Абхазский государственный университет

Физико-математический факультет
кафедра математического анализа

Сичинава Н.К., Хупория Н.З., Ласурия Р.А.

Теория пределов

Учебно-методическое пособие

Сухум
2019 г.

Сичинава Нона Калистратовна, Хупория Нона Зурабовна, Жвелия Илона Шалвовна, Ласурия Роберт Андреевич. **Теория пределов –** Сухум: АГУ, 2019 – 42 с.

Данное методическое пособие предназначено для студентов ВУЗов. Целью пособия является приобретение студентами практических навыков по решению задач, вычисление пределов последовательности и функции, применению асимптотических формул. Материал разбит на параграфы, в начале которых даны краткие пояснение теории, необходимые для решения последующих задач. Пособие может быть использовано для самостоятельных и контрольных работ.

Рецензент: академик Пачулиа Н.Л.

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом АГУ

2-ое издание

Содержание

Предел последовательности чисел.

Если каждому натуральному числу **n** поставлено в соответствие по определённому закону некоторое число x_n, то говорят, что определена числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Кратко её обозначают символом $\{x_n\}$или (x_n). Число x_n называется членом (элементом) последовательности, а n – номером члена.

Определение 1.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists$ $M > 0$ такое, что $\forall n,\ |x_n| \le M$.

Определение 2.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если $\forall\ M > 0,\ \exists\ n;\ |x_n| > M$

Определение 3.

Число b называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если абсолютная величина разности x_n-b, начиная с некоторого номера N остаётся меньшей любого заранее данного положительного числа ε: то есть

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \mathrm{N};\ \forall \mathrm{n} \ge \mathrm{N} \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Определение 4.

Последовательность, имеющая конечный предел называется сходящейся. В противном случае последовательность называется расходящейся.

Теорема 1.

Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2. (необходимое условие сходимости последовательности)

Сходящаяся последовательность ограничена.

Контрольные вопросы и задания

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

   а) могут ли все члены последовательности быть положительными (отрицательными) если $a = 0$?

   б) может ли последовательность иметь бесконечно много отрицательных (равных нулю) членов, если $a > 0; a \neq 0$?

   в) докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+2} = a.$

   г) докажите, что $\{x_n\}$ ограничена.

2. Пусть в некоторой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, следует ли из этого условия, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$? б) никакая точка вне этой окрестности не является пределом последовательности $\{x_n\}$? в) $\{x_n\}$ ограничена?

3. Пусть в любой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли отсюда, что а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?, б) $\{x_n\}$- ограничена?

4. Пусть последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной (неограниченной). Следует ли из этого условия, что она сходится (расходится)?
5. Докажите, что сходящаяся последовательность имеет только один предел.
6. Сформулировать на языке "$\varepsilon - N$" определение того, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$ $(a \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ и дать геометрическую интерпретацию этого определения.

Примеры решения задач.

Пользуясь определением предела последовательности, доказать что $a)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+3}=2,\ б)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n}=0,$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7\cdot 3^n}{3^n-2}=7$.

а) зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности между n – м членом последовательности и числом 2:

$$\left|\frac{2n}{n+3}-2\right|=\frac{6}{n+3}$$

по определению предела последовательности мы должны указать номер, такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$\frac{6}{n+3}<\varepsilon \qquad (1)$$

решим неравенство (1) относительно n.

$$n > \frac{6}{\varepsilon} - 3 \qquad (2)$$

Из неравенства (2) следует, что в качестве N можно взять целую часть числа $(\frac{6}{\varepsilon} - 3)$; $N = \left[\frac{6}{\varepsilon} - 3\right]$

Действительно, если n>N, то $n \geq \left[\frac{6}{\varepsilon} - 3\right] + 1 > \frac{6}{\varepsilon} - 3$, т.е. справедливо (2), а значит, $\forall n > N$ выполняется и неравенство (1).

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

$$\left|\frac{\cos n}{n}\right| < \frac{1}{n} \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

итак $\forall \varepsilon < 0 \;\; \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \;\; \forall n > N \Rightarrow \left|\frac{\cos n}{n}\right| < \varepsilon;$ то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

в) $\lim \frac{7 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 7$

$$\left|\frac{7 \cdot 3^n}{3^n - 2} - 7\right| = \frac{14}{3^n - 2}$$

$$\frac{14}{3^n - 2} < \varepsilon \quad n > \log_3(\frac{14}{\varepsilon} + 2)$$

$$N = \left[\log_3(\frac{14}{\varepsilon} + 2)\right]$$

итак $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \left[\log_3 \left(\frac{14}{\varepsilon} + 2\right) \right]$ что $\forall n > N$ выполняется неравенство $\left| \frac{7 \cdot 3^n}{3^n - 2} - 7 \right| < \varepsilon$ отсюда следует $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 7$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Записать 4-5 первых членов последовательности по известному n – ому члену.

а) $x_n = \frac{3n - 2}{n^2 + 1}$

б) $x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n^2}$

в) $x_n = \frac{(2 + \sin \frac{n\pi}{2}) \cos n\pi}{n!}$

г) $x_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}$

д) $x_n = \frac{1}{\left[3 + (-1)^n\right]^n}$

2. Написать простейшую формулу n – го члена последовательности по указанным членам.

а) $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \ldots$

б) $1; \frac{2}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{8}; \ldots$

в) $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \ldots$

г) $1; \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4}; \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7}; \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}; \ldots$

д) 1; -1; 1; -1; …

е) $1; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{4}; 5; \frac{1}{6}; \ldots$

ж) $\frac{2}{5}; \frac{4}{8}; \frac{6}{11}; \frac{8}{14}; \ldots$

Доказать:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n 2=0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n+5}=3$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3+2n+1}=0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5\cdot 6^n}{3^n+6^n}=5$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}=0$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2+2}=\dfrac{1}{2}$

8) $\lim\dfrac{7n^3+1}{2n^3+3n+1}=3{,}5$

Вычисление пределов

Непосредственное вычисление пределов опирается, в основном, не на определение предела, а на использование свойств предела выводимых из этого определения.

Теорема 1.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a;\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, тогда:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=ab$

в) если $b\neq 0$, то начиная с некоторого номера определена последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}=\dfrac{a}{b}$.

Определение 1.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то есть если $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$, то числовая последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечной малой.

Геометрически это означает, что в любой ε-окрестности нуля, начиная с некоторого номера n_0, находятся все члены последовательности $\{x_n\}$.

Определение 2.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, то есть если $\forall M > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| > M$, то последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой.

Геометрически это означает, что вне любой окрестности нуля, начиная с некоторого n_0, содержатся все члены последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 2.

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой.

Теорема 3.

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 4.

Если последовательность $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то начиная с некоторого номера n определена последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, которая является бесконечно малой. Если последовательность $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n \ x_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно большой.

Определение.

Будем говорить, что бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ имеет более высокий порядок роста, чем бесконечно большая последовательность $\{y_n\}$, если $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ - бесконечно большая, при этом будем употреблять обозначения $y_n << x_n$ справедливы соотношения: $\log_a n << n^\alpha << a^n << n!$ при $\alpha > 0$ $|a| > 1$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ называют неопределённостью типа $\frac{0}{0}$. Аналогично определяются неопределённости типа $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 1^∞.

Примеры решения задач

Пример 1.

Пусть x_n многочлен степени *k* относительно *n*:

$$x_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \ldots + a_{k-1} n + a_k \qquad (a_0 \neq 0)$$

как ведёт себя многочлен при $n \to +\infty$?

Если все a_i $i = \overline{0;k}$ одного знака, то x_n бесконечно большая того же знака. При разных знаках коэффициентов имеем неопределённость вида $(\infty - \infty)$. Для раскрытия неопределённости вынесем за скобки высшую степень n: $x_n = n^k (a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k})$ в скобках все слагаемые, кроме первого являются бесконечно малыми. Множитель n^k - величина бесконечно большая. Отсюда следует, что x_n стремится к $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от знака a_0.

Пример 2.

Пусть x_n представляет собой частное двух многочленов:

$x_n = \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + b_2 n^{m-2} + \ldots + b_{m-1} n + b_m}$ $(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0)$ рассмотрим $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, ясно что имеется случай неопределённости вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вынося за скобки в числителе n^k, а в знаменателе n^m получим

$$x_n = n^{k-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{b_m}{n^m}}$$

Если $k > m$, то $n^{k-1} \to \infty$ и, следовательно, $x_n \to \pm\infty$ (знак совпадает со знаком $\frac{a_0}{b_0}$).

Если $k = m$, то $n^{k-m} = n^0 = 1$; $x_n \to \frac{a_0}{b_0}$

Если $k < m$, то $n^{k-m} = \frac{1}{n^{m-k}} \to 0$ и $x_n \to 0$

Пример 3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Здесь для раскрытия неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$ поделили числитель и знаменатель на n^2.

Пример 4.

Найти предел последовательности $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}$ (неопределённого типа $\infty - \infty$). Если правую часть умножить и разделить на сумму $\sqrt{n^2+2}+\sqrt{2n-1}$, то получим неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{2n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{2n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}=\infty$$

Пример 5.

Найти предел переменной $x_n=\frac{1+2+3+...+n}{n^2+5}$ (неоп. $\frac{\infty}{\infty}$)

т.к. $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

Пример 6.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

С помощью формулы бинома Ньютона, можно 2^n представить в виде

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+...+1=1+n+(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2})+...+1,$$

но $1+n+(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2})+...+1>1+n+(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2})>\frac{n^2}{2}$ т.к. все

пропущенные слагаемые положительны $0<\frac{1}{2^n}<\frac{2}{n^2}$ или

умножая на n $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n}$ но $\frac{2}{n}\to 0$, тогда и $\frac{n}{2^n}\to 0$.

Пример 7.

Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

Представим переменную $\sqrt[n]{n}$ в виде суммы $1+\alpha_n$ и докажем, что α_n - бесконечно малая.

$\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$ $\alpha_n\geq 0,\ \forall n$ возведём обе части в n–ую степень получим:

$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha_n^2+...+\alpha_n^n$, т.к. все члены справа неотрицательны, то $\forall n>1$ справедливо неравенство

$$n>1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha_n^2$$

$n-1>\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha_n^2$ сокращая на n-1 получим

$1>\frac{n}{2}\alpha_n^2\Rightarrow\frac{2}{n}>\alpha_n^2$ или $\sqrt{\frac{2}{n}}>\alpha_n\geq 0$, но $\sqrt{\frac{2}{n}}\to 0$ при $n\to 0$, то $\alpha_n\to 0$.

Пример 8.

Доказать $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad a>0.$

$\forall n$ начиная с некоторого будет выполняться неравенство $\frac{1}{n}<a<n$, тогда $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$, но по предыдущему примеру $\sqrt[n]{n}\to 1$ и $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to 1$, то $\sqrt[n]{a}\to 1$.

Пример 9.

$$x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)^n}$$

т.к.

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$---------$$

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

то $x_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=1\frac{1}{n}$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$ ответ $\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$ ответ $\frac{1}{3}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ ответ 1

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$ ответ $\frac{1}{4}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+8}+\frac{\cos n}{2n}\right)$ ответ $\frac{2}{3}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n+\frac{1}{n}\right)$ ответ предела не существует

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin n}{n}+\frac{n+1}{\sqrt{n^2-5n+6}}\right)$ ответ 1

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{n+1}$ ответ 0

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}\right)$ ответ 0

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ ответ ∞

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}-1}{\sqrt[3]{n+1}+1}$ ответ 1

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-2)(n+2)}{n^3-n^2+5n-2}$ ответ 1

Предел функции

<u>Определение 1.</u> (по Коши) Число ***b*** называется пределом функции ***f(x)*** в точке ***a*** (при $x \to a$), если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющего условиям $x \in X \quad 0 < |x\text{-}a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

<u>Определение 2.</u> (по Гейне) Число ***b*** называется пределом функции ***f(x)*** в точке ***a***,если для любой сходящейся к ***a*** последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in X$, (X – область определения функции $f(x)$) $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к ***b***.

Примеры:

На основании определения предела функции доказать, что

а) $f(x) = \sin x$ при $x \to \infty$ не имеет предела

б) $\lim\limits_{x \to 2}(3x - 5) = 1$

в) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x - 1) = -3$

а) Покажем, что функция не удовлетворяет определению по Гейне, т.е. укажем такую бесконечно большую последовательность $\{x_n\}$, что $\{\sin x_n\}$ - расходится.

Положим $\{x_n\} = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$, соответственно последовательность функций $\{\sin x_n\} = -1,1,-1,1,\ldots$ расходится.

б) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1$

$|3x-5-1|<\varepsilon \quad 3(x-2)<\varepsilon \quad |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}\Rightarrow\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ при $\varepsilon=1 \quad \delta=\dfrac{1}{3}$;

при $\varepsilon=\dfrac{1}{2} \quad \delta=\dfrac{1}{6}$; при $\varepsilon=\dfrac{1}{100} \quad \delta=\dfrac{1}{300}$

в) Покажем по Гейне, что $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x-1)=-3$ пусть

$\underset{n\to\infty}{\{x_n\}\to 2}\Rightarrow\lim\limits_{x_n\to 2}x_n^2=4,\quad \lim\limits_{x_n\to 2}3x_n=6.$

$\lim\limits_{x_n\to 2}f(x_n)=\lim\limits_{x_n\to 2}(x_n^2-3x_n-1)=4-6-1=-3$

По Коши: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |x-2|<\delta\ |x^2-3x-1-(-3)|<\varepsilon$

$$|x^2-3x-1+3|=|x^2-3x+2|=\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right|=$$

$$=\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|=|x-2||x-1|$$

$|x-1|=|(x-2)+1|\le|x-2|+1<\delta+1$

$|x-2|\cdot|x-1|<\delta(\delta+1)$, δ выберем так, чтобы

$$\delta(\delta+1)=\varepsilon \quad \delta^2+\delta-\varepsilon=0 \quad \delta=-\frac{1\pm\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\varepsilon}$$

т.к. $\delta>0$; $\delta=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\varepsilon}.$

Непосредственное вычисление пределов функции, как и пределов последовательности, опирается на использование свойств придела.

Справедливы теоремы:

Теорема 1.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = b \pm c$
2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = b \cdot c$
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c} \quad c \neq 0$

Теорема 2.

Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b \quad f(x) \le g(x) \le h(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

При вычислении пределов постоянно используется тот факт, что если *f(x)* – элементарная функция и точка *a* принадлежит её области определения, то

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (свойства непрерывности *f(x)* в точке *a*)

Для неэлементарных функций подобное равенство, вообще говоря, не обязательно выполняется. При вычислении приделов от элементарных функций трудности возникают при $x \to a$, где a не входит в область определения функции, либо при $x \to \infty$.

I. Рассмотрим пределы вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно. Чтобы избавится от неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ следует числитель и знаменатель разделить на $x^к$, где $k=max(m,n)$, а затем применить теорему о пределах.

Очевидно что:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0 & \text{при } n<m\\ \infty & \text{при } n>m\\ L & \text{при } n=m\end{cases}$$

где L – равно отношению коэффициентов при старших степенях x.

Примеры:

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{100x^2+1}{x^2+100}=\lim_{x\to\infty}\frac{100+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{100}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(100+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{100}{x^2}\right)}=\frac{100}{1}=100$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{40}\left(\dfrac{5x+1}{x}\right)^{10}}{\left(\dfrac{3x^2-2}{x^2}\right)^{25}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{40}\left(5+\frac{1}{x}\right)^{10}}{\left(3-\frac{2}{x^2}\right)^{25}}=\frac{5}{3}$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100x}{x^2+30}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+4}{x+3}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2+3x+4}{2x^3+3x+8}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+8}{x^2+18x-8}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-4}{x^3+8}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-5x-8}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{4x^{10}+x^3+1}-x^2}{3+x+\sqrt{x^5+6}}$

II. Вычисление пределов вида: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где *P(x)* и *Q(x)* – многочлены.

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{P(a)}{Q(a)} \text{ при } Q(a)\neq 0\\ \infty \quad \text{при} \quad Q(a)=0,\ \ \mathrm{P}(a)\neq 0\\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)} \text{ при } \quad Q(a)=0,\ \ \mathrm{P}(a)=0\end{cases}$$

где $Q_1(x)$, $\mathrm{P}_1(x)$ - многочлены степени на 1 меньше, чем $Q(x)$, $\mathrm{P}(x)$ соответственно, так как *x=a* является корнем многочлена *P(x)* в том и только в том случае, если *P(x)* нацело делится на *(x-a)*.

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2+25}=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=-\dfrac{3}{3}=-1$

Упражнения для самостоятельной работы.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-8x}{5x^2+3x}$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9}{x^2-6x+9}$

8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x^2-(a+1)x+a}$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

III. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ часто возникает в тригонометрических пределах. При этом все они сводятся, как правило, к использованию первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Примеры:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1$$

2) $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a$$

3) $$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\begin{vmatrix}x=1-y\\ y\to 0\end{vmatrix}=\lim_{y\to 0}ytg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}yctgy=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y=1$$

Упражнения для самостоятельной работы:

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$

4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\,\pi x}{x+2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} ctg\,2x\,ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{\sin 3x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

IV. Приделы вида $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=c$.

1. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=B$, то $C=A^B$

2. Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\neq 1$ $(A>0)$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\pm\infty$, то вопрос о нахождении предела (1) решается непосредственно.

3. Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$, то вычисление пределов неопределенности 1^{∞} базируется на использовании второго замечательного предела и следствий из него.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Пологая $\varphi(x)=1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, получим

$$C=\lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)}$$

Если существует и положителен $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$.

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\ln(1+t)}-1}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x+3}\right)^{x+3-1}=e^{-4}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x+3}\right)=e^{-4}$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{x^2}-e^{a^2}}{x-a}=e^{a^2}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{x^2-a^2}-1}{x-a}=e^{a^2}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{x^2-a^2}-1}{x^2-a^2}(x+a)=$

$=e^{a^2}\lim\limits_{x\to a}(x+a)=2ae^{a^2}$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-1}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^3-3}{x-e}$

3. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

V. Вычисление пределов сильно упрощается, если использовать понятие эквивалентности бесконечно малых.

Определение. Функции *f(x)* и *g(x)* называются эквивалентными при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$; записывается $f \sim g$.

Эквивалентность функций обладают следующими свойствами:

1.) $f \sim f$

2.) $f \sim g$ при $x \to a$ $\Rightarrow g \sim f$ при $x \to a$

3.) $f \sim g$ при $x \to a$ и $g \sim h$ при $x \to a$ $\Rightarrow h \sim f$ при $x \to a$.

Теорема 1.

При вычислении пределов в произведении и отношении можно заменить функции на эквивалентные. А именно, если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) f(x) = \lim\limits_{x \to a} \beta(x) f(x)$, либо оба предела не существуют одновременно, и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\beta(x)}$ либо эти пределы не существуют одновременно

Необходимо помнить список эквивалентных бесконечно малых.

1. $\sin\alpha \sim \alpha \qquad \alpha \to 0$
2. $tg\alpha \sim \alpha \qquad \alpha \to 0$
3. $1 - \cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2} \qquad \alpha \to 0$
4. $\arcsin\alpha \sim \alpha \qquad \alpha \to 0$
5. $\arg tg\alpha \sim \alpha \qquad \alpha \to 0$

6. $\ln(1+\alpha)\sim\alpha \qquad \alpha\to 0$

7. $e^{\alpha}-1\sim\alpha \qquad \alpha\to 0$

8. $(1+\alpha)^{P}-1\sim P\alpha \qquad \alpha\to 0$

9. $\ln z\sim z-1 \qquad z\to 0$

10. $z^{P}-1\sim P(z-1) \qquad z\to 1$

Здесь α и z могут быть независимыми переменными, а функциями $\alpha(x)$ и $z(x)$ стремящимися соответственно к 0 и 1 при некотором поведении x.

Например: $\ln\cos x\sim(\cos x-1)$ при $x\to 0$

$e^{x^2-1}-1\sim x^2$ -1 при $x\to 1$

Примеры:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x^2}-1}{\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}=-2$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[5]{\cos\sqrt{x}}}{\arcsin(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\left[\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/5}-1\right]}{e^x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{5}\left[\cos\sqrt{x}-1\right]}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{10x}=\frac{1}{10}$$

3. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2\left[\left(\frac{x^2-1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]}{x-3}=2\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{8}-1\right)}{x-3}=$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{8(x-3)} = \frac{1}{12}\lim_{x\to 3}(x+3) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x \cdot \sin 3x}{\left(x-x^3\right)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\frac{1}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(e^{1/x^2-1}\right)\left(x+x^2\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}}{\ln(1-x)}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$

VI. Правило Лопиталя – Бернули.

Пусть однозначные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы при $0<|x-a|<h$ причем производная $\varphi'(x)$ не обращается в нуль, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ - обе бесконечно малые или обе бесконечно большие при $x \to a$, т.е. если частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляет в точке *x*=*a* неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Для раскрытия неопределенностей типа $0\cdot\infty$ преобразуем произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)$ где $f_1(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$, $f_2(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty$ в частное $\dfrac{f_1(x)}{\dfrac{1}{f_2(x)}}$ $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{f_2(x)}{\dfrac{1}{f_1(x)}}$ $\dfrac{\infty}{\infty}$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\sin x=1\cdot 0=0$

2. $\lim\limits_{x\to +0}x^x=\lim\limits_{x\to +0}e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-2tgx}{1+\cos 4x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} tg\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

VII. Метод замены бесконечно малой на эквивалентную имеет тот недостаток, что он применим только к произведению и отношению функций, но не работает в случае суммы или разности.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят что $\alpha(x)$

является бесконечно малой более высокого порядка при $x\to a$, чем $\beta(x)$ и пишут $\alpha=0(\beta)$.

Например $x^2=0(x)$ $x\to 0$.

Свойства символа «0 малое»:

1. $0(\beta)\pm 0(\beta)=0(\beta)$

2. $0(c\beta)=0(\beta)$ $\forall c\neq 0$

3. $c0(\beta) = 0(\beta)$ $\forall c \neq 0$

4. $0(\beta^n) = 0(\beta^k)$ $n \geq 2 \quad k = \overline{1, n-1} \quad n \in N$

5. $(0(\beta))^n = 0(\beta^n)$ $\forall n \in N$

6. $\beta^n 0(\beta) = 0(\beta^{n+1})$ $n \in N$

7. $\dfrac{0(\beta^n)}{\beta} = 0(\beta^{n-1})$ $n \geq 2 \quad n \in N$

8. $0\left(\sum c_k \beta^{k^k}\right) = 0(\beta)$

9. $0(0(\beta)) = 0(\beta)$

10. $0(\beta + 0(\beta)) = 0(\beta)$

11. $\alpha\beta = 0(\alpha) \quad \alpha\beta = 0(\beta)$

12. $\alpha \sim \beta$ *то* $\alpha - \beta = 0(\alpha) \quad \alpha - \beta = 0(\beta)$

Примеры:

Доказать, что если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые одного порядка $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, то $\alpha(x) = c\beta(x) + 0(\beta)$

Доказательство:

Так как $\lim\limits_{x\to a}(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-c)=0$ или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)-c\beta(x)}{\beta(x)}=0$, то по определению символа $0(\beta)$ имеем $\alpha(x)-c\beta(x)=0(\beta)$ или $\alpha(x)=c\beta(x)+0(\beta)$ $x\to a$

Справедливы формулы

1. $\sin\alpha=\alpha+0(\alpha)$
2. $tg\alpha=\alpha+0(\alpha)$
3. $\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2}+0(\alpha^2)$
4. $\arcsin\alpha=\alpha+0(\alpha)$ $\alpha\to 0$
5. $arctg\alpha=\alpha+0(\alpha)$ $\alpha\to 0$
6. $\ln(1+\alpha)=\alpha+0(\alpha)$
7. $e^{\alpha}=1+\alpha+0(\alpha)$
8. $(1+\alpha)^p=1+p\alpha+0(\alpha)$
9. $\ln z=z-1+0(z-1)$ $z\to 1$
10. $z^p=1+p(z-1)+0(z-1)$ при $z\to 1$

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 tgx}$

$e^{x^2}=1+x^2+0(x^2)$ $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+0(x^2)$

$\sin^2 tgx\sim tg^2 x\sim x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2+0(x^2))-(1-\frac{x^2}{2}+0(x^2))}{x^2}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + 0(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2} + 0(1)\right) = \frac{3}{2}$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2} - \sqrt[5]{x^5-2x^4}\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}\sqrt[5]{1-\frac{2}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left[(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{x} + 0(\frac{1}{x})) - (1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{x} + 0(\frac{1}{x}))\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{26}{15}\frac{1}{x} + 0(\frac{1}{x})\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{26}{15} + 0(1)\right] = \frac{26}{15}$$

Упражнения для самостоятельной

$$\lim_{x\to 0}(e^x + x)\frac{1}{\arcsin x + \sin 2x}$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{e^{\sin x} - \cos\sqrt{x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sin x - \cos x}{\sin x - \ln(1+x)}$$

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$

3) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\sin^2 2x}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x^2$

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\qquad (a>0)$

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$

8) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\,\dfrac{\pi ч}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}\qquad (m,n\in N)$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{1+x-x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

12) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$

13) $\lim(\dfrac{1+\mathrm{x}}{2+\mathrm{x}})^{\frac{1-\sqrt{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{x}}}$ при $x\to +0,\ x\to 1,\ x\to +\infty$

14) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4+0}}\left[tg\dfrac{\pi}{8}+x\right]^{tg\,2x}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{ax+1}{bx+2})^{x}$ $(a^2+b^2\neq 0)$

16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$

17) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{(ch(\frac{\pi}{n})-1)}$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a})^{n}$ $(\mathrm{a}>0,\ b>0)$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$ $(m,n\in N)$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+9x}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$

21) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^4 3\sqrt{x}}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln ch2x}{\ln\cos 3x}$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{3x}}{\sin(\frac{x^2}{2})-\sin x}$

24) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)\quad (a>0)$

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{ch(\frac{\pi}{n})}{\cos(\frac{\pi}{n})}\right)^2$

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x2}$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{x3}{1-x}}$

28) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\left(\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$

29) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$

30) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{n}}(tgx)^{tg2x}$

31) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln\cos(\pi\cdot 2^x)}$

32) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}\quad (a>0)$

33) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln tg(\frac{\pi}{4}+ax)}{\sin bx}$

34) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}\quad (a>0)$

35) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$

36) $\lim\limits_{n\to\infty}(ch\dfrac{\pi}{n}-1)^{\frac{1}{\ln n^{-1}}}$ 37) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin(\ln\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{n}})$

38) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\dfrac{n}{n+1})^a+\sin\dfrac{1}{n}\right]^n$

39) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi\sqrt{n^2+n})$

40) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln chx)$

41) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})\quad a>0$

42) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(e^{x^2}+2\sqrt{x})}{tg\sqrt{x}}$

43) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[13]{x}-\sqrt[7]{x}}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}}$

44) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos(2\pi(\dfrac{x}{x+1})^{a})\right]^{x^2}$

45) $\lim\limits_{n\to\infty} tg^{n}\left[\dfrac{\pi-4}{4}+(1+\dfrac{1}{n})^{2}\right]$

46) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^{x}$

47) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^{2}+e^{x})}{\ln(x^{4}+e^{2x})}$

48) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^{2}+e^{x})}{\ln(x^{4}+e^{2x})}$

Учебно-методическое пособие

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Сичинава Н.К,
Хупория Н.З.
Ласурия Р.А.,

Набор, компьютерная верстка: Чолокян С.Э.