно нулю)?
8. Радиус шара равномерно увеличивается со скоростью v. С какой скоростью увеличивается объём шара? С какой скоростью увеличивается его поверхность? (Начальное значение радиуса равно нулю).
9. Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к параболе $f(x) = x^2 + 4$; а) в точке (0;4) б) в точке (3;5).

10. Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции y=sinx 1) в точке $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 2) в точке $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

§ 2 Определение производной.

Рассмотрим функцию $f(x)$, $x \in (a,b)$ и некоторую точку x_0 из интервала (a,b). Тогда для любого $x \in (a,b)$, кроме $x = x_0$, определено отношение

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (1)$$

и, следовательно, формула (1) задаёт функцию, определённую для $x \neq x_0$ из интервала (a,b).

<u>**Определение**</u>. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Когда существует конечный предел отношения (1) при $x \to x_0$ называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$ или $f'(x)\big|_{x=x_0}$.

Таким образом, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ . \qquad (2)$$

Разность $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции, а разность $\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента, тогда $x = x_0 + \Delta x$ и формула (2) примет вид:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ . \qquad (3)$$

Для функции $f(x)$, $x \in (a,b)$, точка x_0 в формуле (3) может быть любой точкой $x \in (a,b)$, поэтому вместо x_0 часто пишут просто x:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

В этой формуле x фиксировано, и находится предел функции, зависящий от приращения аргумента Δx.

Если значение функции $f(x)$ обозначается буквой y: $y = f(x)$, то приращение функции $f(x)$ обозначается Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

В этом случае производная функции f в точке x часто обозначается y': $y' = f'(x)$.

В этих обозначениях формула (4) примет вид:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (5)$$

<u>Пример 1.</u> Исходя из определения производной, найти производную функции $y=\sqrt{x}.$

<u>Решение:</u> Найдём приращение функции при изменении аргумента от x до $x+\Delta x$:

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\ .$$

Поэтому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Т.е. $y'=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

<u>Пример 2.</u> Исходя из определения производной, найти производную функции $f(x)=3^x\sin x$.

<u>Решение:</u> Найдём приращение функции при изменении аргумента от x до $x+\Delta x$:

$$\Delta f(x)=3^{x+\Delta x}\cdot\sin(x+\Delta x)-3^x\cdot\sin x\ .$$

Поэтому $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{3^{x+\Delta x}\sin(x+\Delta x)-3^x\sin x}{\Delta x}=$

$$=3^x\frac{3^{\Delta x}(\sin x\cdot\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$= 3^x \cdot \sin x \frac{3^{\Delta x}\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + 3^x \cos x \cdot \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}.$$

Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} 3^x \sin x \frac{3^{\Delta x}\cdot\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} 3^x \cos x \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} =$$
$$= 3^x \sin x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3^{\Delta x}\cdot\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + 3^x \cos x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} =$$
$$= 3^x \ln 3 \cdot \sin x + 3^x \cdot \cos x,$$

потому что

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{3^{\Delta x}\cdot\cos x - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{3^{\Delta x}\cos x - \cos x}{\Delta x} + \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x\leftarrow 0} \cos\Delta x - 2\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin^2\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3^{\Delta x} - 1}{\Delta x} - 0 =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3^{\Delta x}\cdot\ln 3}{1} = \ln 3,$$
$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Пример 3. Покажем, что функция $f(x) = |x|$ $x \in R$, в любой точке $x_0 \neq 0$ имеет производную, *а* в точке $x_0 = 0$ не имеет производной.

Решение: Пусть $x_0 < 0$. На интервале $(-\infty;0)$ $f(x) = -x$. Интервал $(-\infty;0)$ является окрестностью этой точки x_0 и

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-x+x_0}{x-x_0}=-1$$

аналогично, если $x_0>0$, то $f(x)=x$ и

$$f'(x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Пусть $x_0=0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x-0}{x-0}=-1,$$
$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x-0}{x-0}=1,$$

т.е. односторонние пределы существуют, но не равны между собой. Следовательно, функция $f(x)=|x|,\ x\in R$ не имеет производной в точке $x_0=0$.

Таким образом,

$$f'(x)=(|x|)'=sign\ x,\ \forall x\neq 0,$$

а в точке $x=0$ функция $f(x)=|x|,\ x\in R$ производной не имеет.

Пользуясь определением производной, можно непосредственно найти производную. Для этого надо:

1. дать аргументу x произвольное приращение Δx и найти соответствующее новое значение функции $f(x+\Delta x)$;
2. определить приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

3. составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4. найти предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

Задачи для самостоятельной работы.

Пользуясь определением производной, вычислить производные следующих функций:

1. $y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$
2. $y = \sqrt[3]{x}$
3. $y = \sqrt{x^2 - 3}$
4. $\mathrm{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{kx}}$
5. $y = \cos^2 x$
6. $y = tgax$
7. $y = tg^2 x$
8. $y = \sin^2 x$
9. $y = x^2 - 5x + 6$
10. $y = \ln x$
11. $y = \dfrac{1}{2}$
12. $y = \sqrt{2 + x}$
13. $y = 5|x + 2|$
14. $y = 2x^2 - 3$
15. $y = x^3$
16. $y = \sqrt[3]{x^2}$
17. $y = 2\sin 3x$
18. $y = 1 + \ln 2x$
19. $y = 2^{x+1}$
20. $y = x^3 + 2x$

Вычислив $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, найти $f'(x_0)$.

1. $y=\frac{1}{x^2}, x_0=1$
2. $y=\sqrt{2+x}, x_0=0$
3. $y=\sqrt[3]{x^2}, x_0=0$
4. $\mathrm{y}=\mathrm{x}^2, x_0=0{,}1$
5. $y=1+\ln 2x, x_0=1$
6. $y=2\sin 2x, x_0=\frac{\pi}{4}$
7. $y=2\sin 3x, \mathrm{x}_0=\frac{\pi}{6}$
8. $y=x+ctgx, x_0=\frac{\pi}{4}$
9. $y=x^2+2x, x_0=1$
10. $y=x^3+x, x_0=0$
11. $y=\sqrt{x}, x_0=4$
12. $y=\frac{1}{x^2+1}, x_0=3$
13. $y=2^{x+1}, x_0=-1$
14. $y=\ln x, x_0=e^2$
15. $y=2x^3+1, x_0=0$
16. $y=x^3, x_0=-1$
17. $y=-5|x-3|, x_0=2$
18. $y=2|x+5|, x_0=-3$
19. $y=4x^2, x_0=-2$
20. $y=x\sqrt[3]{x}, x_0=0$

§ 3. Свойства дифференцируемых функций.

Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0 и имеющая в этой точке производную, называется дифференцируемой в точке x_0.

<u>Теорема 1.</u> Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в этой точке тогда и только тогда, когда

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+\alpha(x)\cdot\Delta x,$$

где A – некоторое число, $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$.

<u>Теорема 2</u>. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $f(x)=u(x)+v(x)$ тоже дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0)\,, \tag{6}$$

т.е. производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций:

$$(u+v)'=u'+v'\,.$$

<u>Теорема 3.</u> Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $f(x)=u(x)-v(x)$ тоже дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0)=u'(x_0)-v'(x_0)\,, \tag{7}$$

т.е. производная разности двух функций равна разности производных этих функций:

$(u-v)'=u'-v'$.

<u>Теорема 4.</u> Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ тоже дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0)=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)\,, \tag{8}$$

т.е. $(uv)'=u'\cdot v+u\cdot v'$.

Теорема 5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и $v(x_0) \neq 0$, то функция

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

тоже дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}, \qquad (9)$$

т.е. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Формулы для производных основных элементарных функций.

$c' = 0$,	$c = const$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,	$x > 0, \ \alpha \in R$
$(a^x)' = a^x \ln a$,	$a > 0$ и $a \neq 1, x \in R$
$(e^x)' = e^x$,	$x \in n$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
$(\log_a \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x \ln a}$,	$\mathrm{a} > 0, a \neq 1, \ \mathrm{x} \neq 0$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$,	$x > 0$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad x \in R$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad x \in R$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1) \quad n \in Z$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad x \neq \pi n \qquad n \in Z$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in R$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in R$$

$$(sh)' = chx, \qquad x \in R$$

$$(ch)' = shx, \qquad x \in R$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \qquad x \in R$$

$$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}, \qquad x \neq 0$$

Пример 1. Вычислить производную функции:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 3x^5 - 4}{7\sqrt{x} + 2x - 1}.$$

Заменяя корни степенями с дробными показателями и используя правила дифференцирования частного и суммы, получим:

$$y' = \frac{(7x^{\frac{1}{2}} + 2x - 1)(x^{\frac{2}{3}} + 3x^5 - 4)' - (7x^{\frac{1}{2}} + 2x - 1)'(x^{\frac{2}{3}} + 3x^5 - 4)}{(7x^{\frac{1}{2}} + 2x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(7x^{\frac{1}{2}} + 2x - 1)(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 15x^4) - (7 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2)(x^{\frac{2}{3}} + 3x^5 - 4)}{(7x^{\frac{1}{2}} + 2x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(7\sqrt{x} + 2x - 1)(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 15x^4) - (\frac{7}{2\sqrt{x}} + 2)(\sqrt[3]{x^2} + 3x^5 - 4)}{(7\sqrt{x} + 2x - 1)^2}.$$

Пример 2. Вычислить производную функции

$$y = e^x(10\sin x - 5\cos x) \cdot \ln x.$$

Используя правила дифференцирования произведения и суммы функций, получим:

$$y' = (e^x)'(10\sin x - 5\cos x) \cdot \ln x + e^x(10\sin x - 5\cos x)' \ln x +$$
$$+ e^x(10\sin x - 5\cos x)(\ln x)' = e^x(10\sin x - 5\cos x)\ln x +$$
$$+ e^x(10\cos x + 5\sin x)\ln x + e^x(10\sin x - 5\cos x) \cdot \frac{1}{x} =$$
$$= e^x(10\sin x - 5\cos x)(\ln x + \frac{1}{x}) + e^x(10\cos x + 5\sin x).$$

<u>Пример 3</u>. Вычислить производную функции $y = xsh2x$ в точке $x_0 = 1$.

Используя правило дифференцирования произведения, получим:

$$y' = x' \cdot shx + x \cdot (shx)' = shx + x \cdot chx .$$

$$y'(1) = sh1 + ch1$$

<u>Пример 4.</u> Вычислить производную и указать область существования производной функции $y = (x+1)tgx$.

Используя правило дифференцирования произведения, получим:

$$y' = (x+1)' \cdot tgx + (x+1) \cdot (tgx)' = tgx + \frac{x+1}{\cos^2 x} .$$

Область существования есть те значения x, в которых существует tgx, т.е.

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Задачи для самостоятельной работы.

I. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные данных функций:

1. $y = 7x^7 + 3x^x + \sqrt{2} + x^{-2} - 3x^{-7}$
2. $y = 8x^5 - x^3 + x^2 + x + 100 + 100 \cdot x^{-100}$

3. $y = ax^2 + bx + c$

4. $y = 8\sqrt{x} + \frac{5}{x} + 3$

5. $y = \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^6} + \frac{1}{25}$

6. $y = \frac{1}{x+1}$

7. $y = \frac{x+1}{x-1}$

8. $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

9. $y = \frac{1 - x^3}{1 - x^5}$

10. $y = \frac{x^{10} + 10}{x^{11} + 11}$

11. $y = \frac{5}{x^2 - x + 1}$

12. $y = \frac{1}{n^2 + 2n + 3}$

13. $y = \frac{2}{(1 - x^2)(1 + x^4)}$

14. $y = \frac{8 - 3\sqrt{x^3} + 2x}{1 + 6x\sqrt{x} - 3x^2}$

15. $y = \frac{x}{x^2 + x^{-2}}$

16. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

17. $y = \sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[4]{x}$

18. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

19. $y = x^2(\sqrt{x} + 3)$

20. $y = x(\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{2})$

21. $y = x \sin x$

22. $y = \dfrac{x}{\sin x}$

23. $y = \dfrac{\sin t}{1+\cos t}$

24. $y = \dfrac{x^2 + tgx}{x^2 - tgx}$

25. $y = \arcsin x + \arccos x$

26. $y = \sqrt{x} arctgx$

27. $y = \sin x \cdot \arcsin x$

28. $y = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x + 1}$

29. $y = \dfrac{artgx}{arcctgx}$

30. $y = \log_7 x \cdot \ln x$

31. $y = e^x \cdot \sin x$

32. $y = e^x \cdot 10^x$

33. $y = \dfrac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}$

34. $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sin x \cdot \ln x$

35. $y = x \cdot 2^x \cdot tgx$

36. $y = \dfrac{\sin x}{e^x} + \cos x$

37. $y = \dfrac{1+x^2}{arctgx} + \ln x$

38. $y = \dfrac{\arccos x}{arctgx} + \dfrac{1}{x^2}$

39. $y = \arcsin x \cdot 3^x + \sqrt[3]{x^4}$

40. $y = \dfrac{\ln x}{\cos x} + \dfrac{tgx}{e^x}$

II. Вычислить производную и указать область существования производной данных функций.

1. $y = x^5 + 3x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + 5$
2. $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + y$
3. $y = 9x^{15} + 15x^{-9}$
4. $y = \dfrac{\ln 5}{x} + e^3$
5. $y = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x^3} + \dfrac{c}{x^4} + \dfrac{d}{x^5}$
6. $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x}$
7. $y = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + x^{-3} + \dfrac{2}{x^2}$

8. $y = x^{3}\sqrt[3]{x^{2}} + x^{5}\sqrt[5]{x^{2}}$

9. $y = x^{\sqrt{8}} - x^{-\sqrt{3}} + u$

10. $y = (ax+b)^{2}$

11. $y = \dfrac{2x+5}{6x+7}$

12. $y = \dfrac{x^{2}-5x+6}{x^{2}+x+7}$

13. $y = \dfrac{x^{2}-3x+2}{x^{2}-4x-21}$

14. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x^{2}}}$

15. $y = x^{2} \cdot \cos x$

16. $y = (2x+5) \cdot tgx$

17. $y = \cos x + \sin x$

18. $y = x^{2} \cdot ctgx + 5x$

19. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$

20. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^{2}}}{tgx}$

21. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$

22. $y = arctgx + x + arcctgx$

23. $y = x \arccos x$

24. $y = x^{2} arcctgx$

25. $y = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$

26. $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{9}{x^3}$

27. $y = 2^x + 2^{-x}$

28. $y = x^2 \sin x \ln x$

29. $y = tgx + \frac{e^x}{1+x}$

30. $y = e^x (\sin x + \cos x)$

III. Вычислить производную функции $y = f(x)$ в точке x_0:

1. $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

2. $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, $x_0 = -3$

3. $y = \frac{x \cdot \ln x}{e^x}$, $x_0 = 2$

4. $y = \frac{x-a}{x-b}$ $(a \neq 1)$, $x_0 = a$

5. $y = (1+ax^b)(1+bx^a)$, $x_0 = 1$

6. $y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$, $x_0 = 0$

7. $y = 2\sqrt{3} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x_0 = 3$

8. $y = b \arcsin \frac{x}{b}$, $x_0 = \frac{b}{a}$

9. $y = 15tg\,\dfrac{x}{2} \cdot x^3,$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

10. $y = \dfrac{e^x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$ $\qquad x_0 = \dfrac{1}{2}$

11. $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x},$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

12. $y = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x,$ $\qquad x_0 = 0$

13. $y = arctgx \cdot \arccos x,$ $\qquad x_0 = 0$

14. $y = \log_2 x \cdot \ln x,$ $\qquad x_0 = 1$

15. $y = \dfrac{x^2}{\ln x},$ $\qquad x_0 = e$

16. $y = x^5 \cdot e^x,$ $\qquad x_0 = 5$

17. $y = xshx,$ $\qquad x = 1$

18. $y = e^x \cdot \arcsin x$ $\qquad x_0 = 1$

19. $y = \dfrac{\sin x}{\cos x - 1},$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

20. $y = \dfrac{x}{\cos x} - tgx$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

§ 4. Вычисление производной сложной функции к обратной функции.

Теорема 6. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция (композиция f и g) $z = \varphi(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0:

$$\varphi'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0). \tag{10}$$

Теорема 7. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и является обратной к функции $\varphi(y)$, которая непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда если $\varphi(y)$ дифференцируема в точке y_0 и $\varphi'(y_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)} . \tag{11}$$

Замечание. Если выражение, которое нужно продифференцировать, упрощается после логарифмирования, целесообразно сначала искать $(\ln|y|)$:

$$(\ln|y|)' = \frac{y'}{|y|} .$$

Поэтому $y' = |y| \cdot (\ln|y|)'$. (12)

Пример 1. Найти производную функции $z = e^{x^2}$.

Решение: Представим функцию $z = e^{x^2}$ в виде суперпозиции двух функций:

$$g(y) = e^{y} \quad y(x) = x^2.$$

По формуле (10) имеет:

$z' = g'(y) \cdot y'(x) = e^{y} \cdot 2x$. Представляя x^2 вместо y, получим $z' = e^{ч} \cdot 2x = 2x \cdot e^{x}$.

Пример 2. Вычислить производную функции $z = \ln \sin x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение: Функция $z = \varphi(x) = \ln \sin x$ является композицией двух функций: $y = f(x) = \sin x$ и $z = g(y) = \ln y$.

По формуле (10) имеем:

$$z' = g'(y) \cdot y'(x) = (\ln y)_y' \cdot (\sin x)_x' = \frac{1}{y} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$$

$$z'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ctg\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y = \ln \cos arctg\, 2x.$$

Применяя правило дифференцирования (формулу 10) сложной функции 4 раза, получим:

$$y' = \frac{1}{\cos arctgsh2x} \cdot (\cos arctgsh2x)' =$$

$$= \frac{1}{\cos arctgsh2x} \cdot (-\sin arctgsh2x) \cdot (arctgsh2x)' =$$

$$= \frac{-\sin arctgsh2x}{\cos arctgsh2x} \cdot \frac{1}{1 + sh^2 2x} \cdot (sh2x)' =$$

$$= -tgarctgsh2x \cdot \frac{1}{1 + sh^2 2x} \cdot ch2x(2x)' =$$

$$= -sh2x \cdot \frac{1}{1 + sh^2 2x} \cdot ch2x \cdot 2 =$$

$$= -\frac{2sh2xch2x}{1 + sh^2 2x} = -\frac{2sh2xch2x}{ch^2 2x} = -2th2x \,.$$

<u>Пример 4.</u> Вычислить производную функции

$$y = \ln \sqrt[3]{\frac{(x^2 + 4)^6 \cdot e^{tgx}}{1 + \cos x}} \,.$$

<u>Решение:</u> Предварительно упростим формулу, с помощью которой задана функция, используя свойства логарифмической функции:

$$y = \frac{1}{3}\ln(x^2 + 4)^6 + \frac{1}{3}\ln e^{tgx} - \frac{1}{3}\ln(1 + \cos x) =$$

$$= 2\ln(x^2 + 4) + \frac{1}{3}tgx - \frac{1}{3}\ln(1 + \cos x),$$

$$y' = \frac{2}{x^2+4}\cdot\left(x^2+4\right)' + \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{3}\frac{\left(1+\cos x\right)'}{1+\cos x} =$$

$$= \frac{4x}{x^2+4} + \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{\sin x}{3(1+\cos x)}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = (a+\cos x)^{x^2}$, $a \geq 2$.

Решение: Прологарифмируем формулу, с помощью которой задана функция:

$$(\ln y)' = \left(x^2 \cdot \ln(a+\cos x)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2x\cdot\ln(a+\cos x) + x^2\cdot\frac{-\sin x}{a+\cos x}$$

$$y' = \left(2x\cdot\ln(a+\cos x) - \frac{x^2\sin x}{a+\cos x}\right)\cdot y$$

$$y' = \left(2x\cdot\ln(a+\cos x) - \frac{x^2\sin x}{a+\cos x}\right)\cdot x^2\cdot\ln(a+\cos x)$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \frac{1+x^4}{\sqrt[3]{x^5}\cdot\cos^5 x}$,

$x \neq \frac{\pi}{2}n,\ \ n\in Z$.

Решение: Рассмотрим функцию $z = \ln|y|$.

$$z=\ln\left|\frac{1+x^4}{\sqrt[3]{x^5}\cos^5 x}\right|=\ln\left|1+x^4\right|-\frac{5}{3}\ln|x|-5\ln|\cos x|,$$

$$z'=\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{5}{3x}+\frac{5\sin x}{\cos x}.$$

По формуле (11), получим

$$y'=\left(\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{5}{3x}+5tgx\right)\cdot\frac{1+x^4}{\sqrt[3]{x^5}\cdot\cos^5 x}.$$

<u>Пример 7.</u> Найти производную функции, обратной к функции $y=\cos x+2x$.

<u>Решение:</u> Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, её производная не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому

$$x'=\frac{1}{2-\sin x}.$$

<u>Пример 8.</u> Найти $y'(x)$, если $x=shy$.

<u>Решение:</u> $x=shy$ непрерывна и строго монотонна при всех $y\in R$. Производная $x'=chy$ не обращается в нуль ни в одной точке. Следовательно

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{chy}=\frac{1}{\sqrt{1+sh^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

функция, обратная для гиперболического синуса, обозначается $arshx$, т.е. $y(x)=arshx$, $(arshx)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R$.

Задачи для самостоятельной работы

I. Найти производную сложной функции:

1. $y=arctg(2x+1)^4$
2. $y=arctg(\arcsin x)^2$
3. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$
4. $y=\sin^4 5x$
5. $y=arctg^3(2x-1)+\arcsin^2\sqrt{x}$
6. $y=\ln\left(\ln x^2\right)$
7. $y=\sqrt{\sin 4x+\cos 6x}$
8. $y=e^x\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$
9. $y=e^x\sin(\cos x)$
10. $y=5^{tgx}+e^{\cos x^2}$
11. $y=2\ln tg\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$
12. $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln tg\dfrac{x}{2}$

13. $y = \dfrac{e^x \sin x}{\cos^2 x}$

14. $y = \dfrac{tgx^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

15. $y = \cos^3 x^3 - e^x \cdot tgx$

16. $y = \ln^2 \cos^3 (2x + 1)$

17. $y = \arcsin^2 \left(\ln^3 \left(e^{x^2} + 5 \right) \right)$

18. $y = \dfrac{1 + x^2 arctgx^2}{\sqrt{1 + x^4}}$

19. $y = \ln |\cos x|$

20. $y = \dfrac{1}{2} \arcsin (2 \sin x)$

21. $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 + tgx} + \dfrac{\cos^2 x}{1 + tgx}$

22. $y = \sqrt{1 + tg\left(x^2 + x^{-2} \right)}$

23. $y = \log_4^3 (4x + 5)^4$

24. $y = \sin \ln |x|$

25. $y = \sin \dfrac{1}{\log_3 x}$

26. $y = 5arctg(2x + 2\pi)$

27. $y = arctge^x$

28. $y=2^{\frac{x}{\log_5 x}}$

29. $y=\frac{1}{a}arctg\,\frac{4x+1}{a}$ $\qquad (a\neq 0)$

30. $y=\sin\cos^2 x+\cos\sin^2 x$

31. $y=\sin x\cdot\ln tgx+\ln tg\,\frac{x}{2}$

32. $y=x^2(\sin x\cdot\ln x+\cos\ln x)$

33. $y=\cos x(5ar\cos x)$

34. $y=e^{arctg^4\sqrt{x^2+4}}$

35. $y=\ln^2\arcsin^3 x^2$

36. $y=\arccos^3(\ln^2\cos x)$

37. $y=(\arccos x)^3\cdot\ln^2(\arccos x)+x^2$

38. $y=sh^3 4x+ch^3\sqrt{x}$

39. $y=sh\ln(x^2+4)$

40. $y=\frac{\ln^2 tgx}{x^2\ln\sin^2 2x}+\ln tg\,\frac{x}{2}$

41. $y=e^{\arcsin\sqrt{x^2+1}}$

42. $y=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{x\sqrt{5}}{1+x^2}$

43. $y=10^{\sin x^3}$

44. $y=3^{\cos^2 x^4}$

45. $y = arctgtg^2 x$

46. $y = \log_2 \log_4 \log_5 x$

47. $y = tg^3 x + \ln \cos^2 x$

48. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin x + \sqrt{\sin 2x}\right)$

49. $y = \dfrac{x}{\sqrt{e^{x^2} - 1}} - arctg\sqrt{e^{x^2} - 1}$

50. $y = \ln tg\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\sin x}{2}\right)$

51. $y = \arccos\left(\sin x^4 - \cos x^4\right)$

52. $y = \dfrac{1}{\sin^4 x + 1} + \ln \dfrac{\sin^4 x}{\sin^4 x + 1}$

53. $y = arctge^{x/2} - \ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x - 1}}$

54. $y = ctg\,\alpha \cdot \ln \dfrac{1 + x\cos\alpha}{1 - x\cos\alpha} + \sin x^2$

55. $y = ctg\,\alpha \cdot arctg\,\dfrac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

56. $y = x^2 + \sqrt{3}arctg\,\dfrac{thx^2}{\sqrt{3}}$

57. $y = th + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\dfrac{1 + \sqrt{2}thx}{1 - \sqrt{2}thx}$

58. $y = x^2 + ctgx \cdot \ln(1 + \sin x)^2 - \ln tg\,\dfrac{x}{2}$

59. $y = e^x \arcsin \sqrt{\dfrac{e^x}{e^x + 1}}$

60. $y = \arcsin \dfrac{2x}{\left(1 + x^2\right)^2}$

II. Вычислить производную функций, используя свойства логарифмической, функции.

1. $y = \ln \dfrac{1 + x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

2. $y = \ln \dfrac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^4}}}$

3. $y = \ln \dfrac{2x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 2x + 1}$

4. $y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$

5. $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^2 - 3x + 4}}$

6. $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{\left(x^2 - 1\right)\left(x + 2\right)^2}{\left(x - 2\right)e^{arctgx}}}$

7. $y = \ln \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \cos^2 x}$

8. $y = \sqrt[6]{e^{\sin 4x \cdot \left(x^2 - 6\right)^5}}$

9. $y=\sqrt[12]{\dfrac{e^{\sin x+\cos x}}{\left(4x^3+2\right)^{36}}}$

10. $y=\left(x^3+3\right)^2\sqrt[3]{\left(x^3-6\right)^2 e^{\cos^2 x}}$

11. $y=e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}$

12. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}e^{x^2-2\arg tgx^2+\ln x^3}$

13. $y=e^{arctg\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt[3]{4x^2}+1\right)^2$

14. $y=\left(x^2+10\right)^{2x+1}$

15. $y=(\cos x)^{x-2}$

16. $y=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

17. $y=(\sin x)^{x^2+1}$

18. $y=\left(x^2\right)^{x^3}$

19. $y=x^{7/\ln x}$

20. $y=x^{e^x}$

21. $y=2^{x^x}$

22. $y=|\sin x|^{\cos x}$

23. $y=\left(\arcsin\sin^2 x\right)^{\arg tgx}$

24. $y=(shx)^{e^x}$

25. $y = x^{x/\ln^2 x}$

26. $y = \sqrt[x]{(2x\sin x + 1)^2}$

27. $y = x^{\sin x}$

28. $y = (x^2 + 2x + 3)^{tgx}$

29. $y = (\cos^2 x)^{x^3}$

30. $y = (\log_2 x)^{\arcsin x}$

31. $y = \dfrac{(x+1)^3 \sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

32. $y = (x+1)^2 (x-1)^3 \sqrt[5]{(x+2)^4}$

III. Вычислить производную обратной функции.

1. $y = x^4 + \dfrac{1}{3}x^3$

2. $y = 2x - \dfrac{\sin x}{2}$

3. $y = 3x + y^{3x}$

4. $y = 2x^2 - x^4,\qquad x > 1$

5. $y = x + \ln x,\qquad x > 0$

6. $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2},\qquad x < 0$

7. $y = x + e^x$

8. $y = chx,$ $\qquad x > 0$

9. $y = x + \ln x,$ $\qquad x > 0$

10. $y = x + e^x$

11. $y = shx$

12. $y = 2x^2 - x^4$

13. $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

14. $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$

15. $y = th\, x$

§5. Производная функции, заданной параметрически или неявно.

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и параметричеки задают в окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ функцию $y = f(x)$. Тогда, если $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и если $\varphi'(t) \neq 0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 также имеет производную, которая может быть найдена по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \qquad (13)$$

Пусть функция $y = y(x)$, дифференцируемая на некотором интервале, задана неявно уравнением $F(x;y) = 0$. Тогда её производную $y'(x)$ можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx}(F(x;y)) = 0. \qquad (14)$$

<u>Пример 1.</u> Функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \qquad t \in (0;\frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Найти y'_x.

<u>Решение:</u> функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы при всех t

$$x'_t = \varphi'(t) = -a\sin t$$
$$y'_t = \psi'(t) = b\cos t$$

Причём, $x'_t \neq 0$ на интервале $(0;\frac{\pi}{2})$.

По формуле (13) находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}tgt,\ t \in (0;\frac{\pi}{2}).$$

<u>Пример 2.</u> Функция $y = f(x)$ задана уравнением $r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, где r и φ - полярные координаты точки $(x;y)$. Найти y'_x.

Решение: перейдём к параметрическому заданию функции

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

$$x'_\varphi = a\frac{2(-\sin 2\varphi)}{2\sqrt{\cos\varphi}}\cdot\cos\varphi - a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi =$$

$$-a\frac{(\sin 2\varphi\cdot\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = -a\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$y'_\varphi = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\sin\varphi + a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi =$$

$$= a\frac{(-\sin 2\varphi\cdot\sin\varphi + \cos 2\varphi\cdot\cos\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Причём, $x'_\varphi \neq 0$ при $\varphi \in (0;\frac{\pi}{4})$.

По формуле (13) находим:

$$y'_\varphi = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} : \frac{a\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi} = ctg\,3\varphi.$$

Пример 3. Пусть функция $y = y(x)$ - положительная функция, заданная на интервале $(-a;a)$ неявно уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Найти $y'(x)$.

Решение: перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\,.$$

Продифференцируем его:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)'_x=0$$

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y'=0$$

Из этого уравнения найдём $y'(x)$:

$$y'(x)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},\ \ x\in(-a;a),\ \ y>0.$$

Задачи для самостоятельной работы

I. Найти производные для функций $y=y(x)$, заданных параметрически:

1. $\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\cos^2 t, \end{cases}$ $\qquad t\in(0;\frac{\pi}{2})$

2. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=b\sin^3 t, \end{cases}$ $\qquad t\in(0;\infty)$

3. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=b(1-\cos t), \end{cases}$ $\qquad t\in(0;\infty)$

4. $\begin{cases} x=acht \\ y=bsht, \end{cases}$ $\qquad t\in(-\infty;0)$

5. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}} \\ y = \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{t}}, \end{cases}$ $t \in (0;\infty)$

6. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3, \end{cases}$ $t \in (-\infty;\infty)$

7. $\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5 \\ y = \dfrac{t^3 - 54}{t}, \end{cases}$ $t \in (0;\infty)$

8. $\begin{cases} x = (t-1)^2(t-2) \end{cases}$
$y = (t-1)^2(t-3),$ $t \in (\frac{5}{3};\infty)$

9. $\begin{cases} x = \ln\sin(\dfrac{t}{2}) \\ y = \ln\sin t, \end{cases}$ $t \in (0;\pi)$

10. $\begin{cases} x = e^{2t}\cos^2 t \\ y = e^{2t}\sin^2 t, \end{cases}$ $t \in (0;\infty)$

11. $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases}$ $t \in (0;\infty)$

12. $\begin{cases} x = t + 2t^2 + t^3 \\ y = -2 + 3t - t^3, \end{cases}$ $t \in (1;\infty)$

13. $\begin{cases} x = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t \\ y = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t, \end{cases}$ $t \in (1;\infty)$

14. $\begin{cases} x = \dfrac{2\cos 2t - 1}{2\cos t} \\ y = ctg\, 2t, \end{cases}$ $\quad t \in (0; \dfrac{\pi}{2})$

15. $r = a\varphi$ $\quad \varphi \in (\dfrac{4\pi}{3}; 2\pi)$

16. $r = e^{\varphi}$ $\quad \varphi \in (-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6})$

17. $r = a(1 + \cos\varphi),$ $\quad \varphi \in (0; \dfrac{2\pi}{3})$

18. $r = ae^{m\varphi}$

II. Найти производные для дифференциальных функций $y = y(x)$, заданных неявно:

1. $x - y^5 - y^3 + y = 0$
2. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$
3. $y^2 = 2px,$ $\quad y > 0$
4. $y - x = \varepsilon \sin y$ $\quad |\varepsilon| < 1$
5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
6. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ $\quad y = 0$
7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$
8. $(2a - x)y^2 = x^3,$ $\quad y < 0$

9. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$

10. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, $\quad y>0$

11. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$, $\quad y<-1$

12. $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$, $\quad x<2y-1$

13. $x^2+y^2-6x+10y-2=0$

14. $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$

15. $e^y+xy=e$ $\quad y>0$

16. $xy+\ln y=1$ $\quad y<e^2$

17. $arctg\,\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

18. $y^3-3y+2ax=0$

19. $x^2+3xy+y^2+1=0$

20 $e^y+xy=e$

21. $\sin x+yx-5y=0$

22. $x^2+y^2=5e^x$

23. $x^3+y^3=3axy$

24. $y=\sin(x+2y)$

25. $x-y=\sin y$

26. $x^2+xy+y^2=3$

27. $ye^y-xe^x=y(x-1)$

28. $e^y + xy = e$

29. $e^{xy} + x^2 + y^3 = 2$

30 $\sin(2x+3y) - 2y = 0$

§6. Понятия односторонней и бесконечной производных.

Говорят, что функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет бесконечную производную, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty. \qquad (15)$$

Односторонний предел

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0), \qquad (16)$$

называется правой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Односторонний предел

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0), \qquad (17)$$

называется левой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Теорема. Для существования производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно существование в этой точке правой и левой производных и их равенство.

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на отрезке $[a;b]$, если она дифференцируема на интервале $(a;b)$ и существуют конечные односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

Пример1. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ бесконечную производную.

Решение:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^2} = +\infty .$$

Пример 2. Найти односторонние производные в точке $x = 1$ для функции $f(x) = \left|2^x - 2\right|$.

Решение:

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\left|2^{1+\Delta x} - 2\right| - 0}{\Delta x} =$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\left|2^{\Delta x} - 1\right|}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x \to +0} \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} 2^{\Delta x} - 1 = t \\ \Delta x = \log_2(1+t) \\ t \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= 2\lim_{t \to +0} \frac{t}{\log_2(1+t)} = 2\frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\log_2(1+t)}{t}} = 2\ln 2 = \ln 4.$$

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\left|2^{1+\Delta x}-2\right|-0}{\Delta x}=$$
$$=2\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\left|2^{\Delta x}-1\right|}{\Delta x}=-2\lim_{\Delta x\to -0}\frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x}=-2\ln 2=-\ln 4.$$

Пример 3. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{если } x<0\\ x^2, & \text{если } x\geq 0,\end{cases}$$

дифференцируема в точке $x=0$.

Решение: Найдём односторонние производные в $x=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$
$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta x^3-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^2=0,$$

т.к. $f'_+(0)=f'_-(0)$, то производная функции $y=f(x)$ в точке $x=0$ существует, и она равна нулю, а значит $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$.

Пример 4. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } x<0\\ \sin x, & \text{если } x\geq 0\end{cases}$$

не имеет производной в точке $x=0$.

Решение: Найдём односторонние производные в точке $x=0$.

$$f'_{+}(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sin\Delta x-\sin 0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta x^{2}-\sin 0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\Delta x=0.$$

т.к. $f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$, то функция не дифференцируема в точке x_0.

Задачи для самостоятельной работы

I. Найти односторонние производные.

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}(1-x^2), & \text{если } x\neq 0\\ 1, & \text{если } x=0\end{cases}$

2. $f(x)=\sqrt{16-8x^2-x^4}$ $\qquad x=\pm 2$

3. $f(x)=(1-x^2)\sin x$

4. $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$ $\qquad x=\pi n$

5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{если } x\neq 0\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$

6. $$f(x)=\begin{cases} arctg\,\dfrac{1+x}{1-x}, & \text{если } x\neq 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x=1 \end{cases}$$

7. $f(x)=\ln\left|x^2-4x+3\right|$

8. $f(x)=\left|\ln|x-4|\right|$

9. $$f(x)=\begin{cases} arctg\,\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x=0 \end{cases}$$

10. $f(x)=\arcsin(\sin x)$

11. $f(x)=\arccos\dfrac{1}{x}$

12. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

13. $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

14. $f(x)=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

15. $f(x)=\arccos\dfrac{2x+1}{x\sqrt{8}}$

16. $f(x)=\arccos(3x-4x^2)$

17. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0 \\ 0 \quad, & \text{если } x=0 \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} x\,arctg\,\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0 \\ 0 \quad, & \text{если } x=0 \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} x \quad, & x\leq 0 \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & x>0 \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} 2x \quad, & x<0 \\ \ln(1+\sqrt[8]{x^7}), & x\geq 0 \end{cases}$

II. Проверить дифференцируемость функций в указанных точках.

1. $f(x)=|x|,\qquad x=0$
2. $f(x)=|x-1|,\qquad x=1$
3. $f(x)=|x^2-5x+6|,\qquad x=2, x=3$
4. $f(x)=|\ln x|,\qquad x=1$
5. $f(x)=|2^x-2|,\qquad x=1$
6. $f(x)=\sqrt[3]{\sin\pi x},\qquad x=k, k\in Z$

7. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$, $\quad x=0,\ x=\sqrt{\pi}$

8. $f(x)=\arccos(\sin x)$, $\quad x=\pi n,\ n\in N$

9. $f(x)=\sin x|\cos x|+\cos x|\sin x|$, $\quad x=\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$

10. $f(x)=x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$, $\quad x=\dfrac{2}{2k+1},\ \mathrm{k}\in \mathrm{Z}$

11. $f(x)=\arccos\dfrac{1}{x}$, $\quad x=\pm 1$

12. $f(x)=\arcsin\sin x$, $\quad x=\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z$

13. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $\quad x=0$

14. $f(x)=\begin{cases} x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $\quad x=0$

15. $f(x)=\begin{cases} (x-2)arctg\dfrac{1}{x-2}, & x\neq 2\\ 0, & x=2,\end{cases}$ $\quad x=2$

16. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, $\quad x=0$

17. $f(x)=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$, $\quad x=\pi k,\ k\in Z$

18. $f(x)=\arcsin(\cos x)$, $\quad x=\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in Z$

19. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}(x+1)^2, & |x|\le 1\\ |x|-1 &, |x|>1,\end{cases}$ $\qquad x=\pm 1$

20. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0 &, x=0,\end{cases}$ $\qquad x=0$

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. "Курс дифференциального и интегрального исчисления", ГТТН, Л-1951 г. и послед. изд.
2. Никольский С.М. "Курс математического анализа", Т. 1, "Наука", М-1975 г.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. "Основы математического анализа", Т. 1. "Наука", М-1982 г.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. "Дифференциальное и интегральное исчисление", "Наука", М-1980 г.
5. Пискунов Н.С. "Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов", Т. 1. "Наука", М-1970 г.
6. Бутузов В.Ф. и другие "Математический анализ в вопросах и задачах", "Высшая школа", М-1984 г.

Учебно-методическое пособие

Дифференциальное исчисление функции одной переменой

Ласурия Р.А.,
Сичинава Н.К,
Хупория Н.З.

Набор, компьютерная верстка: Пачулиа Н.Н.